

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. А. В. ЛОПАТИН

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ КОМПОЗИТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

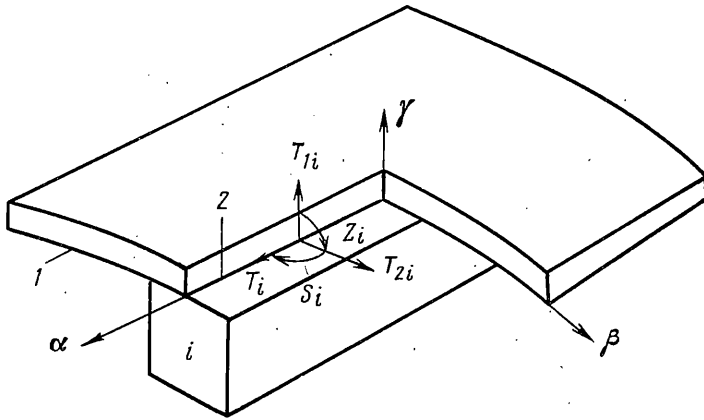
Рассматривается устойчивость композитной цилиндрической оболочки с продольными ребрами жесткости, нагруженной по краям изгибающими моментами. При построении расчетной модели учитывается дискретный характер расположения ребер, деформации поперечного сдвига в оболочке и ребрах, слоистость и ортотропия материала. В качестве примера найден критический изгибающий момент для оболочки с четырьмя продольными ребрами жесткости, расположенными различным образом как по отношению к плоскости изгиба, так и по отношению к начальной поверхности оболочки.

1. Рассмотрим задачу устойчивости композитной цилиндрической оболочки с продольными ребрами, нагруженной по краям через жесткие шпангоуты изгибающими моментами M . Такая расчетная схема может быть использована для оценки несущей способности подкрепленных корпусов летательных аппаратов, подвергающихся в процессе эксплуатации изгибу.

Воспользуемся для решения поставленной задачи уравнениями теории подкрепленных композитных оболочек [1, 2], в рамках которой учитываются дискретный характер расположения ребер, деформации поперечного сдвига в оболочке и ребрах, слоистость и ортотропия материала.

В качестве носителя формы оболочки, называемого в дальнейшем ее начальной поверхностью, примем ту из поверхностей оболочки, на которой расположены ребра жесткости. Отнесем начальную поверхность к системе криволинейных координат $\alpha\beta\gamma$. Направим ось α по образующей, ось β по окружности цилиндра, образованного начальной поверхностью, а ось γ — по нормали к начальной поверхности. Обозначим через k общее число продольных ребер, а через i ($i=1, 2, \dots, k$) — порядковый номер отдельного ребра.

При построении расчетной модели примем, что реальная нагрузка, которую i -е ребро передает на оболочку по некоторой полосе контакта, сосредоточена вдоль линии, проходящей внутри этой полосы, в виде статически эквивалентных погонных усилий T_i , T_{1i} , T_{2i} и моментов S_i , Z_i (фиг. 1). По аналогии с начальной поверхностью оболочки введем в качестве носителя формы ребра, называемого в дальнейшем его продольной осью, линию, совпадающую с линией контакта ребра и оболочки (фиг. 1).



Фиг. 1

Полная система уравнений, описывающая потерю устойчивости рассматриваемой конструкции при изгибе, включает две группы уравнений: уравнения для оболочки с учетом ее взаимодействия с ребрами и уравнения для ребер с учетом их взаимодействия с оболочкой. Рассмотрим эти уравнения. Для оболочки имеем

линеаризованные уравнения устойчивости

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \sum_{i=1}^k T_i \delta(\beta - \beta_i) + \sum_{i=1}^k S_i \delta'(\beta - \beta_i) &= 0 \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{Q_\beta}{R} + \sum_{i=1}^k T_{2i} \delta(\beta - \beta_i) &= 0 \quad (1.1) \\ \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial \beta} + \frac{N_\beta}{R} + \sum_{i=1}^k T_{1i} \delta(\beta - \beta_i) + \sum_{i=1}^k Z_i \delta'(\beta - \beta_i) - N_\alpha'' \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} &= 0 \\ \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - Q_\alpha &= 0, \quad \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - Q_\beta &= 0 \end{aligned}$$

физические соотношения

$$\begin{aligned} N_\alpha &= B_{11}\epsilon_\alpha + B_{12}\epsilon_\beta + C_{11}\kappa_\alpha + C_{12}\kappa_\beta \\ N_\beta &= B_{21}\epsilon_\alpha + B_{22}\epsilon_\beta + C_{21}\kappa_\alpha + C_{22}\kappa_\beta \\ N_{\alpha\beta} &= B_{33}\epsilon_{\alpha\beta} + C_{33}\kappa_{\alpha\beta} \\ M_\alpha &= C_{11}\epsilon_\alpha + C_{12}\epsilon_\beta + D_{11}\kappa_\alpha + D_{12}\kappa_\beta \\ M_\beta &= C_{21}\epsilon_\alpha + C_{22}\epsilon_\beta + D_{21}\kappa_\alpha + D_{22}\kappa_\beta \\ M_{\alpha\beta} &= C_{33}\epsilon_{\alpha\beta} + D_{33}\kappa_{\alpha\beta}, \quad Q_\alpha = K_\alpha \psi_\alpha, \quad Q_\beta = K_\beta \psi_\beta \end{aligned} \quad (1.2)$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \epsilon_\beta = \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R}, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \kappa_\alpha &= \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \alpha}, \quad \kappa_\beta = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \beta}, \quad \kappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \beta} \\ \psi_\alpha &= \varphi_\alpha + \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \psi_\beta = \varphi_\beta + \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R} \end{aligned} \quad (1.3)$$

В формулах (1.1), (1.2), (1.3) R — радиус цилиндра, образованного начальной поверхностью; $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}$ — мембранные, Q_α, Q_β — перерезывающие усилия; M_α, M_β — изгибающие, $M_{\alpha\beta}$ — крутящий моменты; $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{\alpha\beta}$ — компоненты мембранной, $\varkappa_\alpha, \varkappa_\beta$ — изгибной, $\varkappa_{\alpha\beta}$ — крутильной, ψ_α, ψ_β — трансверсальной сдвиговой деформации; u, v, w — перемещения и прогиб точек начальной поверхности; $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ — углы поворота нормали к начальной поверхности; $B_{11}, B_{22}, B_{12}, B_{21}, B_{33}$ — мембранные, $C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{21}, C_{33}$ — смешанные, $D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{21}, D_{33}$ — изгибные, K_α, K_β — сдвиговые жесткостные параметры стенки; $\beta - \beta_i = 0$ — уравнение линии контакта i -го ребра с оболочкой; δ, δ' — функция Дирака и ее производная; N_α° — мембранное продольное усилие, соответствующее исходному докритическому состоянию оболочки.

Система уравнений, описывающая потерю устойчивости i -го ребра, включает:

линеаризованные уравнения устойчивости

$$\begin{aligned} \frac{dN_i}{d\alpha} - T_i &= 0, & \frac{dQ_{1i}}{d\alpha} - T_{1i} - N_i^\circ \frac{d^2 w_{1i}}{d\alpha^2} &= 0, & \frac{dQ_{2i}}{d\alpha} - T_{2i} &= 0 \\ \frac{dM_i}{d\alpha} - Z_i &= 0, & \frac{dM_{1i}}{d\alpha} - Q_{1i} &= 0, & \frac{dM_{2i}}{d\alpha} - Q_{2i} - S_i &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

физические соотношения

$$\begin{aligned} N_i &= B_i \varepsilon_i + C_{1i} \varkappa_{1i} + C_{2i} \varkappa_{2i}, & Q_{1i} &= K_{1i} \psi_{1i}, & Q_{2i} &= K_{2i} \psi_{2i} \\ M_i &= D_i \varkappa_i, & M_{1i} &= C_{11i} \varepsilon_i + D_{11i} \varkappa_{1i} + D_{12i} \varkappa_{2i}, & M_{2i} &= C_{21i} \varepsilon_i + D_{21i} \varkappa_{1i} + D_{22i} \varkappa_{2i} \end{aligned} \quad (1.5)$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{du_i}{d\alpha}, & \psi_{1i} &= \varphi_{1i} + \frac{dw_{1i}}{d\alpha}, & \psi_{2i} &= \varphi_{2i} + \frac{dw_{2i}}{d\alpha} \\ \varkappa_i &= \frac{d\varphi_i}{d\alpha}, & \varkappa_{1i} &= \frac{d\varphi_{1i}}{d\alpha}, & \varkappa_{2i} &= \frac{d\varphi_{2i}}{d\alpha} \end{aligned} \quad (1.6)$$

условия совместности деформаций ребра и оболочки

$$\begin{aligned} u_i &= u(\beta_i), & w_{1i} &= w(\beta_i), & w_{2i} &= v(\beta_i) \\ \varphi_i &= -\partial w(\beta_i) / \partial \beta, & \varphi_{2i} &= -\partial u(\beta_i) / \partial \beta \end{aligned} \quad (1.7)$$

В уравнениях (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) не оговоренные ранее обозначения имеют следующий смысл: N_i — осевая, Q_{1i}, Q_{2i} — перерезывающие силы; M_i — крутящий, M_{1i}, M_{2i} — изгибающие моменты; ε_i — продольная, \varkappa_i — крутильная, $\varkappa_{1i}, \varkappa_{2i}$ — изгибные деформации оси ребра; ψ_{1i}, ψ_{2i} — сдвиговые деформации в сечении ребра; u_i — продольное перемещение; w_{1i}, w_{2i} — прогибы точек оси ребра; $\varphi_i, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}$ — углы поворота сечения ребра; B_i — продольная, C_{1i}, C_{2i} — смешанные, K_{1i}, K_{2i} — сдвиговые, D_i — крутильная, $D_{11i}, D_{22i}, D_{12i}, D_{21i}$ — изгибные жесткости сечения ребра; N_i° — осевое усилие, соответствующее докритическому состоянию ребра.

Отметим, что жесткостные параметры оболочки в формулах (1.2) определяются относительно ее начальной поверхности, а жесткостные параметры i -го ребра в формулах (1.5) — относительно его оси.

Определим продольные усилия N_α° и N_i° ($i=1, 2, \dots, k$), возникающие в оболочке и ребра в исходном состоянии. Примем, что докритическое напряженное состояние является безмоментным и поперечное сечение оболочки не деформируется вплоть до потери устойчивости. Тогда, следуя [1], запишем для продольных усилий следующие вы-

ражения

$$N_{\alpha}^{\circ} = B_{11} \frac{M}{D} R \cos \frac{\beta}{R}, \quad N_i^{\circ} \approx B_i \frac{M}{D} R_i \cos \frac{\beta_i}{R} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (1.8)$$

$$D = \pi B_{11} R^3 + \sum_{i=1}^k B_i R_i^2 \cos^2 \frac{\beta_i}{R}$$

где R_i — расстояние от центра поперечного сечения i -го ребра до центра поперечного сечения оболочки.

Получим систему уравнений, содержащую в качестве неизвестных перемещения и углы поворота в оболочке и ребрах и усилия и моменты взаимодействия между ними. Для этого выразим в (1.1) и (1.4) усилия и моменты через деформации с помощью физических соотношений (1.2) и (1.5), а деформации через перемещения и углы поворота согласно равенствам (1.3) и (1.6) и условиям (1.7). Усилия N_{α}° и N_i° ($i = 1, 2, \dots, k$) исключим из уравнений (1.1) и (1.4), используя формулы (1.8). В результате получим

для оболочки

$$B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + B_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + C_{11} \frac{\partial^2 \varphi_{\alpha}}{\partial \alpha^2} + C_{33} \frac{\partial^2 \varphi_{\alpha}}{\partial \beta^2} + (C_{12} + C_{33}) \frac{\partial^2 \varphi_{\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + \sum_{i=1}^k T_i \delta(\beta - \beta_i) + \sum_{i=1}^k S_i \delta'(\beta - \beta_i) = 0 \quad (1.9)$$

$$(B_{21} + B_{33}) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + B_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + B_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{K_{\beta}}{R^2} v + \frac{B_{22} + K_{\beta}}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} + (C_{21} + C_{33}) \frac{\partial^2 \varphi_{\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} + C_{22} \frac{\partial^2 \varphi_{\beta}}{\partial \beta^2} + C_{33} \frac{\partial^2 \varphi_{\beta}}{\partial \alpha^2} + \frac{K_{\beta}}{R} \varphi_{\beta} + \sum_{i=1}^k T_{2i} \delta(\beta - \beta_i) = 0$$

$$\frac{B_{21}}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{B_{22} + K_{\beta}}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + K_{\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + K_{\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{B_{22}}{R^2} w + (K_{\alpha} - \frac{C_{21}}{R}) \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial \alpha} + (K_{\beta} - \frac{C_{22}}{R}) \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial \beta} + \sum_{i=1}^k T_{1i} \delta(\beta - \beta_i) + \sum_{i=1}^k Z_i \delta'(\beta - \beta_i) - M \frac{B_{11}}{D} R \cos \frac{\beta}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0$$

$$C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + C_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + (C_{12} + C_{33}) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + (K_{\alpha} - \frac{C_{12}}{R}) \frac{\partial w}{\partial \alpha} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_{\alpha}}{\partial \alpha^2} + D_{33} \frac{\partial^2 \varphi_{\alpha}}{\partial \beta^2} + K_{\alpha} \varphi_{\alpha} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \varphi_{\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

$$(C_{21} + C_{33}) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + C_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{K_{\beta}}{R} v + (K_{\beta} - \frac{C_{22}}{R}) \frac{\partial w}{\partial \beta} + (D_{21} + D_{33}) \frac{\partial^2 \varphi_{\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_{\beta}}{\partial \beta^2} + D_{33} \frac{\partial^2 \varphi_{\beta}}{\partial \alpha^2} + K_{\beta} \varphi_{\beta} = 0$$

для i -го ребра

$$C_{1i} \frac{\partial^2 \varphi_{1i}}{\partial \alpha^2} + T_i + C_{2i} \frac{\partial^2 u(\beta_i)}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + B_i \frac{\partial^2 u(\beta_i)}{\partial \alpha^2}$$

$$K_{1i} \frac{d\varphi_{1i}}{d\alpha} - T_{1i} = -K_{1i} \frac{\partial^2 w(\beta_i)}{\partial \alpha^2} + M \frac{B_i}{D} R_i \cos \frac{\beta_i}{R} \frac{\partial^2 w(\beta_i)}{\partial \alpha^2} \quad (1.10)$$

$$T_{2i} = -K_{2i} \frac{\partial^2 u(\beta_i)}{\partial \alpha \partial \beta} + K_{2i} \frac{\partial^2 v(\beta_i)}{\partial \alpha^2}, \quad Z_i = -D_i \frac{\partial^3 w(\beta_i)}{\partial \alpha^2 \partial \beta}$$

$$D_{11i} \frac{d^2 \varphi_{1i}}{d\alpha^2} - K_{1i} \varphi_{1i} = D_{12i} \frac{\partial^3 u(\beta_i)}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - C_{1i} \frac{\partial^2 u(\beta_i)}{\partial \alpha^2} + K_{1i} \frac{\partial w(\beta_i)}{\partial \alpha}$$

$$D_{21i} \frac{d^2 \varphi_{1i}}{d\alpha^2} - S_i = D_{22i} \frac{\partial^3 u(\beta_i)}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - C_{2i} \frac{\partial^2 u(\beta_i)}{\partial \alpha^2} - K_{2i} \frac{\partial u(\beta_i)}{\partial \beta} + K_{2i} \frac{\partial v(\beta_i)}{\partial \alpha}$$

Уравнения устойчивости (1.9) и (1.10) содержат в качестве известных следующие функции $u, v, w, \varphi_\alpha, \varphi_\beta, u(\beta_i), v(\beta_i), w(\beta_i), \varphi_{1i}, T_i, T_{1i}, T_{2i}, S_i, Z_i$ ($i=1, 2, \dots, k$).

2. Предполагая, что на краях оболочки выполняются условия шарнирного опирания, представим решение уравнений (1.9), (1.10) в виде тригонометрических рядов

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \cos \lambda_m \alpha \cos \lambda_n \beta, \quad v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \sin \lambda_m \alpha \sin \lambda_n \beta,$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m \alpha \cos \lambda_n \beta$$

$$\varphi_\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\alpha mn} \cos \lambda_m \alpha \cos \lambda_n \beta, \quad \varphi_\beta = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\beta mn} \sin \lambda_m \alpha \sin \lambda_n \beta \quad (2.1)$$

$$T_i = \sum_{m=1}^{\infty} T_{im} \cos \lambda_m \alpha, \quad T_{1i} = \sum_{m=1}^{\infty} T_{1im} \sin \lambda_m \alpha, \quad T_{2i} = \sum_{m=1}^{\infty} T_{2im} \sin \lambda_m \alpha$$

$$S_i = \sum_{m=1}^{\infty} S_{im} \cos \lambda_m \alpha, \quad Z_i = \sum_{m=1}^{\infty} Z_{im} \sin \lambda_m \alpha, \quad \varphi_{1i} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{1im} \cos \lambda_m \alpha$$

где $\lambda_m = m\pi/l$; $\lambda_n = n/R$; l — длина оболочки; m — число полуволн вдоль оболочки; n — число волн по окружности оболочки; $u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, \varphi_{\alpha mn}, \varphi_{\beta mn}, T_{im}, T_{1im}, T_{2im}, S_{im}, Z_{im}, \varphi_{1im}$ ($i=1, 2, \dots, k$) — неизвестные числа.

Подставляя разложения (2.1) в (1.9) и (1.10), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений, которая после исключения чисел $T_{im}, T_{1im}, T_{2im}, S_{im}, Z_{im}, \varphi_{1im}$ ($i=1, 2, \dots, k$) может быть представлена в следующем виде

$$A_{mn} U_{mn} + \sum_{n_1=1}^{\infty} H_{mn n_1} U_{mn_1} - M \left(F_m U_{m, n-1} + F_m U_{m, n+1} + \sum_{n_1=1}^{\infty} P_{mn n_1} U_{mn_1} \right) = 0$$

$$(m=1, 2, \dots, \infty)$$

$$U_{mn} = \{u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, \varphi_{\alpha mn}, \varphi_{\beta mn}\}^T \quad (2.2)$$

$$H_{mn n_1} = \frac{1}{\pi R} \sum_{i=1}^k \left(B_{im} \cos \lambda_n \beta_i \cos \lambda_{n_1} \beta_i + C_{im n n_1} \sin \lambda_n \beta_i \sin \lambda_{n_1} \beta_i + D_{im n_1} \cos \lambda_n \beta_i \sin \lambda_{n_1} \beta_i + E_{im n} \sin \lambda_n \beta_i \cos \lambda_{n_1} \beta_i \right)$$

$$P_{mn n_1} = \frac{1}{\pi R} \sum_{i=1}^k G_{im} \cos \frac{\beta_i}{R} \cos \lambda_n \beta_i \cos \lambda_{n_1} \beta_i$$

Символ $\{ \}^T$ означает операцию транспонирования вектора U_{mn} . Размеры матриц $A_{mn}, H_{mn}, F_m, P_{mn}, V_m, C_{imn}, D_{imn}, E_{imn}, G_{im} - 5 \times 5$. Отличные от нуля элементы этих матриц имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= B_{11}\lambda_m^2 + B_{33}\lambda_n^2 \\
 a_{12} &= a_{21} = -(B_{12} + B_{33})\lambda_m\lambda_n, \quad a_{13} = a_{31} = -\frac{B_{12}}{R}\lambda_m \\
 a_{14} &= a_{41} = C_{11}\lambda_m^2 + C_{33}\lambda_n^2, \quad a_{15} = a_{51} = a_{24} = a_{42} = -(C_{12} + C_{33})\lambda_m\lambda_n \\
 a_{22} &= B_{22}\lambda_n^2 + B_{33}\lambda_m^2 + \frac{K_\beta}{R^2}, \quad a_{23} = a_{32} = \frac{B_{22} + K_\beta}{R}\lambda_n \\
 a_{25} &= a_{52} = C_{22}\lambda_n^2 + C_{33}\lambda_m^2 - \frac{K_\beta}{R} \\
 a_{33} &= K_\alpha\lambda_m^2 + K_\beta\lambda_n^2 + \frac{B_{22}}{R^2}, \quad a_{34} = a_{43} = \left(K_\alpha - \frac{C_{12}}{R}\right)\lambda_m \\
 a_{35} &= a_{53} = -\left(K_\beta - \frac{C_{22}}{R}\right)\lambda_n \\
 a_{44} &= D_{11}\lambda_m^2 + D_{33}\lambda_n^2 + K_d, \quad a_{45} = a_{54} = -(D_{12} + D_{33})\lambda_m\lambda_n, \quad a_{55} = D_{22}\lambda_n^2 + D_{33}\lambda_m^2 + K_\beta \\
 b_{11} &= \lambda_m^2(B_i - C_{11}^2 L_{im}\lambda_m^2), \quad b_{13} = b_{31} = -K_{11}C_{11}L_{im}\lambda_m^3, \quad b_{33} = D_{11}K_{11}L_{im}\lambda_m \\
 c_{11} &= \lambda_n\lambda_{n1}(D_{22}\lambda_m^2 + K_{2i} - D_{12i}^2 L_{im}\lambda_m^4), \quad c_{12} = K_{2i}\lambda_m\lambda_n; \quad c_{21} = K_{2i}\lambda_m\lambda_{n1} \\
 c_{22} &= K_{2i}\lambda_m^2, \quad c_{33} = D_{11}\lambda_m^2\lambda_n\lambda_{n1}, \quad d_{11} = \lambda_m^2\lambda_{n1}(C_{2i} - D_{12i}C_{11}L_{im}\lambda_m^2) \\
 d_{31} &= -D_{12i}K_{11}L_{im}\lambda_m^3\lambda_{n1}, \quad e_{11} = \lambda_m^2\lambda_n(C_{2i} - D_{21}C_{11}L_{im}\lambda_m^2) \\
 e_{13} &= -D_{21}K_{11}L_{im}\lambda_m^3\lambda_n, \quad L_{im} = \frac{1}{D_{11i}\lambda_m^2 + K_{1i}}, \quad f_{33} = \frac{1}{2} \frac{B_{11}}{D} R\lambda_m^2, \\
 g_{33} &= \frac{B_i}{D} R_i\lambda_m^2
 \end{aligned}$$

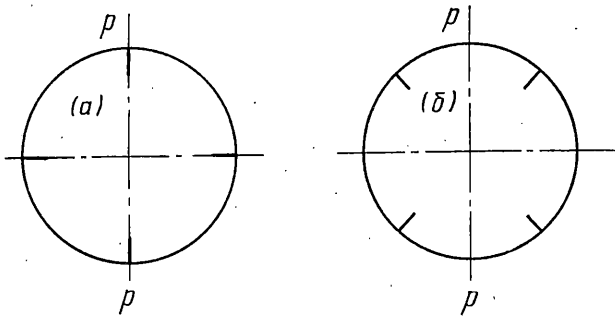
В общем случае система уравнений (2.2) имеет бесконечный порядок. При расчетах ограничимся конечным числом членов в рядах (2.1), аппроксимирующих неизвестные функции.

Рассмотрим порядок определения критического изгибающего момента. Удержим в бесконечных рядах (2.1) s членов по продольной координате α и j членов по окружной координате β . Тогда в (2.2) $m=1, 2, \dots, s$, и $n, n_1=1, 2, \dots, j$. Перепишем систему (2.2) для выбранного числа j в виде следующего матричного уравнения

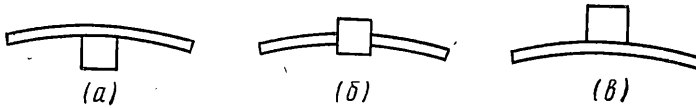
$$\Phi_m U_m - M \Phi_m U_m = 0 \quad (m=1, 2, \dots, s) \quad (2.3)$$

$$U_m = \{U_{m1}, U_{m2}, U_{m3}, \dots, U_{mj}\}^T$$

$$\Phi_m = \left\{ \begin{array}{cccccc}
 A_{m1} + H_{m1,1} & H_{m1,2} & H_{m1,3} & \dots & H_{m1,j-1} & H_{m1,j} \\
 H_{m2,1} & A_{m2} + H_{m2,2} & H_{m2,3} & \dots & H_{m2,j-1} & H_{m2,j} \\
 H_{m3,1} & H_{m3,2} & A_{m3} + H_{m3,3} & \dots & H_{m3,j-1} & H_{m3,j} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 H_{mj-1,1} & H_{mj-1,2} & H_{mj-1,3} & \dots & A_{mj-1} + H_{mj-1,j-1} & H_{mj-1,j} \\
 H_{mj,1} & H_{mj,2} & H_{mj,3} & \dots & H_{mj,j-1} & A_{mj} + H_{mj,j} \\
 P_{m1,1} & F_m + P_{m1,2} & P_{m1,3} & \dots & P_{m1,j-1} & P_{m1,j} \\
 F_m + P_{m2,1} & P_{m2,2} & F_m + P_{m2,3} & \dots & P_{m2,j-1} & P_{m2,j} \\
 P_{m3,1} & F_m + P_{m3,2} & P_{m3,3} & \dots & P_{m3,j-1} & P_{m3,j} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 P_{mj-1,1} & P_{mj-1,2} & P_{mj-1,3} & \dots & P_{mj-1,j-1} & F_m + P_{mj-1,j} \\
 P_{mj,1} & P_{mj,2} & P_{mj,3} & \dots & F_m + P_{mj,j-1} & P_{mj,j}
 \end{array} \right.$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Размеры матриц Ψ_m и $\Phi_m - 5j \times 5j$. Критический изгибающий момент соответствует минимальному из собственных чисел однородной системы (2.3), найденных для всех значений m из диапазона от 1 до s . Точность вычислений при этом оценивается сравнением результатов, получаемых при различном числе j .

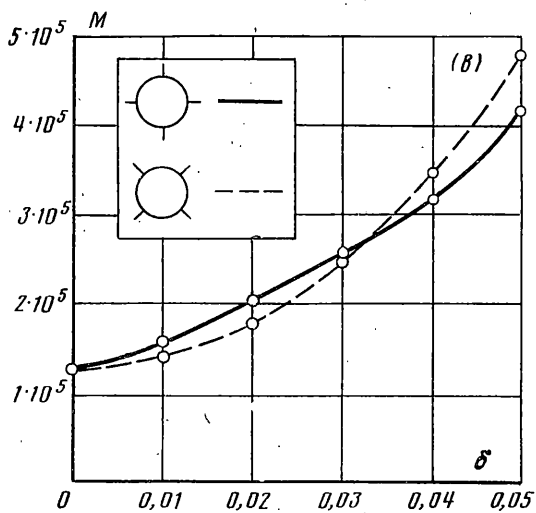
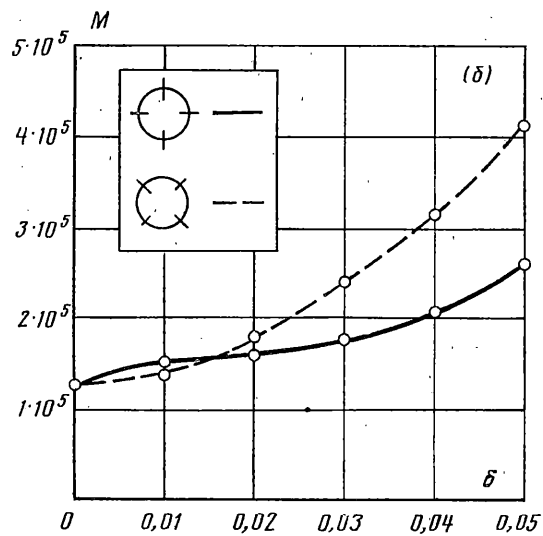
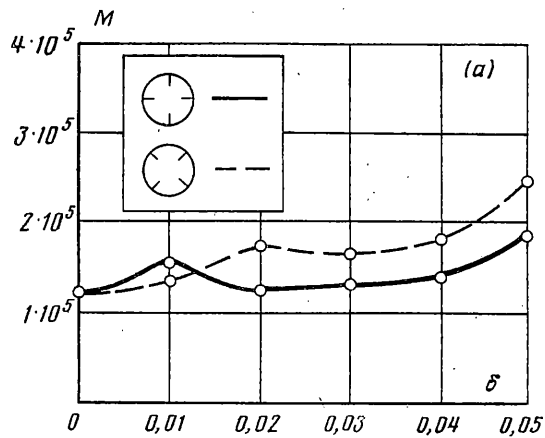
Рассмотренный выше подход к решению задачи устойчивости при изгибе композитной цилиндрической оболочки с продольными ребрами жесткости реализован в вычислительной программе.

3. В качестве примера определим критический изгибающий момент для оболочки с четырьмя продольными ребрами жесткости, расположенными по отношению к плоскости изгиба по схеме прямой крест (I) (фиг. 2, а) и по схеме косой крест (II) (фиг. 2, б).

Оболочка образована намоткой углепластиковой ленты под углом $\pm 45^\circ$ к образующей. Продольные ребра выполнены из алюминиевого сплава, имеют одинаковое для всех четырех квадратное поперечное сечение со стороной δ и могут располагаться на внутренней (фиг. 3, а), срединной (фиг. 3, б) или наружной (фиг. 3, в) поверхностях оболочки. Радиус оболочки — 0,5 м, длина — 2 м, толщина — 0,002 м. При расчетах будем варьировать размерами поперечного сечения ребра; рассмотрим сечения со сторонами квадрата $\delta = 0,01$ м, 0,02 м, 0,03 м, 0,04 м, 0,05 м. В рядах (2.1) при решении удерживалось 50 членов по продольной координате и до 24 членов — по окружной. На фиг. 4, а, б, в для различных схем расположения ребер представлено изменение критического изгибающего момента в зависимости от размеров поперечного сечения ребра. В табл. 1, 2 (схемы I, II) приведены числа полуволн по координате α , при которых в рассматриваемых вариантах конструкции (см. фиг. 3) реализуется критический изгибающий момент.

Отметим, что эффективность схемы I или схемы II в восприятии изгибающего момента зависит как от размеров поперечного сечения ребра, так и от того, на какой из поверхностей оболочки расположены ребра жесткости. Как видно из графиков, диапазон изменения величины δ , в котором схема II оказывается эффективней схемы I, будет наибольшим для оболочки с внутренним расположением ребер (фиг. 4, а) и меньшим для оболочки, у которой ребра расположены на срединной и наружной поверхностях (фиг. 4, б, в).

Интересно отметить, что для оболочки, подкрепленной внутренними ребрами (фиг. 3, а) при увеличении δ в некотором диапазоне изменения



Фиг. 4

Таблица 1

δ (м)	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
<i>a</i>	31	2	1	1	1
<i>б</i>	31	2	1	1	1
<i>в</i>	31	31	1	1	1

Таблица 2

δ (м)	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
<i>a</i>	31	31	1	1	1
<i>б</i>	31	31	31	1	1
<i>в</i>	31	31	31	31	31

этого параметра, наблюдается снижение критического изгибающего момента (фиг. 4, *a*). Такое anomальное поведение кривых может быть объяснено эффектом взаимодействия оболочки и ребер при потере устойчивости. Из табл. 1, 2 следует, что в обсуждаемом диапазоне изменения параметра δ происходит смена формы потери устойчивости конструкции от формы характерной для гладкой оболочки с большим числом полуволн к форме характерной для изолированного ребра с малым числом полуволн. При определенном сочетании жесткостных параметров оболочки и ребра местная форма потери устойчивости оболочки может инициировать потерю устойчивости ребра и привести в результате к снижению критического изгибающего момента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов.— М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
2. Васильев В. В., Лопатин А. В. Теория сетчатых и подкрепленных композитных оболочек // Механика конструкций из композиционных материалов: Сб. трудов IV симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 31–36.

Красноярск

Поступила в редакцию
17.II.1992