

УДК 532.546.

© 1993 г. М. Г. ОДИШАРИЯ

## РАСЧЛЕНЕНИЕ УПРУГОГО МАТЕРИАЛА ГИДРОРАЗРЫВОМ

Рассматривается автомодельное решение задачи о гидрорасчленении упругой среды, отвечающее специальному случаю, когда горное давление в массиве отсутствует. Это приближение можно считать выполненным, например, при разрыве разгруженных угольных пластов, при разрыве пород вблизи свободной поверхности (под сооружениями, для создания противофильтрационных экранов) и др.

В основополагающих работах по теории гидроразрыва [1–3] задачи о распространении трещины решались в приближенной постановке методом интегральных соотношений. Предполагалось, что жидкость заполняет определенную часть трещины и горное давление преобладает над силами сцепления. При постоянстве расхода нагнетаемой жидкости, или постоянстве давления на забое скважины [4] была решена задача о дискообразной трещине (давление жидкости в трещине при определении ее раскрытия заменялось равномерно распределенным статически эквивалентным). Эта же задача рассматривалась в [5] в приближенной постановке: предполагалось, что жидкость полностью заполняет трещину, в результате давление в конце трещины имело логарифмическую особенность. Там же указан случай медленного нагнетания жидкости разрыва, когда гипотеза полного заполнения трещины не приводит к физическим противоречиям. В [6] в предположении малости расхода и скорости его изменения (что позволяет пренебречь динамическими эффектами и обеспечивает безынерционность течения) получено точное решение задачи о равновесном развитии прямолинейной трещины гидроразрыва в упругой плоскости.

Ряд автомодельных решений получен в [7, 8]. В [9] эти решения получены в предположении медленного нагнетания жидкости разрыва и отсутствия сил сцепления.

**1. Постановка задачи.** Рассматриваются плоская и осесимметричная задачи о гидроразрыве бесконечного упругого непроницаемого материала путем нагнетания в имеющиеся начальные трещины вязкой жидкости. Будем рассматривать квазистатическое распространение трещины на развитой стадии гидроразрыва, когда размер трещины  $R$  существенно больше радиуса скважины  $r_0$ , через которую происходит нагнетание жидкости ( $R \gg r_0$ ). Движение жидкости считается ламинарным и описывается уравнением неразрывности, осредненным по ее раскрытию  $2w$ . Поэтому давление жидкости в трещине  $p$  зависит лишь от координаты  $x$  и времени  $t$ . Скорость роста трещины и движения жидкости в ней малы по сравнению со скоростью распространения упругих волн. При этих предположениях

жидкость, движущаяся по трещине, обязательно отстает от ее концов. Координата фронта жидкости в трещине далее обозначается  $R_1 (R_1 < R)$ .

В такой постановке процесс распространения трещины под действием закачиваемой в нее жидкости описывается следующей системой уравнений (см., например, [9]):

$$w(x, t) = \frac{1}{c} \int_x^{R(t)} \frac{\zeta^{2-k} d\zeta}{(\zeta^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^{\zeta} \frac{p(\eta, t) \eta^{k-1} d\eta}{(\zeta^2 - \eta^2)^{1/2}}, \quad c = \pi E / 4(1 - \nu^2) \quad (1.1)$$

$$u(x, t) = -(w^2 / 3\mu) \partial p / \partial x \quad (0 \leq x \leq R_1); \quad p(x, t) = 0 \quad (R_1 \leq x \leq R) \quad (1.2)$$

$$q(x, t) = 4(\pi x)^{k-1} w u \quad (0 \leq x \leq R_1) \quad (1.3)$$

$$q(x, t) = dv/dt, \quad v(x, t) = 4\pi^{k-1} \int_x^{R_1(t)} \eta^{k-1} w(\eta, t) d\eta \quad (0 \leq x \leq R_1) \quad (1.4)$$

$$\int_0^{R(t)} p(x, t) (x/R)^{k-1} (R^2 - x^2)^{-1/2} dx = K / (2R)^{1/2}, \quad dR/dt \geq 0 \quad (1.5)$$

Здесь  $x$  — линейная ( $k=1$ ) или радиальная ( $k=2$ ) координаты,  $t$  — время,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $K$  — модуль сцепления горной породы, характеризующий ее трещиностойкость,  $\mu$  — вязкость жидкости,  $q$  — расход жидкости через фиксированное сечение трещины поверхностью, равноудаленной от ее середины  $x=0$ ,  $u$  — скорость движения жидкости в трещине,  $v$  — объем части трещины, заполненной жидкостью от сечения  $|x|=\text{const}$  до фронта жидкости в трещине  $|x|=R_1$ .

В системе (1.1) — (1.5) учтено, что горное давление отсутствует. Кроме того, анализ ограничивается случаем роста трещины. Режимы «надувания» трещины без ее распространения не рассматриваются. Это означает, что в каждый момент времени выполняется условие разрушения материала. Анализ показывает, что в такой постановке жидкость не может проникнуть в трещину вплоть до ее конца  $x=R$  [4]. Параметр  $\theta = R_1/R < 1$  характеризует глубину проникновения жидкости разрыва в трещину. Полное проникновение ( $\theta=1$ ) возможно только в предельном случае медленного нагнетания [5].

Соотношение (1.1) — решение плоской задачи теории упругости для трещины, находящейся под действием внутреннего давления  $p$ . Оно имеет физический смысл только тогда, когда раскрытие трещины всюду, кроме ее конца, положительно ( $2w > 0$ ) [10].

Формула Буссинеска (1.2) связывает скорость движения жидкости в узкой щели, осредненную по сечению, с градиентом давления. В области перед фронтом  $R_1 \leq |x| \leq R$  жидкость отсутствует, поэтому в ней  $p(x, t) = 0$ .

Соотношение (1.3) выражает расход жидкости  $q(x, t)$  в каждом сечении трещины  $|x|=\text{const}$  через раскрытие трещины и скорость движения жидкости в ней.

Уравнение (1.4) — это записанное в интегральной форме уравнение неразрывности, выражающее тот факт, что закачиваемая жидкость полностью заполняет каждое сечение трещины  $|x|=\text{const}$  вплоть до фронта проникновения  $|x|=R_1(t)$ .

Соотношение (1.5) представляет собой условие разрушения, означающее, что коэффициент интенсивности напряжений в концах трещины  $N$  достигает критического значения  $N_0 = K/\pi$  или что силы сцепления, возникающие в упругой среде вблизи концов трещины, уравновешиваются внутренним давлением жидкости в трещине [3]. В качестве начальных условий задачи необходимо задать лишь начальный размер трещины  $R(t) = R_0$  ( $t=0$ ).

**2. Переход к безразмерным переменным.** Обезразмерим систему (1.1) — (1.5), путем введения новых величин

$$X = x/R_1; \tau = t/t_0; t_0 = (3\mu/p_0)(c/p_0)^2; W(X, \tau) = cv(x, t)/p_0 R_1(t);$$

$$P(X, \tau) = p(x, t/p_0) \quad (2.1)$$

$$Q(X, \tau) = (3\mu q(x, t)/4p_0 \pi^{k-1} R_1^{k+1})(c/p_0)^2; L(\tau) = R/R_0; L_1 = R_1/R_0;$$

$$V(X, \tau) = cv(x, t)/4p_0 \pi^{k-1} R_1^{k+1}$$

Здесь  $p_0$  — характерное значение давления жидкости в трещине,  $t_0$  — параметр, имеющий размерность времени.

Подставляя (2.1) в систему (1.1) — (1.5), получим

$$W(X, \tau) = \int_X^\lambda \zeta^{2-k} (\zeta^2 - X^2)^{-1/2} d\zeta \int_0^\zeta P(\eta, \tau) \eta^{k-1} (\zeta^2 - \eta^2)^{-1/2} d\eta \quad (0 \leq X \leq \lambda) \quad (2.2)$$

$$\int_0^\lambda P(y, \tau) y^{k-1} (\lambda^2 - y^2)^{-1/2} dy = \lambda^{k-1} K/p_0 (2R)^{1/2} \quad (2.3)$$

$$P(X, \tau) = \int_X^1 Q(\zeta, \tau) \zeta^{1-k} W^{-3}(\zeta, \tau) d\zeta \quad (0 \leq X \leq 1) \quad (2.4)$$

$$Q(X, \tau) = \alpha(\tau) \left[ X^k W(X, \tau) + (k+1) \int_X^1 W(\zeta, \tau) \zeta^{k-1} d\zeta \right] + \int_X^1 (\partial W / \partial \tau) \zeta^{k-1} d\zeta$$

$$(0 \leq X \leq 1) \quad (2.5)$$

$$P(X, \tau) = 0 \quad (1 \leq X \leq \lambda) \quad (2.6)$$

Начальные условия при  $\tau=0$  имеют вид  $L(\tau)=1$ . Величины  $\lambda$  и  $\alpha$  определены соотношениями

$$\lambda = L/L_1 = R/R_1, \quad \alpha = L^{-1} dL/d\tau = d \ln L/d\tau \quad (2.7)$$

**3. Автомодельное решение.** Система (2.1) — (2.6) имеет автомодельное решение вида

$$P(X, \tau) = P_*(X) L^{-1/2}(\tau), \quad W(X, \tau) = W_*(X) L^{-1/2}(\tau), \quad Q(X, \tau) = Q_*(X) h L^{-2}(\tau) \quad (3.1)$$

$$\lambda = L/L_1 = \text{const}, \quad h = \alpha L^{3/2} = \text{const} \quad (3.2)$$

Учитывая (3.1), (3.2), из (2.2) — (2.6), для определения  $P_*$ ,  $W_*$ ,  $Q_*$  и постоянной  $h$  получаем систему четырех уравнений

$$W_*(X) = \int_X^\lambda \zeta^{2-k} (\zeta^2 - X^2)^{-1/2} d\zeta \int_0^\zeta P_*(\eta) \eta^{k-1} (\zeta^2 - \eta^2)^{-1/2} d\eta \quad (0 \leq X \leq \lambda) \quad (3.3)$$

$$Q_*(X) = X^k W_*(X) + (k+0.5) \int_X^1 W_*(\zeta) \zeta^{k-1} d\zeta \quad (0 \leq X \leq 1) \quad (3.4)$$

$$P_*(X) = h \int_X^1 Q_*(\zeta) \zeta^{1-k} W_*^{-3}(\zeta) d\zeta \quad (0 \leq X \leq 1) \quad (3.5)$$

$$h = \lambda^{k-1} \kappa \int_0^1 P_*(y) y^{k-1} (\lambda^2 - y^2)^{-1/2} dy, \quad \kappa = K/p_0 (2R_0)^{1/2} \quad (3.6)$$

Ее решение должно удовлетворять условию непрерывности распреде-

ления давления в трещине (2.6), из которого имеем

$$P_*(X) = 0, \quad (1 \leq X \leq \lambda) \quad (3.7)$$

Уравнение (3.2) с учетом (2.7) дает закон распространения трещины, в котором неизвестная постоянная  $h$  подлежит определению

$$L^{3/2}(\tau) = 1 + 3h\tau/2 \quad (3.8)$$

Указанное выше автомодельное решение отвечает специальным режимам нагнетания жидкости в трещину. В самом деле, используя (3.1), с учетом (3.8) получаем выражения для давления и расхода закачиваемой в трещину жидкости

$$\begin{aligned} P^0(\tau) &= P(0, \tau) = P_*(0) L^{-1/2}(\tau) = P_*(0) / (1 + 3h\tau/2)^{1/2} \\ Q^0(\tau) &= Q(0, \tau) = Q_*(0) h L^{-2}(\tau) = h Q_*(0) / (1 + 3h\tau/2)^{3/2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь следует отметить, что в случае дискообразной трещины ( $k=2$ ) давление имеет логарифмическую особенность при  $X=0$ . Поэтому вычисление давления по формуле (3.5) осуществлялось с выделением этой особенности

$$\begin{aligned} P_*(X) &= h(A - B \ln X), \quad A = \int_X^1 [Q_*(\eta)/W_*^3(\eta) - B] \eta^{-1} d\eta, \\ B &= Q_*(0)/W_*^3(0) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Таким образом, в соответствии с (3.10) первое соотношение (3.9) в случае дискообразной трещины теряет смысл. Под давлением нагнетания в этом случае следует понимать давление на границе скважины  $x=x_c$ , которой отвечает безразмерная координата  $X_c(\tau) = x_c/R_1(\tau)$ . Режим нагнетания при  $k=2$  следует задавать через расход закачиваемой жидкости.

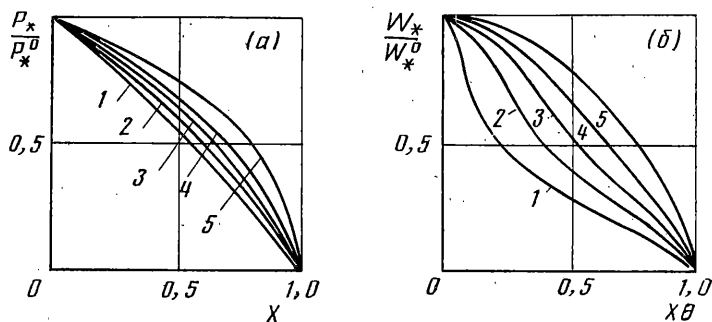
Параметр  $\lambda$ , определенный в (3.2) и характеризующий глубину проникновения в трещину жидкости разрыва, неизвестен. Задание этого параметра, как можно убедиться, равносильно заданию значений  $P_*(0)$  и  $Q_*(0)$  для  $P^0(\tau)$  и  $Q^0(\tau)$ , т. е. равносильно заданию режима нагнетания.

Итак, автомодельное решение задачи оказывается зависящим от двух параметров: физического параметра  $\kappa$  из (3.6), характеризующего прочность среды, и технологического параметра  $\lambda$  (или  $\theta$ ), связанного с режимом нагнетания жидкости в трещину.

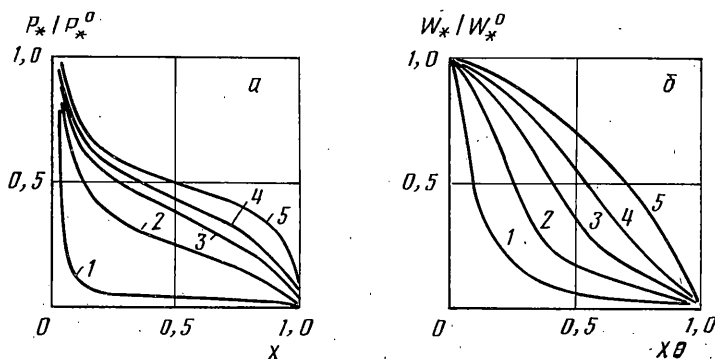
**4. Решение системы (3.3) — (3.10).** Эта система относительно  $W_*(X)$ ,  $P_*(X)$ ,  $Q_*(X)$  и  $h$  решалась методом последовательных приближений. Итерации начинались с задания  $P_*(X)$ . Выбор начального приближения для  $P_*(X)$  осуществлялся достаточно произвольно, в частности использовались постоянное и линейное распределения  $P_* = 1$  или  $P_*(X) = 1 - X$  при  $0 \leq X \leq 1$ . Затем вычислялись  $W_*(X)$ ,  $Q_*(X)$  и  $h$ , соответственно, по формулам (3.3), (3.4) и (3.6). Далее с помощью (3.5) и нового значения  $h$  уточнялось  $P_*(X)$  и итерации повторялись до сходимости результатов. Обычно, для достижения относительной точности порядка 0.001 требовалось 3–5 итераций, что на ЭВМ ЕС-1045 занимало 15 минут.

**5. Расчеты параметров автомодельных решений.** Автомодельное решение, как было сказано выше, зависит от двух параметров — безразмерного комплекса  $\kappa$  и относительной глубины проникновения жидкости в трещину  $\theta = \lambda^{-1}$ .

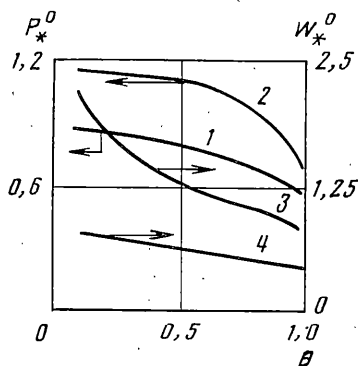
На фиг. 1 и 2 для  $\kappa = 0,05$  показаны распределения безразмерного давления жидкости в трещине (а) и безразмерного раскрытия трещины (б) для двух случаев: вертикальной трещины Желтова — Христианови-



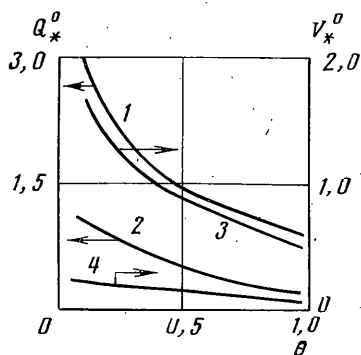
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ча (фиг. 1,  $k=1$ ) и дискообразной трещины (фиг. 2,  $k=2$ ). Раскрытие нормировано на раскрытие в середине трещины  $W_*^0$ . Давление при  $k=1$  нормировано на давление нагнетания на скважине  $P_*^0$ . В случае дискообразной трещины ( $k=2$ ), давление  $P_*(X)$  имеет логарифмическую особенность при  $X=0$  (в месте расположения скважины), и поэтому распределение  $P_*(X)$  нормировалось на  $P_*(X_c)$ , где  $X_c = \text{const} \ll 1$  (в данном случае было  $X_c = 0,03$ ).

Кривые 1-5 отвечают значениям параметра  $\theta = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7$  и  $0,9$ . Величины  $P_*^0, W_*^0, Q_*^0$  и  $V_*^0$  для случаев  $k=1$  (кривые 1, 3) и  $k=2$  (кривые 2, 4) приведены на фиг. 3 и 4. Безразмерный объем трещины  $V_*^0$  определялся из (1.4) при  $X=0$  после перехода к безразмерной пе-

ременной  $V(X, \tau)$  по (2.1) с использованием (3.1), что дает

$$V^0(\tau) = V_*^0 L^{-2}(\tau), V_*^0 = \int_0^1 \eta^{k-1} W_*(\eta) d\eta \quad (5.1)$$

В случае дискообразной трещины ( $k=2$ ) раскрытие  $W_*^0$ , расход  $Q_*^0$  и объем трещины  $V_*^0$  с изменением глубины проникновения жидкости в трещину  $\theta$  меняются значительно слабее, чем в случае плоской вертикальной трещины ( $k=1$ ). Ниже приведены результаты расчета константы  $h$  для различных случаев заполнения трещины жидкостью разрыва:

$\theta$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,98
$h(k=1)$	2,924	1,409	0,848	0,511	0,245	0,115
$h(k=2)$	0,122	0,097	0,076	0,054	0,028	0,013

**6. Примеры расчетов процесса гидроразрыва.** Найденное автомодельное решение можно использовать для расчета реальных параметров гидроразрыва. Для этого воспользуемся формулами (2.1), (3.1), (3.8), (5.1) и выразим размерные переменные через автомодельные безразмерные величины

$$p(x, t) = p_0 P_*(X) (1 + 1,5h\tau)^{-1/2},$$

$$v(x, t) = 4p_0 \pi^{k-1} V_*(X) c^{-1} (\theta R_0)^{k+1} (1 + 1,5h\tau)^{(2k+1)/3}$$

$$q(x, t) = 4p_0 \pi^{k-1} h Q_*(X) (p_0/c)^3 (\theta R_0)^{k+1} (1 + 1,5h\tau)^{(2k-2)/3} / 3\mu$$

$$w(x, t) = p_0 \theta R_0 c^{-1} W_*(X) (1 + 1,5h\tau)^{1/2}, R(t) = R_0 (1 + 1,5h\tau)^{2/3}$$

$$R_1(t) = \theta R(t), t = 3\mu\tau (c/p_0)^2 / p_0$$

Таким автомодельным решениям отвечает режим нагнетания с постоянным расходом в случае линейной трещины ( $k=1$ ) и с расходом, растущим по времени как  $t^{2/3}$  для дискообразной трещины ( $k=2$ ). При этом объем в первом случае растет линейно со временем, а во втором — как  $t^{3/2}$ .

Оценим переменные гидроразрыва для следующих конкретных данных:  $R_0=0,5$  м,  $r_c=3$  мм,  $\mu=0,001$  Па·с,  $E=5,1 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu=0,25$ ,  $k=1$  МПа·м<sup>1/2</sup>. Для этого зададимся, например, значениям  $\theta=0,9$  при  $\kappa=0,05$ . Тогда  $p_0=20$  МПа,  $c=4,27 \cdot 10^4$  МПа.

В случае плоской трещины ( $k=1$ ) в начальный момент времени ( $t=0$ ) будем иметь:  $h=0,245$ ,  $p=12$  МПа,  $v=2,6 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>,  $w=0,2$  мм,  $q=0,136$  м<sup>3</sup>с<sup>-1</sup>,  $R=0,5$  м,  $R_1=0,45$  м. Через  $t=1,86$  с физические параметры трещины гидроразрыва примут следующие значения:  $R=50$  м,  $R_1=45$  м,  $p=1,2$  МПа,  $w=2$  мм,  $v=0,25$  м<sup>3</sup>,  $q=0,136$  м<sup>3</sup>с<sup>-1</sup>.

Аналогичные расчеты в случае дискообразной трещины ( $k=2$ ) дают следующие значения физических величин: а) при  $t=0$ ,  $h=0,028$ ,  $p=18$  МПа,  $v=0,643 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>,  $w=0,1$  мм,  $q=0,008$  м<sup>3</sup>с<sup>-1</sup>,  $R=0,5$  м,  $R_1=0,45$  м; б) при  $t=16$  с,  $p=1,8$  МПа,  $v=6,43$  м<sup>3</sup>,  $q=0,8$  м<sup>3</sup>с<sup>-1</sup>,  $w=1$  мм,  $R=50$  м,  $R_1=45$  м.

Таким образом по полученным графикам и результатам, приведенным в п. 5, можно, аналогично вышеприведенному примеру, вычислять все интересующие физические характеристики для различных случаев заполнения трещины жидкостью разрыва как для плоской трещины, так и для дискообразной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 5. С. 3–41.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 475–486.
3. Желтов Ю. В., Желтов Ю. П. О распространении горизонтальной трещины в горной породе под воздействием нефилтрирующей жидкости в случае горного давления // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 5. С. 166–169.
4. Abe H., Mura T., Keer L. M. Growth rate of a pennyshaped crack in hydraulic fracturing of rocks // J. Geophys. Res. 1976. V. 81. No. 29. P. 5335–5340.
5. Зазовский А. Ф. Распространение круговой трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 103–109.
6. Алексеевко О. П., Вайсман А. М. Прямолинейный гидроразрыв в упругой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 145–149.
7. Nilson R. H. An integral method for predicting hydraulic fracture propagation driven by gases or liquids // Intern. Numerical and Analit. Methods in Geomech. 1986. V. 10. No 2. P. 191–211.
8. Гордеев Ю. П., Кудрявцев П. А. Деформация и развитие магистральной трещины при движении в ней газа. М.: МИФИ, 1985. 20 с. Препринт.
9. Зазовский А. Ф., Одишария М. Г., Песляк Ю. А. Автомодельные решения задачи о распространении трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 92–100.
10. England A. H., Green A. E. Some two – dimensional punch and crack problems in classical elasticity // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1963. V. 59. No 2. P. 489–500.

Тбилиси

Поступила в редакцию  
19.VI.1990