

УДК 533.6.013.42

© 1993 г. В. В. ДИТКИН, Б. А. ОРЛОВ, Г. И. ПШЕНИЧНОВ

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛАТТЕРА КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Исследуется аэродинамическая устойчивость тонких оболочек, находящихся в сверхзвуковом потоке сжимаемого газа. Ряд фундаментальных результатов решения этой проблемы содержится в [1, 2].

1. Основные особенности проблемы. Обычно при использовании аэродинамической устойчивости избыточное давление на оболочку задается линеаризованным соотношением [3]:

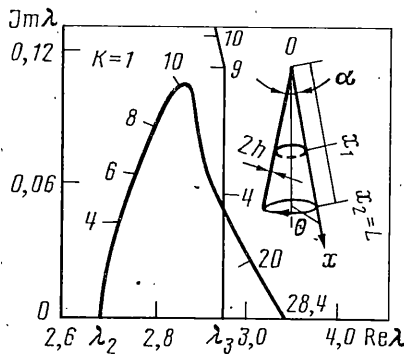
$$\Delta p = p_1 \partial w / \partial t + p_2 \partial w / \partial x \quad (1.1)$$

здесь p_1 , p_2 — величины, линейно зависящие от давления невозмущенного потока газа, w — прогиб срединной поверхности оболочки. Исследование устойчивости в линейном приближении зачастую [4] проводится без учета первого слагаемого в (1.1), характеризующего аэродинамическое демпфирование, исходя из предположений о малости влияния этого фактора на величину критического давления. В этом случае проблема сводится к расчету однопараметрической несамосопряженной задачи на собственные значения и критерием неустойчивости является возникновение в спектре комплексных частот.

Учет аэродинамического демпфирования приводит к спектральной задаче для квадратичного пучка операторов, собственные значения которой всегда комплексны. При этом условием возникновения неустойчивости является переход собственного значения из одной полуплоскости в другую в процессе возрастания параметра, характеризующего давление.

С вычислительной точки зрения такая задача является сложной, что в первую очередь обусловлено самой комплексностью собственного значения. Во-вторых, в процессе движения по параметру возможно появление кратных собственных значений, а также существование наряду с разыскиваемым значением другого, близко к нему расположенного. По-видимому, указанные вычислительные трудности ощущались многими исследователями при рассмотрении влияния демпфирования на величину критического давления.

Для решения такого типа задач в данной работе предлагается эффективный итерационный метод решения, ранее изложенный в [5]. Решение вспомогательных краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений осуществлялось при этом по методу ортогональной прогонки [6]. Вычисления, проведенные для конкретных оболочек, показали что возможны ситуации, когда учет первого слагаемого в (1.1) приводит к заметному возрастанию величины критического давления. С другой стороны, когда влияние первого слагаемого мало, результаты хорошо согласуются с данными [7].



Фиг. 1

2. **Постановка краевой задачи и метод решения.** Рассматривается сопло, представляющее собой тонкую упругую оболочку с толщиной стенки $2h$ в виде кругового усеченного конуса, заземленного по торцу меньшего диаметра. Другой край оболочки считается свободным. На фиг. 1 изображена срединная поверхность такой оболочки с введенными на ней криволинейными координатами x, θ . В сопле протекает поток сверхзвукового газа. Невозмущенный поток в точке (x, θ) поверхности характеризуется функциями скорости $U(x) = aM(x)$ и давлением $p(x) = qp_0(x)$, где a — скорость звука в газе, $M(x)$ — число Маха, $q > 0$ — безразмерный параметр. Избыточное давление газа имеет вид

$$\Delta p = -p_0 q \left[\frac{\kappa}{a} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\kappa M^2}{(M^2 - 1)^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.1)$$

где κ — показатель политропы газа. Практический интерес представляет задача отыскания наименьшего из возможных значений q , при которых возникают растущие во времени колебания конструкции.

Линейные дифференциальные уравнения возмущенного движения оболочки примем в виде

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{m\alpha} - b_\alpha^m N^\alpha + X^m, \quad b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha N^\alpha - Z &= 0 \\ \nabla_\alpha M^{m\alpha} - N^m &= 0, \quad c_{\alpha\beta} b_\beta^s M^{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} &= 0 \\ \gamma_m &= \nabla_m w - b_\alpha^m v_\alpha, \quad \delta = -1/2 c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta \\ \varepsilon_{mn} &= \nabla_m v_n + b_{mn} w + c_{mn} \delta, \quad \mu_{mn} = \nabla_n \gamma_m - c_{\alpha\beta} b_n^{\alpha\beta} \delta \end{aligned} \quad (2.2)$$

сохраняя смысл обозначений, принятых в [8]. Особенность (2.2) состоит в том, что поперечная нагрузка Z , помимо сил инерции [8] включающая избыточное давление в форме (2.1), имеет вид

$$Z = -2h\rho \partial^2 w / \partial t^2 + \Delta p$$

Решение задачи будем искать в форме

$$\Phi(x, \theta, t) = \Phi_0(x) \exp(ik\theta + i\omega t), \quad \omega = \omega_1 + i\omega_2 \quad (2.3)$$

(Φ означает любую компоненту напряженно-деформированного состояния), так что (2.2) можно свести к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Линейными преобразованиями эта система приводится к безразмерному нормальному виду по Коши

$$y' = (A - \lambda^2 B - i\lambda C)y, \quad y = y(z), \quad z_1 < z < z_2 \quad (2.4)$$

C — вещественные матрицы

В (2.4) L — характерный линейный размер, E — модуль Юнга, $A, B,$

$$z=x/L, \quad \lambda^2=\omega^2\rho L^2/E$$

$$y=(v_1(z), v_1(z), w(z), \gamma(z), T^{11}(z), T^{12}(z), M^{11}(z), N^{11}(z))$$

Консольное закрепление оболочки приводит к краевым условиям

$$y_1=y_2=y_3=y_4=0, \quad z=z_1; \quad y_5=y_6^*=y_7=y_8^*=0, \quad z=1 \quad (2.5)$$

Функции y_6^* , y_8^* — обобщенная сдвигающая и перерезывающая силы, линейно выражающиеся через y_1, \dots, y_8 . Возникает, таким образом, краевая задача для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на собственные значения (2.4), (2.5). Требуется вычислить наименьшее значение параметра q , при котором комплексное собственное значение λ оказывается в нижней полуплоскости.

Остановимся на вопросах численного решения. К соотношениям (2.4), (2.5) добавляем условие нормировки собственной функции

$$\int_{z_1}^1 (y(\tau), \varphi(\tau)) d\tau = 1$$

где φ — некоторая заданная вектор-функция

$$(y(\tau), \varphi(\tau)) = \sum_{i=1}^8 y_i(\tau) \bar{\varphi}_i(\tau)$$

Для решения задачи (2.4), (2.5) применялся метод обратных итераций [5]. Шаг итерационного процесса описывается соотношениями

$$dy^{n+1}/dx = (A - \lambda_n^2 B - i\lambda_n C) y^{n+1} - \Delta\lambda_n (\lambda_n B y^n + iC y^n + Z^n) \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} y_1^{n+1} = y_2^{n+1} = y_3^{n+1} = y_4^{n+1} = 0, \quad z = z_1 \\ y_5^{n+1} = y_6^{*n+1} = y_7^{n+1} = y_8^{*n+1} = 0, \quad z = 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\int_{z_1}^1 (y^{n+1}(\tau), y^n(\tau)) d\tau = 1, \quad Z^{n+1} = B(\lambda_n y^{n+1} + \Delta\lambda_n y^n) \quad (2.8)$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta\lambda_n [(By^n, By^{n+1}) + (Z^n + iC y^n, Z^{n+1} + iC y^{n+1})] / [(By^{n+1}, By^{n+1}) + (Z^{n+1} + iC y^{n+1}, Z^{n+1} + iC y^{n+1})]$$

Краевая задача (2.6) — (2.8) относительно неизвестных y^{n+1} , $\Delta\lambda_n$ сводится к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений путем введения новых переменных

$$y_9^{n+1} = \Delta\lambda_n, \quad y_{10}^{n+1} = \int_{z_1}^z (y^{n+1}(\tau), y^n(\tau)) d\tau$$

Тогда

$$\frac{dy_9^{n+1}}{dz} = 0, \quad \frac{dy_{10}^{n+1}}{dz} = \sum_{i=1}^8 y_i^{n+1}(z) \bar{y}_i^n(z)$$

$$y_{10}^{n+1}(z_1) = 0, \quad y_{10}^{n+1}(1) = 1$$

На каждом шаге итерационного процесса краевая задача численно решается методом дискретной ортогональной прогонки [6]. В качестве начального приближения для q используется решение задачи для $q=0$, так что исходным моментом решения задачи при эволюции параметра q является исследование собственных колебаний консольной оболочки. Поскольку численное отыскание собственных частот колебаний оболочки является относительно простой задачей, то это обеспечивает хорошее начальное приближение при $q=0$.

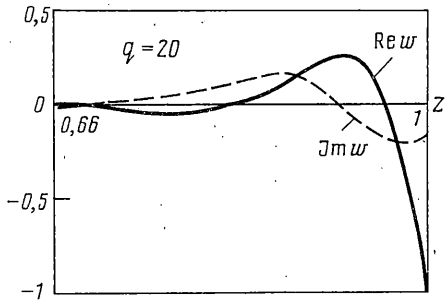
3. **Примеры расчетов.** Изложенным методом исследовано поведение в потоке газа конусообразного конического сопла. Оболочка имела следующие геометрические характеристики $z_1=x_1/L=0,66$, $z_2=x_2/L=1$, $2h/L=0,0027$, $\alpha=42^\circ$ а также плотность материала $\rho=2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E=6,87 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ и коэффициент Пуассона $\nu=0,3$. Аэродинамическое давление оболочки выразилось посредством (2.1) при $M(z)=2,02+1,43z$, $p_0(z)/E=(0,59-0,45z) \cdot 10^{-5}$, $a=200 \text{ м/с}$, $\kappa=1,4$.

Рассмотрены колебания оболочки, имеющие до десяти волн по параллели. Нужно проследить за изменением комплексных собственных значений по мере возрастания параметра $0=q_1 < q_2, \dots$. При каких-то $q_n > 0$ некоторые комплексные частоты могут переходить из верхней в нижнюю полуплоскость. В силу (2.3) собственное значение с $\text{Im } \lambda < 0$ означает возникновение колебаний с амплитудой, возрастающей во времени. Для практических целей важно определить наименьшее из таких q , называемое минимальным критическим значением параметра. Построенные на фиг. 1 кривые означают траектории движения второй (λ_2) и третьей (λ_3) частот при $k=1$, одна из которых доставляет именно искомое минимальное критическое давление qp_0 . Нумерация — понятие условное для комплексных частот и отражает только порядок их следования в спектре собственных колебаний при $k=1$. Вдоль траекторий проставлены значения параметра q , соответствующие отмеченной комплексной частоте. Из фиг. 1 следует, что в видимой точке пересечения двух траекторий (λ_2) и (λ_3) в действительности не отвечает общее для них значение параметра давления q . Дополнительно проведенный расчет показал, что в отсутствие демпфирования имеет место значительное снижение величины минимального критического параметра. В этом случае расчет дал значение $q=10,6$.

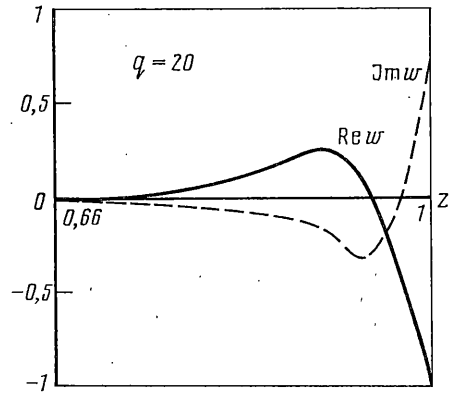
Одно замечание, касающееся прогиба w . В случае колебаний без демпфирования возникновение флаттера характеризуется тем, что по мере увеличения давления некоторые соседние частоты, сближаясь, сливаются, в то время как соответствующие им формы колебаний преобразуются к некому общему виду. Причем, вплоть до достижения минимального критического параметра, w — вещественная функция. Это подтверждается на данном примере, а, скажем, в [9] это показано на примере цилиндрических оболочек. Демпфирование приводит к тому, что при любом $q \neq 0$ прогиб является комплексной функцией. Вид ее с течением времени меняется и определяется комплексными составляющими w , (фиг. 2, 3). Вычисления показали, что примерно при $q \geq 11,5$ собственному значению соответствует две собственные функции. Для таких q процесс последовательных приближений может сходиться к каждой из двух w , изображенных на фиг. 2, 3, в зависимости от выбора начальных приближений в процессе Ньютона. Несмотря на это, процесс сходимости в обоих случаях был быстрым, требовалось лишь несколько приближений. Частоты, отвечающие этим существенно различающимся формам, совпали в пяти-шести значащих цифрах.

Проведено сопоставление с результатами [7], в которой предлагается конечно-элементный анализ конического элемента сопла. Параметры оболочки взяты из цитируемой работы $x_1=2,0 \text{ м}$; $x_2=2,35 \text{ м}$; $\alpha=43^\circ$; $2h=0,0004 \text{ м}$; $\nu=0,38$; $\rho=9150 \text{ кг/м}^3$; $E=9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$.

Что касается характеристик невозмущенного потока, то его скорость мало меняется вдоль образующей, и можно взять ее среднее значение, а для скорости звука в газе принята величина, соответствующая данному газу при температуре 2558° С . Для данного расчета это составляет соответственно $M=4,76$; $a=980 \text{ м/с}$. Сопоставление проведено при численном анализе первых пяти частот при $k=1$ в процессе эволюции параметра давления q . Расчеты выполнялись как с учетом, так и без учета напряженного состояния оболочки в невозмущенном состоянии равновесия.



Фиг. 2



Фиг. 3

Оказалось, что в обоих случаях результаты практически совпали. Расчеты показали, что в данном случае аэродинамическое демпфирование оказывает незначительное стабилизирующее воздействие: учет первого члена в (1.1) изменяет величину критического давления примерно на 1%. Отличие частот флаттера от данных работы [7] — порядка 1,5%. В указанной работе флаттер наступал при сближении второй-третьей, а также четвертой-пятой частот при практически одинаковых значениях q . В первом случае полученное нами критическое давление на 35, а во втором на 5% ниже, чем в упомянутой работе.

Несколько слов об эффективности метода. Исходные приближения прогиба всякий раз задавались в виде части синусоиды (т. е. весьма грубо) так, чтобы она и предполагаемая форма свободных колебаний имели одинаковое количество нулей. При этом проблем со сходимостью итераций никогда не возникало. Опыт авторов, предлагаемый как ориентир, показал достаточность одного часа вычислений на БЭСМ-6 для получения искомого критического значения параметра давления с тремя верными десятичными знаками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. С. 339.
2. Фершинг Г. Основы аэроупругости. М.: Машиностроение, 1984. С. 600.
3. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Прикл. матем. и мех. 1956. Т. 20, № 6. С. 733–755.
4. Новичков Ю. Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика деформируемого тела. М.: Наука, 1978. Т. 11. С. 67–121.
5. Диткин В. В. Об итерационном методе решения задачи на собственные значения для полиномиального пучка линейных операторов // Вычисл. матем. и мат. физ. 1989. Т. 29. № 5. С. 775–780.
6. Годунов С. К. О численном методе решения краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Вып. 3. № 6. С. 171–174.
7. Mason D. R., Blötter P. T. Finite — element application to rocket nozzle aeroelasticity // J. Propulsion and Power. 1986. V. 2. P. 499–507.
8. Гольдсвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. // Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. С. 383.
9. Брусиловский А. Д., Мельникова А. М., Швейко Ю. Ю. Колебания и устойчивость цилиндрической оболочки в потоке газа. // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 1. С. 67–73.