МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1993

УДК 539.3

 В. Р. СКВОРЦОВ

СИММЕТРИЧНО-НЕОДНОРОДНАЯ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНА КАК ТРЕХСЛОЙНАЯ ПЛАСТИНА С МЯГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Рассматривается пластина, материал которой однороден в плоскости и существенно неоднороден в поперечном направлении. Эта неоднородность имеет симметричный характер, причем отношение модуля упругости материала в некоторой области, прилегающей к срединной поверхности, к максимальному его значению мало.

Стандартное двумерное описание деформирования такой пластины исходит из концепции пластины (оболочки) с приведенными модулями [1], в рамках которой уравнения с точностью до двумерных эффективных характеристик совпадают с уравнениями однородной пластины и имеют 8 или 10 суммарный порядок (теории типа Кирхгофа – Лява или Тимошенко соответственно).

Для одного из видов неоднородности, а именно – ступенчатого, присущего трехслойной пластине, известны альтернативные варианты теории, основанные на гипотезе ломаной нормали с априорно не заданным соотношением ее наклона во внутреннем (мягком) и наружных (жестких) слоях, имеющие 12-й, а иногда и более высокий суммарный порядок уравнений и применимые при большей неоднородности [2, 3]. Как показано в наиболее полном обзоре по данному вопросу [4] и других работах, эти варианты теории, в отличие от стандартных, обеспечивают асимптотическую точность решения даже в тех случаях, когда малый параметр, отражающий степень неоднородности (отношение модулей упругости мягкого и жесткого слоев), по порядку величины меньше, чем основной малый параметр (относительная толщина); пример определения погрешности модели типа Тимошенко приведен в п. 3.

Очевидно, подобные эффекты имеют место не только при ступенчатом, но и при других близких ему типах неоднородности. Для их адекватного описания, в публикуемой работе осуществляется распространение теории трехслойных пластин с мягким заполнителем на любые пластины указанного строения и определяются двумерные модули в уравнениях изгиба – скручивания (мембранное деформирование большинством теорий описывается одинаково и потому здесь не рассматривается).

1. Будем использовать известные обозначения тензорного анализа [5], включая операции скалярного и векторного произведений $(\cdot)$, $(\times)$, выделения симметричной части (s), определения 1-го инварианта I_1. Введем произвольные координаты в срединной поверхности ξ_i с ортами $\mathbf{e}_i$ $(i=1, 2)$ и поперечную координату $\zeta\in[-{}^1/_2h, {}^1/_2h]$ с ортом $\mathbf{n}$. С помощью единичного плоского тензора (плоский градиент плоского радиус-вектора $\mathbf{a}=\nabla\mathbf{r}$, в ортогональных координатах равный $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$) и орта

нормали $\mathbf{n}$ разобьем тензоры напряжений, деформаций и вектор перемещений на плоские и неплоские части

$$\boldsymbol{\tau}_* = \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} + \mathbf{n}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{nn}\sigma, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_* = \boldsymbol{\varepsilon}_a + {}^1/_2(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{n} + \mathbf{n}\boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{nn}\varepsilon, \quad \mathbf{u}_* = \mathbf{u}_a + \mathbf{n}w \tag{1.1}$$

Считая материал трансверсально-изотропным, запишем систему уравнений теории упругости [5], с учетом (1.1), следующим образом

$$\begin{gathered}
\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_a + \frac{\partial}{\partial\zeta}\boldsymbol{\tau}' = 0, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\sigma = 0 \\
\boldsymbol{\varepsilon}_a = (\nabla\mathbf{u}_a)^s, \quad \boldsymbol{\gamma} = \nabla w + \frac{\partial}{\partial\zeta}\mathbf{u}_a, \quad \varepsilon = \frac{\partial}{\partial\zeta}w \\
\boldsymbol{\tau}_a = (\nu\sigma + (E - 2G_*)I_1(\boldsymbol{\varepsilon}_a))\mathbf{a} + 2G_*\boldsymbol{\varepsilon}_a \\
\varepsilon = -\nu I_1(\boldsymbol{\varepsilon}_a) + \sigma/E_*, \quad \mu = \mu_0/(1-\nu_0)\boldsymbol{\tau} = G\boldsymbol{\gamma}
\end{gathered} \tag{1.2}$$

причем, для изотропного материала с характеристиками E_0, ν_0 модули, фигурирующие в (1.2), равны

$$E = \frac{E_0}{1-\nu_0^2}, \quad G = G_* = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}, \quad E_* = \frac{E_0(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}, \quad \nu = \frac{\nu_0}{1-\nu_0}$$

В общем случае будем считать, что E, G, G_* есть величины одного порядка, а E_* — такого же или большего порядка (что допускает $\nu_0 \to {}^1/_2$). Распределение E таково, что в некоторой окрестности точки симметрии $\zeta=0$ отношение $E/E_{\max}$ может быть асимптотически малым, причем если функция распределения гладкая, что свойственно на практике, в частности, композитам с неравномерной густотой армирования или неодинаковой жесткостью слоев при континуализации характеристик, то граница этой окрестности так таковая не определена, например, $E = E_{\min} + (E_{\max} - E_{\min})2|\zeta|/h$. Производная $dE/d\zeta$ в точке симметрии, как в этом примере, может иметь разрыв, соответствующий острому минимуму E, но остается ограниченной. Коэффициент ν конечен или мал, с произвольным распределением.

При изгибе-скручивании нормальные напряжения на лицевых поверхностях противоположны, а касательные одинаковы, причем последние представимы через два скалярных потенциала. Поэтому

$$\sigma\big|_{\zeta=\pm^1\!/_2 h} = \pm\frac{\sigma_0}{2}, \quad \boldsymbol{\tau}\big|_{\zeta=\pm^1\!/_2 h} = \boldsymbol{\tau}_0 = \nabla t_0 + \nabla\times(\mathbf{n}s_0) \tag{1.3}$$

Аналогично можно выразить и вектор поперечных касательных напряжений внутри пластины, а также вектор тангенциальных перемещений

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla t + \nabla\times(\mathbf{n}s), \quad \mathbf{u}_a = \nabla u + \nabla\times(\mathbf{n}v) \tag{1.4}$$

В итоге исходная задача распадается на две: первая описывает изгиб и скручивание с выходом из плоскости (депланацией), вторая — скручивание без депланации. Согласно (1.2)—(1.4), они сводятся к уравнениям

$$\begin{gathered}
\Delta t + \frac{\partial}{\partial\zeta}\sigma = 0, \quad \nu\Delta u - \frac{1}{E_*}\sigma + \frac{\partial}{\partial\zeta}w = 0, \quad \Delta = \nabla\cdot\nabla \\
\nabla\left(t - G\left(w + \frac{\partial}{\partial\zeta}u\right)\right) = 0, \quad \nabla\left(\nu\sigma + E\Delta u + \frac{\partial}{\partial\zeta}t\right) = 0 \\
\sigma({}^1/_2 h) = {}^1/_2\sigma_0, \quad t({}^1/_2 h) = t_0, \quad \sigma(0) = u(0) = 0 \\
\boldsymbol{\tau}_a = (\nu\sigma + (E - 2G_*)\Delta u)\mathbf{a} + 2G_*\nabla\nabla u
\end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\nabla\times\left(\mathbf{n}\left(G\frac{\partial}{\partial\zeta}v-s\right)\right)=0,\quad \nabla\times\left(\mathbf{n}\left(G_*\Delta v+\frac{\partial}{\partial\zeta}s\right)\right)=0$$
$$s(^1/_2h)=s_0,\quad v(0)=0$$
$$\boldsymbol{\tau}_a=2G_*(\nabla\nabla\times(\mathbf{n}v))^s \tag{1.6}$$

где в граничных условиях учтена антисимметрия нагрузки.

Исключим из рассмотрения простейшие типы деформирования, используемые в качестве тестовых при определении основных модулей в классических теориях. В первую очередь, это чистый изгиб и чистое скручивание

$$\mathbf{u}_a=\zeta\boldsymbol{\varepsilon}_0\cdot\mathbf{r}\quad (u=^1/_2\zeta\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_0\cdot\mathbf{r})$$
$$w=-^1/_2(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_0\cdot\mathbf{r}+\nu\zeta^2I_1(\boldsymbol{\varepsilon}_0))$$
$$\boldsymbol{\tau}_a=(E-2G_*)\zeta I_1(\boldsymbol{\varepsilon}_0)\mathbf{a}+2G_*\boldsymbol{\varepsilon}_0,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_0=\boldsymbol{\varepsilon}_0^s=\text{const}$$

анализ которых дает известные формулы для жесткостей

$$D=\frac{h^3}{4}\langle Ez^2\rangle\equiv\frac{h^3}{4}\int_0^1 Ez^2\,dz,\quad z\equiv\frac{2}{h}\zeta,\quad C=\frac{h^3}{4}\langle G_*z^2\rangle$$

Кроме того, это чистый сдвиг поверхностной нагрузкой

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_0=\text{const}\quad (t=\boldsymbol{\tau}_0\cdot\mathbf{r}\ \text{ или }\ s=\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\tau}_0\times\mathbf{r}))$$

анализ которого определяет жесткость сдвига $\Gamma=h\langle f\rangle/\langle f/G\rangle$, где в зависимости от способа осреднения в разных вариантах теории f может быть выбрана равной E, G_*, ρ (плотность) и др. (иногда для определения Γ используются другие тестовые задачи или другие подходы, дающие фактически близкие результаты).

Ограничимся деформированием без краевых эффектов, при котором оператор Δ можно формально считать числом, что имеет место, например, в прямоугольной пластине с граничными условиями, обеспечивающими симметричное или антисимметричное продолжение решения за краем, или в бесконечной пластине, при нагрузке, пропорциональной в декартовых координатах $\sin(\pi\xi_1/l_1)\sin(\pi\xi_2/l_2)$ $(\Delta=-\pi^2(l_1^{-2}+l_2^{-2}))$, либо представленной гармоническим рядом.

Для предварительного анализа задачи изгиба — скручивания с депланацией сведем систему (1.5) к одному уравнению, перейдя к безразмерной координате z и введя малый параметр $\delta=\Delta h^2/4$

$$\left(\frac{\sigma''}{E}\right)''+\delta\left(\frac{\sigma'}{G}\right)'-\delta\left[\left(\frac{\nu\sigma}{E}\right)''+\frac{\nu(\sigma''-\delta\nu\sigma)}{E}\right]+\delta^2\frac{\sigma}{E_*}=0,\quad \sigma'\equiv\frac{\partial\sigma}{\partial z} \tag{1.7}$$

Дополнительным малым параметром здесь может являться величина $\eta=(\langle E\rangle\langle G^{-1}\rangle)^{-1}\sim E_{\min}/E_{\max}$. Поэтому второе слагаемое по сравнению с первым имеет порядок δ/η, третье — δ, последнее — δ^2/η. Это означает, что асимптотическая точность уравнения (1.7) и, следовательно, системы (1.5) не изменится, если положить $\nu=0$, а при $O(\delta^2)<O(\eta)-E_*^{-1}=0$, $w=w(\mathbf{r})$. Одновременно, при $O(\eta)\leqslant O(\delta)$ необходимо сохранить второе слагаемое. В итоге система (1.5) сводится к виду

$$E\delta u+(Gu')'=-^1/_2hG'w,\quad u(0)=0,\quad G(2u'/h+w)(1)=t_0$$
$$-^1/_2h\Delta^2\langle Ezu\rangle=\sigma_0+h\Delta t_0$$
$$\mathbf{M}=^1/_2h^2\langle\boldsymbol{\tau}_a z\rangle=^1/_2h^2[\mathbf{a}\Delta\langle Ezu\rangle+2(-\mathbf{a}\Delta+\nabla\nabla)\langle G_*zu\rangle] \tag{1.8}$$

где прогиб w и тензор моментов $\mathbf{M}$ подлежат определению и сравнению с двумерной теорией. В результате замены $u={}^1/_2h((t_0\psi-wy)$ от задачи (1.8) можно перейти к разрешающим уравнениям относительно функций распределения тангенциальных перемещений

$$E\delta y+(Gy')'=G',\quad y(0)=0,\quad y'(1)=1 \tag{1.9}$$

$$E\delta\psi+(G\psi')'=0,\quad \psi(0)=0,\quad G\psi'(1)=1 \tag{1.10}$$

и формулам

$$w=(\sigma_0+h\Delta t_0+{}^1/_4h^3\Psi\Delta^2t_0)/({}^1/_4h^3Y\Delta^2)$$

$$\mathbf{M}=-(\sigma_0+h\Delta t_0)\mathbf{a}\Delta^{-1}+{}^1/_2h^3(\mathbf{a}\Delta+\nabla\nabla)(Y_*w-\Psi_*t_0)$$

$$Y=\langle Ezy\rangle,\quad \Psi=\langle Ez\psi\rangle,\quad Y_*=\langle G_*zy\rangle,\quad \Psi_*=\langle G_*z\psi\rangle$$

2. Обратимся к уравнению (1.9). Если бы δ был единственным малым параметром, то функцию y и величину Y можно было бы представить рядами

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}y_k\delta^k,\quad Y=\sum_{k=0}^{\infty}Y_k\delta^k,\quad Y_k=\langle Ezy_k\rangle$$

$$y_{k+1}=\int_0^z\frac{dz_1}{G}\int_{z_1}^1 Ey_k\,dz_2,\ y_0=z \tag{2.1}$$

Рекуррентная формула для y_{k+1}, преобразованная к виду

$$y_{k+1}=\langle Ey_k\rangle\left\langle\frac{1}{G}\right\rangle-\left\langle\frac{1}{G}\int_0^z Ey_k\,dz_1\right\rangle-\langle Ey_k\rangle\int_z^1\frac{dz_1}{G}+\int_z^1\frac{dz_1}{G}\int_0^{z_1}Ey_k\,dz_2$$

позволяет перейти к следующим соотношениям для искомых величин Y_k, выраженных через вспомогательные константы

$$X_m=\langle Ey_m\rangle,\quad Z_m=\left\langle\frac{1}{G}\int_0^z Ey_m\,dz_1\right\rangle:$$

$$(X,Z,Y)_k=\sum_{m=0}^{k-1}\left[\left(\left\langle\frac{1}{G}\right\rangle X_m-Z_m\right)R_{k-m}^{(x,\,z,\,y)}-\right.$$
$$\left.-X_mS_{k-m}^{(x,\,z,\,y)}\right]+T_k^{(x,\,z,\,y)} \tag{2.2}$$

$$R_k^x=\langle ER_k\rangle,\quad R_k^z=\left\langle\frac{1}{G}\int_0^z ER_k\,dz_1\right\rangle,\quad R_k^y=\langle EzR_k\rangle$$

$$R_k=\int_z^1\frac{dz_1}{G}\int_0^{z_1}ER_{k-1}\,dz_2\quad (R\to S,\,T)$$

$$R_1=1,\quad S_1=\int_z^1\frac{dz_1}{G},\quad T_0=y_0=z$$

причем каждый из коэффициентов $(R,\,S,\,T)_i^j$ является конечным.

Все эти величины разлагаются в конечные ряды по степеням η

$$Y_k=\sum_{m=0}^{k}Y_{k,\,m}\eta^{-m}\quad (Y\to X,\,Z) \tag{2.3}$$

Поскольку $O(Y_k)=O(\eta^{-k})$, то ряд (2.1) содержит отношения малых параметров и, значит, может расходиться. Для преодоления этого, оказывается возможным представить Y в виде отношения рядов. Согласно (2.2), строятся рекуррентные соотношения для членов рядов (2.3)

$$(X, Z, Y)_{k,\,k-n} = \frac{1}{\langle E\rangle} \sum_{m=1}^{n+1} R_m^{(x,\,z,\,y)} X_{k-m,\,k-n-1} -$$

$$- \sum_{m=1}^{n} \left(S_m^{(x,\,z,\,y)} X_{k-m,\,k-n} + R_m^{(x,\,z,\,y)} Z_{k-m,\,k-n}\right) \quad (k \geqslant n+1)$$

Отсюда, в частности, вытекает последовательность формул

$$Y_{k+n,\,k+1} = \sum_{m=1}^{n} b_m Y_{k+n-m,\,k} \quad (k, n \geqslant 1) \tag{2.4}$$

$$\langle E\rangle b_1 = R_1^x, \quad \langle E\rangle b_2 = S_1^x R_1^x - (R_2^x - R_1^x R_1^z)$$

$$\langle E\rangle b_3 = S_1^{x^2} R_1^x - S_1^x (R_2^x - R_1^x R_1^z) + (S_2^x - R_1^x S_1^z) R_1^x +$$
$$+ (R_3^x - R_1^x R_2^z - R_1^x R_1^{z^2} - R_2^x R_1^z)$$

и так далее. Условия (2.4) оказываются достаточными, чтобы произведение ряда (2.1) для Y на ряд $F = \eta + \Sigma(-\delta)^k b_k$ $(k = 1, \ldots, \infty)$ не содержало бы отношений δ/η:

$$Y = \left[Y_0 \eta + \sum_{k=1}^{\infty} (-\delta)^k \left(\sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{m+1} b_{k-m} Y_{m,\,0} - Y_{k,\,1}\right)\right] \Big/ F$$

Оставляя здесь лишь главные члены разложений, получим

$$Y = \frac{\langle Ez^2\rangle - p\left(\langle Ez^2\rangle - \langle Ez\rangle^2/\langle E\rangle\right)}{1-p}$$

$$p = \delta/\eta = {}^1/_4 h^2 \Delta \langle E\rangle \langle G^{-1}\rangle$$

Решение уравнений (1.10) для ψ и поиск Ψ, Y_*, Ψ_* осуществляется аналогично, откуда в конечном итоге, с точностью до $O(\delta)$:

$$w = \frac{(1-p)(\sigma_0 + h\Delta t_0) + ph\Delta t_0 \langle Ez\rangle/\langle E\rangle}{{}^1/_4 h^3 \Delta^2 \left(\langle Ez^2\rangle - p\left(\langle Ez^2\rangle - \langle Ez\rangle^2/\langle E\rangle\right)\right)}$$

$$\mathbf{M} = -\frac{\sigma_0 + h\Delta t_0}{\Delta}\mathbf{a} + \frac{h^3}{2} \frac{\mathbf{a}\Delta + \nabla\nabla}{1-p} \left[\left(\langle G_* z^2\rangle - p\left(\langle G_* z^2\rangle -\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \langle G_* z\rangle \langle Ez\rangle/\langle E\rangle\right) w - \langle G_* z\rangle \langle G^{-1}\rangle t_0\right] \tag{2.5}$$

3. Теперь обратимся к аналогичным результатам в двумерных теориях. Использование теории типа Тимошенко дает

$$w = \frac{(1-p_1)(\sigma_0 + h\Delta t_0) + p_1 h\Delta t_0}{D\Delta^2}, \quad p_1 = \frac{D}{\Gamma}\Delta$$

$$\mathbf{M} = -\frac{\sigma_0 + h\Delta t_0}{\Delta}\mathbf{a} + 2\frac{\mathbf{a}\Delta + \nabla\nabla}{1-p_1}\left(Cw - \frac{C}{\Gamma} h t_0\right) \tag{3.1}$$

где модули D, C, Γ определены выше. Использование теории трехслойных пластин с неизвестными пока что модулями дает

$$w = \frac{(1-p_2)(\sigma_0 + h\Delta t_0) + p_2 h\Delta t_0 k^\alpha}{(D^\alpha + (1-p_2) D^\beta)\Delta^2}, \quad p_2 = \frac{D^\alpha}{\Gamma^\alpha}\Delta$$

$$\mathbf{M} = -\frac{\sigma_0 + h\Delta t_0}{\Delta}\mathbf{a} + 2\frac{\mathbf{a}\Delta + \nabla\nabla}{1-p_2}\left[(C^\alpha + (1-p_2)C^\beta) w - \frac{C^\alpha}{\Gamma^\alpha} h t_0 k^\alpha\right] \tag{3.2}$$

Смысл этих модулей в случае ступенчатого строения

$$G|_{0\leqslant\zeta<{}^1/_2h_B}=G_B,\quad E(G_*)|_{{}^1/_2h_B<\zeta\leqslant{}^1/_2h_B+h_A}=E_A(G_{*A})\gg G_B \qquad (3.3)$$

очевиден: D^α, C^α — жесткости изгиба и скручивания,, образуемые мембранными жесткостями наружных слоев, а D^β, C^β — жесткостями изгиба и скручивания этих слоев; Γ^α — сдвиговая жесткость мягкого слоя, приведенная к срединным поверхностям наружных слоев; k^α — параметр такого же приведения для касательных нагрузок

$$D^\alpha={}^1/_2E_Ah_A(h_A+h_B)^2,\ D^\beta={}^1/_6E_Ah_A{}^3\ \ (D\to C,\ E\to G_*)$$

$$\Gamma^\alpha=G_B(h_A+h_B)^2/h_B,\quad k^\alpha=(h_A+h_B)/(2h_A+h_B) \qquad (3.4)$$

Отметим, что для этого же строения модуль сдвга теории типа Тимошенко равен

$$\Gamma={}^1/_3k_0(3(h_A+h_B)^2+h_A{}^2)G_B/h_B$$

где k_0 во всех вариантах теории конечен и близок к единице, а остальные модули, независимо от конкретного строения,— $D=D^\alpha+D^\beta$, $C=C^\alpha+C^\beta$.

Сопоставление (3.1) и (2.5) показывает, что если параметр η сравним с δ или меньше его, то теория типа Тимошенко при любом выборе Γ дает ошибку в главных членах разложения, которая может быть неограниченно большой. Так, относительная ошибка для прогиба, вызванного только поперечной нагрузкой, изменяющейся вдоль ξ_1, равна

$$\varepsilon_w=\frac{(D/\Gamma-D^\alpha/\Gamma^\alpha)\pi^2/l_1{}^2+D^\beta D^\alpha\pi^4/\Gamma\Gamma^\alpha l_1{}^4}{1+D^\alpha\pi^2/\Gamma^\alpha l_1{}^2}$$

В частном случае строения (3.3), при $k_0=1$:

$$\varepsilon_w=\frac{p_0{}^2}{1+p_0}\,\frac{h_A{}^2}{3(h_A+h_B)^2+h_A{}^2},\quad p_0=\frac{E_Ah_Ah_B}{2G_B}\,\frac{\pi^2}{l_1{}^2}$$

Сопоставление (3.2) и (2.5) показывает, что теория трехслойных пластин с эффективными модулями

$$D^\alpha=\frac{h^3}{4}\,\frac{\langle Ez\rangle^2}{\langle E\rangle},\quad D^\beta=\frac{h^3}{4}\left(\langle Ez^2\rangle-\frac{\langle Ez\rangle^2}{\langle E\rangle}\right)$$

$$C^\alpha=\frac{h^3}{4}\,\frac{\langle G_*z\rangle\langle Ez\rangle}{\langle E\rangle},\quad C^\beta=\frac{h^3}{4}\left(\langle G_*z^2\rangle-\frac{\langle G_*z\rangle\langle Ez\rangle}{\langle E\rangle}\right)$$

$$\Gamma^\alpha=\frac{h}{\langle G^{-1}\rangle}\,\frac{\langle Ez\rangle^2}{\langle E\rangle^2},\quad k^\alpha=\frac{\langle Ez\rangle}{\langle E\rangle} \qquad (3.5)$$

дает асимптотически точный результат, который справедлив при любом соотношении η и δ и любом распределении, включая ступенчатое (здесь (3.5) тождественно переходит в (3.4)) и равномерное. Одновременно сохраняется точность описания чистого изгиба-скручивания.

4. Следует подчеркнуть, что все слагаемые в (2.5), содержащие p (т. е. величину $\langle G^{-1}\rangle$), необходимы только при $O(\eta)\leqslant O(\delta)$, поэтому, не нарушая точности, их можно домножить на $1+O(\eta)$. Частично эта неоднозначность устраняется при анализе скручивания без депланации. Преобразование и асимптотическое решение уравнений (1.6) способом, аналогичным описанному выше, приводит к формуле

$$\mathbf{M}=\frac{h^3}{2}(\nabla\nabla\times(\mathbf{n}s_0))^s\left\langle G_*z\int_0^z\frac{dz_1}{G}\right\rangle\Big/\left(1-\langle G_*\rangle\left\langle\frac{1}{G}\right\rangle\frac{h^2\Delta}{4}\right) \qquad (4.1)$$

Эта же задача, решенная в рамках теории типа Тимошенко и теории трехслойных пластин, дает

$$\mathbf{M}=2h(\nabla\nabla\times(\mathbf{n}s_0))^s q_1/(1-q_1\Delta),\quad q_1=C/\Gamma \tag{4.2}$$

$$\mathbf{M}=2h(\nabla\nabla\times(\mathbf{n}s_0))^s q_2 k^\alpha/(1-q_2\Delta),\quad q_2=C^\alpha/\Gamma^\alpha \tag{4.3}$$

соответственно.

Сопоставление основных слагаемых в (4.3) и (4.1) показывает, что формулу для Γ^α целесообразно заменить следующей:

$$\Gamma^\alpha = h\langle G_* z\rangle \langle Ez\rangle^2 \Big/ \left(\left\langle G_* z\int_0^z \frac{dz_1}{G}\right\rangle \langle E\rangle^2\right) \tag{4.4}$$

Сопоставление поправок порядка δ/η в знаменателе показывает, что здесь имеет место неустранимая ошибка, определяемая отличием величин $\langle G_* z\rangle/\langle G_*\rangle$ и $\langle Ez\rangle/\langle E\rangle$. Ошибка зависит от распределения «плоского» коэффициента Пуассона и всегда фактически мала. Важно, что она не устраняется полностью и в теории типа Тимошенко, хотя, в отличие от изгиба, вид соотношений (4.1)—(4.3) одинаков.

Анализ уравнений деформирования пластин с другими граничными условиями, в том числе допускающими погранслои, подтверждает все полученные выводы. Анализ же уравнений, дополненных объемной нагрузкой и динамическими слагаемыми, показывает, что фактическая погрешность всех результатов может возрастать в той мере, в какой распределение нагрузки и плотности отличается от распределения упругих модулей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альтенбах X. И.* Определение модулей упругости для пластин, изготовленных из неоднородного по толщине анизотропного материала // Изв. АН СССР, Мех. тв. тела. 1987. № 1. С. 139–146.
2. *Григолюк Э. И.* Уравнения трехслойных оболочек с мягким заполнителем // Изв. АН СССР, ОТН. 1957. № 1. С. 61–64.
3. *Александров А. Я., Куршин Л. М.* Трехслойные пластинки и оболочки // В кн.: Прочность, устойчивость, колебания/под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко, т. 2. М.: Машиностроение, 1968. С. 243–308.
4. *Куршин Л. М.* Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек // В сб.: Расчет пространственных конструкций, вып. 7. М.: Госстройиздат, 1962. С. 163–192.
5. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1976.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 17.XII.1990