

УДК 539.375

© 1993 г. Ю. А. АНТИПОВ

О ПРИРАЩЕНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ТРЕЩИНЫ ЧЕРЕЗ ЛИНИЮ РАЗДЕЛА СРЕД

Найдено асимптотическое представление для приращения потенциальной энергии деформации при переходе трещины нормального отрыва через линию раздела сред с различными упругими свойствами, тем самым построен аналог известной формулы Гриффитса [1] для случая составных сред. Указанное представление построено на основе найденных в квадратурах решений двух задач о полубесконечной трещине: пересекающей под прямым углом линию раздела сред и не доходящей до этой линии, а также двух решений задачи о полубесконечной трещине, выходящей на линию раздела сред: «энергетического» и специальным образом нормированного «неэнергетического». Основопологающим при выводе послужило асимптотическое представление для потенциальной энергии в случае области, близкой в некоторой точке к углу, которое построено в [2] в терминах специальных (не найденных в явном виде) констант, характеризующих изменение формы границы. В настоящей работе указанные константы для случая трещины в составной среде выписаны явно.

1. Трещина, выходящая на линию раздела сред. Пусть Π — разрезанная вдоль луча $\{0 < r < \infty; \theta = +0, \theta = 2\pi - 0\}$ составная плоскость (при $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ коэффициент Пуассона — ν_1 , модуль упругости — E_1 , а при $0 < \theta < \pi/2$ или $3\pi/2 < \theta < 2\pi$ соответствующие упругие постоянные — ν_2, E_2). Рассмотрим однородную задачу о плоской деформации плоскости Π . Учитывая симметрию задачи, решение будем строить для полуплоскости $\Pi_+ = \{0 < r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Граничные условия имеют вид $\{0 < r < \infty\}$:

$$\sigma_\theta|_{\theta=0} = \tau_{r\theta}|_{\theta=0} = 0, \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=\pi} = u_\theta|_{\theta=\pi} = 0$$

$$\|u_r, u_\theta, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}\|_{\theta=\pi/2-0} = \|u_r, u_\theta, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}\|_{\theta=\pi/2+0}$$

Полагая

$$\|\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}\| = Cr^{-s-1} \|\sigma_r^s(\theta), \sigma_\theta^s(\theta), \tau_{r\theta}^s(\theta)\|$$

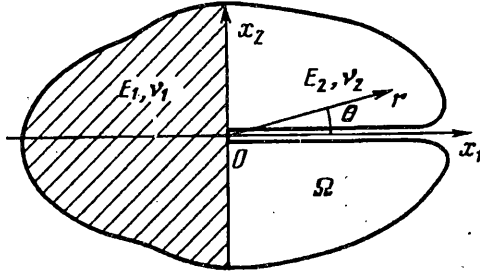
$$\|u_r, u_\theta\| = Cr^{-s} \|u_r^s(\theta), u_\theta^s(\theta)\|, \quad C = \text{const}$$

подставляем эти соотношения в уравнения статики, сплошности и физические уравнения. В результате в случае, если s — корень уравнения $\delta_+^o(s) = 0$, где

$$\delta_+^o(s) = (3 - \nu_0 + \mu) [(1 + \nu_0 + 3\mu) \sin^2 1/2\pi s - (1 + \nu_0 - \mu) s^2] - 4\mu (\mu + 1)$$

$$\nu_0 = \nu_1(1 - \nu_1)^{-1} - \mu\nu_2(1 - \nu_2)^{-1}, \quad \mu = [E_2(1 - \nu_2^2)]^{-1} E_1(1 - \nu_2^2) \quad (1.1)$$

¹ Мазья В. Г., Морозов Н. Ф., Назаров С. А. Об изменении потенциальной энергии деформации при вариации области вблизи углового концентратора напряжений // Ленинградский филиал Ин-та машиноведения им. А. А. Благонравова АН СССР. Препринт № 4. Л., 1989. 31 с.



Фиг. 1

то задача имеет нетривиальное решение. При $0 \leq \theta \leq \pi/2$ получаем формулы

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta}^{\pm} &= (s-1) \omega_1 (c_{\theta}^+ - c_{\theta}^-) + \omega_2 [(s-1) s_{\theta}^+ - (s+1) s_{\theta}^-] \\
 \sigma_r^{\pm} &= \omega_1 [-(s+3) c_{\theta}^+ + (s-1) c_{\theta}^-] + \omega_2 [-(s+3) s_{\theta}^+ + (s+1) s_{\theta}^-] \\
 \tau_{\theta}^{\pm} &= \omega_1 [-(s+1) s_{\theta}^+ + (s-1) s_{\theta}^-] + (s+1) \omega_2 (c_{\theta}^+ - c_{\theta}^-) \\
 \lambda_2^{-1} E_2 s u_{\theta}^{\pm} &= \omega_1 [(s - \varkappa_2) s_{\theta}^+ - (s-1) s_{\theta}^-] - \omega_2 [(s - \varkappa_2) c_{\theta}^+ - (s+1) c_{\theta}^-] \\
 \lambda_2^{-1} E_2 s u_r^{\pm} &= \omega_1 [(s + \varkappa_2) c_{\theta}^+ - (s-1) c_{\theta}^-] + \omega_2 [(s + \varkappa_2) s_{\theta}^+ - (s+1) s_{\theta}^-] \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Если $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, то имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta}^{\pm} &= (s-1) \omega_3 d_1^+ + \omega_4 d_1^-, \quad \sigma_r^{\pm} = -(s+3) \omega_3 d_1^+ - \omega_4 d_1^- \\
 \tau_{\theta}^{\pm} &= -(s+1) \omega_3 d_2^+ - \omega_4 d_2^-, \quad \lambda_1^{-1} E_1 s u_{\theta}^{\pm} = (s - \varkappa_1) \omega_3 d_2^+ + \omega_4 d_2^- \\
 \lambda_1^{-1} E_1 s u_r^{\pm} &= (s + \varkappa_1) \omega_3 d_1^+ + \omega_4 d_1^- \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

В формулах (1.2) и (1.3) приняты обозначения

$$\begin{aligned}
 \lambda_j &= 1 + \nu_j, \quad \varkappa_j = 3 - 4\nu_j, \quad d_1^{\pm} = \operatorname{ctg} \pi s c_{\theta}^{\pm} + s_{\theta}^{\pm} \\
 d_2^{\pm} &= \operatorname{ctg} \pi s s_{\theta}^{\pm} - c_{\theta}^{\pm}, \quad c_{\theta}^{\pm} = \cos (s \pm 1) \theta, \quad s_{\theta}^{\pm} = \sin (s \pm 1) \theta \\
 \omega_1 &= -\operatorname{cosec} \pi s [(\mu_0^+ s + \mu_1^-) \sin^2 \frac{1}{2} \pi s - 2s], \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \mu_0^+ s - \mu - 1 \\
 \omega_3 &= -\mu_2 \sin^2 \frac{1}{2} \pi s + \mu_1^+ s^2 + 2s\mu \\
 \omega_4 &= (-\mu_2 s + \mu_0^+) \sin^2 \frac{1}{2} \pi s + \mu_1^+ s^3 + \mu_0^- s^2 + 2s\mu \\
 \mu_0^{\pm} &= \mu \pm (3 - \nu_0), \quad \mu_1^{\pm} = 1 - \mu \pm \nu_0, \quad \mu_2 = 1 + 3\mu + \nu_0
 \end{aligned}$$

Пусть Ω — область плоскости Π , симметричная относительно оси Ox_1 , ограниченная контуром $\partial\Omega$, гладким всюду за исключением вершины разреза точки O (фиг. 1), такая, что круг достаточно большого радиуса с центром в точке O , разрезанный по лучу $x_1 > 0, x_2 = 0$ и составленный из упругих материалов с постоянными ν_1, E_1 ($x_1 < 0$) и ν_2, E_2 ($x_1 > 0$), целиком содержится в Ω .

Рассмотрим задачу Ω_0 о плоской деформации

$$\begin{aligned}
 \Delta v(x) + (1 - 2\nu)^{-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} v(x) &= 0, \quad x \in \Omega \setminus 0 \\
 \sigma_{1n}(v; x) &= p(x), \quad \sigma_{2n}(v; x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus 0 \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

где $v = \|v_1, v_2\|$ — вектор смещений, $n = \|n_1, n_2\|$ — внешняя нормаль, $\sigma_{jn} = \sigma_{j1} n_1 + \sigma_{j2} n_2$, σ_{jk} — компоненты тензора напряжений, построенного по полю

смещений v , $v = v_1$, если $x_1 < 0$ и $v = v_2$ при $x_1 > 0$, $\text{supp } p(x) \subset I_0$, I_0 — часть контура $\partial\Omega$, совпадающая с разрезом $\{x_1 > 0, x_2 = \pm 0\}$.

Пусть функция $p(x)$ — гладкая на контуре I_0 вплоть до точки O , и главный вектор внешней нагрузки равен нулю

$$\int_{\partial\Omega} p(x) d\partial\Omega = 0$$

тогда существует ограниченное (энергетическое) решение v задачи (1.4).

Обозначим через Λ корень уравнения $\delta_+^*(s) = 0$, лежащий в полосе $0 < \text{Re}(s) < 1$ (заметим, что при всех допустимых значениях параметров E_1, E_2, ν_1 и ν_2 этот корень существует, единственен и вещественен). Тогда на основании формул (1.2) и (1.3) асимптотика вектора смещений $v = \|v_r, v_\theta\|$ и определяемых по нему компонент тензора напряжений, записанных в полярных координатах, имеет вид

$$\begin{aligned} \|v_r, v_\theta\| (r, \theta) &\sim K_I r^\Lambda \|v_r^*, v_\theta^*\| (\theta) \\ \|\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}\| (r, \theta) &\sim K_I r^{\Lambda-1} \|\sigma_r^*, \sigma_\theta^*, \tau_{r\theta}^*\| (\theta), \quad r \rightarrow 0 \\ \|v_r^*, v_\theta^*\| (\theta) &= (2\pi)^{\Lambda-1} d^{-1} \|u_r^{-\Lambda}, u_\theta^{-\Lambda}\| (\theta) \\ \|\sigma_r^*, \sigma_\theta^*, \tau_{r\theta}^*\| (\theta) &= (2\pi)^{\Lambda-1} d^{-1} \|\sigma_r^{-\Lambda}, \sigma_\theta^{-\Lambda}, \tau_{r\theta}^{-\Lambda}\| (\theta) \\ d &= \text{cosec } \pi\Lambda \{[(2\Lambda + 1)\mu_2 + \mu_0^+] \sin^2 \frac{1}{2}\pi\Lambda - 2\Lambda^3\mu_1^+ + 4\Lambda^2(\mu - 1)\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

K_I — коэффициент интенсивности напряжений

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{1-\Lambda} \sigma_\theta (r, \pi)$$

вычисляемый по формуле [3]:

$$K_I = \int_{\partial\Omega} \zeta_1(x) p(x) d\partial\Omega \quad (1.6)$$

где $\zeta_1(x)$ — компонента вектора смещений $\zeta(x) = \|\zeta_1, \zeta_2\|$ — «неэнергетического» решения однородной задачи

$$\Delta \zeta(x) + (1 - 2\nu)^{-1} \text{grad div } \zeta(x) = 0, \quad x \in \Omega \setminus 0$$

$$\sigma_{1n}(\zeta; x) = \sigma_{2n}(\zeta; x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus 0$$

обладающего следующей асимптотикой

$$\zeta = r^{-\Lambda} \zeta^*(\theta) + z(r, \theta); \quad z = O(r^\Lambda), \quad r \rightarrow 0$$

$$\zeta^*(\theta) = \|\zeta_r^*, \zeta_\theta^*\| (\theta) = \gamma (2\pi)^{-\Lambda} \|u_r^\Lambda(\theta), u_\theta^\Lambda(\theta)\| \quad (1.7)$$

Функции $u_r^\Lambda, u_\theta^\Lambda$ определены в (1.2) и (1.3) ($s = \Lambda$). Вектор смещений $z = \|z_r, z_\theta\|$ — решение задачи (1.4) с граничными условиями

$$\sigma_{1n}(z; x) = -\sigma_{1n}^\circ(x), \quad \sigma_{2n}(z; x) = -\sigma_{2n}^\circ(x), \quad x \in \partial\Omega \setminus 0$$

где $\sigma_{jn}^\circ(x)$ — компоненты тензора напряжений, определяемые по смещениям $r^{-\Lambda} \zeta^*(\theta)$ и имеющие вид (полярная система координат):

$$\|\sigma_r^\circ, \sigma_\theta^\circ, \tau_{r\theta}^\circ\| (r, \theta) = r^{-\Lambda-1} \|\sigma_r^{\circ*}, \sigma_\theta^{\circ*}, \tau_{r\theta}^{\circ*}\| (\theta)$$

$$\|\sigma_r^{\circ*}, \sigma_\theta^{\circ*}, \tau_{r\theta}^{\circ*}\| (\theta) = \gamma (2\pi)^{-\Lambda} \|\sigma_r^\Lambda, \sigma_\theta^\Lambda, \tau_{r\theta}^\Lambda\| (\theta) \quad (1.8)$$

Нормирующий множитель γ , фигурирующий в соотношениях (1.7) и (1.8), выбирается так, чтобы выполнялось равенство [3, 2, 7]:

$$2 \int_0^\pi [\xi_r^*(\theta) \sigma_r^*(\theta) + \xi_\theta^*(\theta) \tau_{r\theta}^*(\theta) - \nu_r^*(\theta) \sigma_r^*(\theta) - \nu_\theta^*(\theta) \tau_{r\theta}^*(\theta)] d\theta = 1$$

откуда следует

$$\gamma = \pi d \left\{ \int_0^\pi (u_r^\wedge \sigma_r^{-\wedge} + u_\theta^\wedge \tau_{r\theta}^{-\wedge} - u_r^{-\wedge} \sigma_r^\wedge - u_\theta^{-\wedge} \tau_{r\theta}^\wedge) d\theta \right\}^{-1} \quad (1.9)$$

2. Трещина, пересекающая линию раздела сред. Пусть E_1, ν_1 (E_2, ν_2) — модуль упругости и коэффициент Пуассона полуплоскости $\Pi_- = \{x_1 < 0, |x_2| < \infty\}$ ($\Pi_+ = \{x_1 > 0, |x_2| < \infty\}$). Области Π_+, Π_- полностью сцеплены. Линию раздела сред под прямым углом пересекает разрез $I_\varepsilon^+ = \{-\varepsilon < x_1 < \infty, x_2 = \pm 0\}$. Рассмотрим задачу T_ε^+ о плоской деформации

$$\begin{aligned} \Delta v + (1 - 2\nu)^{-1} \text{grad div } v &= 0, \quad x \in \Pi_+ \cup \Pi_- \setminus I_\varepsilon^+ \\ \sigma_{22} |_{x_2=\pm 0} &= p(x_1), \quad \sigma_{12} |_{x_2=\pm 0} = 0, \quad -\varepsilon < x_1 < \infty \\ \|v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}\|_{x_1=-0} &= \|v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}\|_{x_1=+0}, \quad |x_2| < \infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

здесь $v = \|v_1, v_2\|$ — вектор смещений, $\nu = \nu_1$ при $x_1 < 0$ и $\nu = \nu_2$ при $x_1 > 0$.

Заметим, что для частного случая нагрузки при помощи другого подхода сформулированная задача решалась в [4]. Однако комплекснозначность формул, определяющих решение, затрудняет их анализ с целью получения удобного асимптотического представления для приращения потенциальной энергии.

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(x_1) = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\left. \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right|_{x_2=-0} - \left. \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right|_{x_2=+0} \right] \quad (2.2)$$

где $E = E_1$ при $x_1 < 0$ и $E = E_2$ при $x_1 > 0$, причем $\text{supp } \varphi(x_1) \subset [-\varepsilon, \infty)$. При помощи обобщенной схемы метода интегральных преобразований [5] задача (2.1) сводится к системе двух сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_+(\eta, \xi) \varphi_0(\xi) d\xi + \int_0^1 S_-(\eta, \xi) \varphi_1(\xi) d\xi &= p_0(\eta) \quad (0 < \eta < \infty) \\ \int_0^\infty S_+(\eta, \xi) \varphi_0(\xi) d\xi + \int_0^1 J_-(\eta, \xi) \varphi_1(\xi) d\xi &= p_1(\eta) \quad (0 < \eta < 1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

относительно функций $\varphi_0(\xi) = \varphi(\varepsilon\xi)$, $\varphi_1(\xi) = -\varphi(-\varepsilon\xi)$, причем

$$J_\pm(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\xi - \eta} + \frac{p_1^\pm \xi^2 + p_2^\pm \xi \eta + p_3^\pm \eta^2}{(\xi + \eta)^3} \right] \quad (2.4)$$

$$S_\pm(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi} \frac{q_1^\pm \xi + q_2^\pm \eta}{(\xi + \eta)^2}, \quad p_1(\eta) = -4p((-1)^j \varepsilon \eta) \quad (j = 0, 1)$$

$$p_1^\pm = \delta_0^{-1} [\pm \nu_0 (\pm \nu_0 - 2\mu^\pm - 6\mu^\mp) - 3(1 - \mu^\pm)^2]$$

$$p_2^\pm = 4\delta_0^{-1} [\pm \nu_0 (\mp \nu_0 + 2\mu^\pm) \pm 3(1 - \mu^\pm)^2]$$

$$p_3^\pm = \delta_0^{-1} [-(\nu_0 + \mu - 1)^2 \pm 4(1 - \mu^2)]$$

$$q_1^\pm = 8\delta_0^{-1}\mu^\mp (\pm\nu_0 + 2\mu^\mp), \quad q_2^\pm = 8\delta_0^{-1}\mu^\mp (1 + \mu)$$

$$\delta_0 = \mu_0^+\mu_2, \quad \mu^+ = 1, \quad \mu^- = \mu$$

ν_0, μ определены в (1.1), решение системы (2.3) ищется в следующих пространствах:

$$\varphi_0(\xi) \in H_1^*(0, \infty), \quad \varphi_1(\xi) \in H_1^*(0, 1)$$

где $H_1^*(a, b)$ — множество гельдеровских на отрезке (a, b) функций, имеющих интегрируемые особенности на концах a, b . Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_0(s) = \int_0^\infty \varphi_0(\xi) \xi^s d\xi, \quad \Phi_1^-(s) = \int_0^1 \varphi_1(\xi) \xi^s d\xi$$

$$\Phi_1^+(s) = \int_1^\infty [-4\sigma_{22}(-\varepsilon\xi, 0)] \xi^s d\xi, \quad P_0(s) = \int_0^\infty p_0(\xi) \xi^s d\xi,$$

$$P_1^-(s) = \int_0^1 p_1(\xi) \xi^s d\xi$$

Функция $\Phi_0(s)$ аналитична в полосе $\delta - 1 < \text{Re}(s) < 0$, $\Phi_1^-(s)$ — при $\text{Re}(s) > \delta - 1$ ($0 < \delta < 1$), а $\Phi_1^+(s)$ — $\text{Re}(s) < 0$. Функции $P_0(s)$ и $P_1^-(s)$ аналитичны соответственно в областях $-1 < \text{Re}(s) < 0$ и $\text{Re}(s) > -1$. При помощи преобразования Меллина систему интегральных уравнений (2.3) приводим к системе двух функциональных. Выражая из первого уравнения функцию $\Phi_0(s)$ и подставляя ее во второе уравнение, получаем следующее краевое условие задачи Римана

$$\Phi_1^+(t) = G(t) \Phi_1^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma: \text{Re}(t) = \gamma_0 \in (\delta - 1, 0) \quad (2.5)$$

$$G(s) = G_-(s) - [G_+(s)]^{-1} H_-(s) H_+(s)$$

$$g(s) = [G_+(s)]^{-1} H_+(s) P_0(s) - P_1^-(s), \quad G_\pm(s) = \text{cosec } \pi s \delta_\pm(s) \quad (2.6)$$

$$H_\pm(s) = \text{cosec } \pi s (-q_2^\pm + q_3^\pm s), \quad \delta_\pm(s) = \cos \pi s + p_4^\pm s^2 - p_3^\pm$$

$$p_4^\pm = \pm 2\delta_0^{-1}\mu_1^\pm (\pm\nu_0 + \mu^\mp + 3\mu^\pm), \quad q_3^\pm = \mp 8\delta_0^{-1}\mu^\mp \mu_1^\mp$$

Заметим, что функция $\delta_+^\circ(s)$, определенная в (1.1) и функция $\delta_+(s)$ имеют одни и те же корни. Представляя функцию $G(s)$ в виде $G(s) = -\text{tg } \pi s G_0(s)$ и учитывая следующие свойства функции $G_0(s)$:

$$G_0(i\tau) \rightarrow 1, \quad \tau \rightarrow \pm \infty$$

$$G_0(0) = [2\mu(\mu + 1)]^{-1} [(1 + \mu)^2 - 4\pi^{-2} (1 - \mu)^2] > 0$$

$$G_0(i\tau) \in C[0, \infty),$$

$$G_0(i\tau) = G_0(-i\tau)$$

получаем $\text{ind } G_0(i\tau) = 0$ ($|\tau| < \infty$) и факторизацию функции $G(t)$ в виде

$$G(t) = K^+(t) X^+(t) [K^-(t) X^-(t)]^{-1}, \quad t \in \Gamma \quad (2.7)$$

$$K^+(s) = \Gamma(1/2 - s) [\Gamma(-s)]^{-1}, \quad K^-(s) = \Gamma(1 + s) [\Gamma(1/2 + s)]^{-1}$$

$$X(s) = \exp \left(-\frac{s}{\pi} \int_0^\infty \ln G_0(i\tau) \frac{d\tau}{\tau^2 + s^2} \right) \quad (s \neq 0)$$

$$G_0(i\tau) = \text{cth } \pi\tau \text{ csch } \pi\tau [\text{ch } \pi\tau - p_4^- \tau^2 - p_3^- + (q_3^+ q_3^- \tau^2 - q_2^+ q_2^-) \times$$

$$\times (\operatorname{ch} \pi \tau - p_4^+ \tau^2 - p_3^+)^{-1} = 1 - 2p_4^- \tau^2 e^{-\pi \tau} + O(e^{-\pi \tau}), \quad \tau \rightarrow +\infty$$

Последующая подстановка соотношения (2.7) в равенство (2.5), использование принципа непрерывности и теоремы Лиувилля приводят к следующим формулам для решения задачи (2.5):

$$\Phi_1^\pm(s) = K^\pm(s) X^\pm(s) \Psi^\pm(s), \quad s \in D^\pm: \operatorname{Re}(s) \leq \gamma_0 \quad (2.8)$$

$$\Psi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{K^+(t) X^+(t)} \frac{dt}{t-s}, \quad \Phi_0(s) = \frac{P_0(s) - H_-(s) \Phi_1^-(s)}{G_+(s)}$$

Сопоставляя выражение (2.8) для $\Phi_1^-(s)$ со вторым уравнением (2.3), при помощи теоремы абелева типа находим формулу для КИН

$$K_I^+ = \lim_{x_1 \rightarrow -\varepsilon - 0} [2\pi(-x_1 - \varepsilon)]^{1/2} \sigma_{22}(x_1, 0) = 1/2 (1/2\varepsilon)^{1/2} \Psi_0$$

$$\Psi_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t) dt}{K^+(t) X^+(t)}$$

Решение системы интегральных уравнений (2.3) имеет вид

$$\varphi_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\delta_-(s) P_0(s) - m_-(s) [\Phi_1^+(s) + P_1^-(s)]}{\operatorname{cosec} \pi s \delta(s) \xi^{s+1}} ds, \quad 0 < \xi < 1$$

$$\varphi_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sin \pi s P_0(s) - m_-(s) \Phi_1^-(s)}{\delta_+(s) \xi^{s+1}} ds, \quad 1 < \xi < \infty$$

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\delta_+(s) [\Phi_1^+(s) + P_1^-(s)] - m_+(s) P_0(s)}{\operatorname{cosec} \pi s \delta(s) \xi^{s+1}} ds, \quad 0 < \xi < 1 \quad (2.9)$$

$$m_{\pm}(s) = q_3^{\pm} s - q_2^{\pm}, \quad \delta(s) = \delta_+(s) \delta_-(s) - q_3^+ q_3^- s^2 - q_2^+ q_2^-$$

Обозначим $\alpha = \max \{\operatorname{Re}(s_0^+), \operatorname{Re}(s_1^+), -\Lambda_+\}$, $\beta = \min \{\operatorname{Re}(s_0^-), \Lambda\}$, где s_0^+ , s_1^+ , $-\Lambda_+$, (s_0^-, Λ) — корни соответственно функций $P_0(s)$, $P_1^-(s)$, $\delta(s)$ ($P_0(s)$, $\delta_+(s)$) имеющие наибольшую (наименьшую) вещественную часть среди всех корней этих функций, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re}(s) < \gamma_0$ ($\operatorname{Re}(s) > \gamma_0$). Корень Λ_+ , так же как и Λ , вещественен и единственен в полосе $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$. При помощи теории вычетов из соотношений (2.9) находим

$$\varphi_j(\xi) = O(\xi^{-\alpha-1}), \quad \xi \rightarrow 0 \quad (j=0, 1); \quad \varphi_0(\xi) = O(\xi^{-\beta-1}), \quad \xi \rightarrow \infty$$

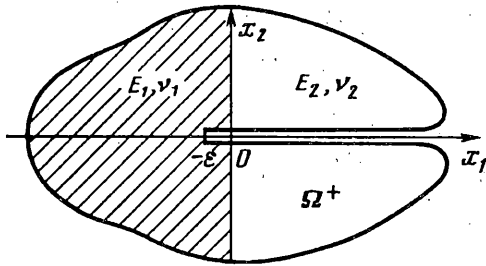
Таким образом, построено в квадратурах решение задачи T_ε^+ (2.1). С другой стороны асимптотика решения задачи T_ε^+ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равна сумме решений двух задач: T_0 и t_ε^+ . Постановка задачи T_0 получается из (2.1) при $\varepsilon = 0$, а асимптотика ее решения при $r \rightarrow 0$ определяются формулами (1.5). Задача t_ε^+ — частный случай задачи T_ε^+ при

$$p(x_1) = \begin{cases} 0, & 0 < x_1 < \infty \\ -(-2\pi x_1)^{\Lambda-1} K_I + O(1), & \varepsilon \rightarrow 0, \quad -\varepsilon < x_1 < 0 \end{cases}$$

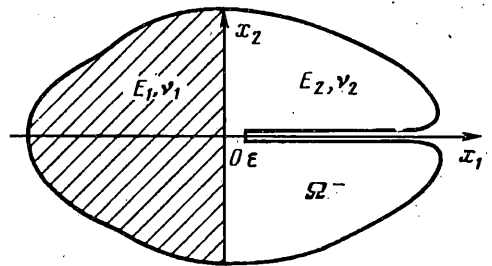
В этом случае имеем

$$p_0(\xi) = 0 \quad (0 < \xi < \infty), \quad p_1(\xi) = 4(2\pi\xi)^{\Lambda-1} K_I + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (0 < \xi < \varepsilon)$$

$$P_0(s) = 0, \quad P_1^-(s) = 4(2\pi\varepsilon)^{\Lambda-1} (\Lambda + s)^{-1} K_I + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$\Psi^-(s) = 4(2\pi\epsilon)^{\Lambda-1} [(\Lambda + s) X^+(-\Lambda) K^+(-\Lambda)]^{-1} K_I + O(1), \quad \epsilon \rightarrow 0$$

$$\varphi_0(\xi) = -\frac{4(2\pi\epsilon)^{\Lambda-1} K_I}{K^+(-\Lambda) X^+(-\Lambda)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{m_-(s) K^-(s) X^-(s)}{(\Lambda + s) \delta_+(s) \xi^{s+1}} ds + O(1), \quad \epsilon \rightarrow 0$$

$$(1 < \xi < \infty) \quad (2.10)$$

Принимая во внимание связь $\varphi(x_1) = \varphi_0(\epsilon^{-1}x_1)$ и используя теорию вычетов, находим из (2.10) асимптотику функции $\varphi(x_1)$:

$$\varphi(x_1) \sim 2(2\pi)^{\Lambda-1} q_*^+ K_I x_1^{-\Lambda-1} \epsilon^{2\Lambda} + O(\epsilon^{\Lambda+1}), \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.11)$$

$$q_*^+ = [\Gamma(\Lambda) X^-(\Lambda)]^2 [\Gamma(\Lambda + 1/2)]^{-2} (q_3^- \Lambda - q_2^-) (2p_4^+ \Lambda - \pi \sin \pi \Lambda)^{-1} \quad (2.12)$$

Таким образом, для нормального смещения v_2 (задача T_ϵ^+) имеем

$$v_2(T_\epsilon^+) \sim v_2(T_0) + v_2(t_\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

Введем обозначение для скачка функции $[f] = f|_{x_2=0} - f|_{x_2=+0}$ тогда, сравнивая (2.2) с (2.11), получаем из (2.13):

$$[v_2(T_\epsilon^+)] \sim [v_2(T_0)] + V x_1^{-\Lambda} \epsilon^{2\Lambda} + O(\epsilon^{\Lambda+1}), \quad \epsilon \rightarrow 0$$

$$V = -2^\Lambda \pi^{\Lambda-1} (\Lambda E_2)^{-1} (1 - \nu_2^2) q_*^+ K_I$$

Поставим в соответствие задаче T_ϵ^+ задачу Ω_ϵ^+ о плоской деформации области Ω^+ , получающейся из области Ω при продвижении трещины на расстояние ϵ в область $x_1 < 0$ (фиг. 2). Очевидно, что

$$[v_2(\Omega_\epsilon^+)] \sim [v_2(\Omega_0)] + V x_1^{-\Lambda} \epsilon^{2\Lambda} + O(\epsilon^{\Lambda+1}), \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.14)$$

С другой стороны на основе результатов п. 1 имеем

$$v_0(\Omega_\epsilon^+) \sim v_0(\Omega_0) + K_I Q^+ \zeta_\theta \epsilon^{2\Lambda} + O(\epsilon^{\Lambda+1}), \quad \epsilon \rightarrow 0$$

$$[\zeta_\theta] = -(\Lambda E_2)^{-1} 8(1 - \nu_2^2) \gamma \omega_2(\Lambda) (2\pi x_1)^{-\Lambda} \quad (2.15)$$

Сопоставляя соотношения (2.14) и (2.15), находим

$$Q^+ = (2\pi)^{2\Lambda-1} q_*^+ [4\gamma \omega_2(\Lambda)]^{-1} \quad (2.16)$$

Получим теперь асимптотическое представление для потенциальной энергии деформации для задачи Ω_ϵ^+ :

$$U_\epsilon^+ = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon^+} p v_2(\Omega_\epsilon^+) d\Omega^+$$

(при положительном направлении обхода контура $\partial\Omega^+$ область Ω^+ остается слева). Учитывая соотношения (2.15) и (1.6), приходим к асимптотическому равенству

$$U_\varepsilon^+ \sim U_0 - 1/2\varepsilon^{2\Lambda} Q^+ K_I^2 + O(\varepsilon^{\Lambda+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.17)$$

здесь U_0 — потенциальная энергия деформации для задачи Ω_0 .

Рассмотрим случай однородной среды: $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $E_1 = E_2 = E$. Тогда $\Lambda = 1/2$, $d = 6$. Вычисляя интеграл (1.9), находим $\gamma = -1/8(1 - \nu^2)^{-1}E$.

Коэффициент задачи Римана (2.5) принимает вид $G(s) = -\text{tg } \pi s$ и значит, $X^\pm(t) = 1$. На основании формул (2.12) и (2.16) получаем $q_+^* = 1$, $Q^+ = 2(1 - \nu^2)E^{-1}$. Таким образом, равенство (2.17) переходит в известное представление Гриффитса для приращения потенциальной энергии

$$U_\varepsilon^+ \sim U_0 - \varepsilon(1 - \nu^2)E^{-1}K_I^2 + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

3. Трещина, не доходящая до линии раздела сред. Рассмотрим задачу T_ε^- о плоской деформации упругой плоскости $\Pi_+ \cup \Pi_-$ с разрезом $I_\varepsilon^- = \{\varepsilon < x_1 < \infty, x_2 = \pm 0\}$, постановка которой совпадает с (2.1), если заменить ε на $-\varepsilon$. Решение задачи T_ε^- есть сумма решений задач T_0 и T_ε^+ . Постановка T_ε^+ следующая

$$\begin{aligned} \Delta v + (1 - 2\nu)^{-1} \text{grad div } v &= 0, \quad x \in \Pi_+ \cup \Pi_- \setminus I_\varepsilon^- \\ \sigma_{22}(x_1, \pm 0) &= 0, \quad \varepsilon < x_1 < \infty; \quad \sigma_{12}(x_1, \pm 0) = 0, \quad 0 < x_1 < \infty \\ \frac{\partial}{\partial x_1} v_2(x_1, -0) - \frac{\partial}{\partial x_1} v_2(x_1, +0) &= - \left[\frac{\partial}{\partial x_1} v_\theta \right]_{\theta=0}, \quad 0 < x_1 < \varepsilon \end{aligned} \quad (3.1)$$

Учитывая, что вследствие (1.2) и (1.5):

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1} v_\theta \right]_{\theta=0} \sim -E_2^{-1}(1 - \nu_2^2) R x_1^{\Lambda-1} + O(1), \quad x_1 \rightarrow +0$$

$$R = -8d^{-1}(2\pi)^{\Lambda-1} \omega_2 (-\Lambda) K_I$$

введем в рассмотрение еще одну задачу t_ε^- , постановка которой определяется (3.1), если последнее условие в (3.1) заменить следующим:

$$\frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \left[\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_1, -0) - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_1, +0) \right] = \varphi(x_1), \quad 0 < x_1 < \infty \quad (3.2)$$

где $\varphi(x_1) = R x_1^{\Lambda-1}$ при $0 < x_1 < \varepsilon$ и неизвестная функция при $x_1 > \varepsilon$. Задача t_ε^- эквивалентна сингулярному интегральному уравнению

$$\int_0^\infty J_+(\eta, \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0, \quad \varepsilon < \eta < \infty \quad (3.3)$$

(функция $J_+(\eta, \xi)$ определена в (2.4)). При помощи преобразования Меллина уравнение (3.3) приводится к задаче Римана

$$G_+(t) \Phi^+(t) = \Phi^-(t) + \varepsilon^{\Lambda-1} R F^+(t), \quad t \in \Gamma \quad (3.4)$$

$$\Phi^+(s) = \int_1^\infty \varphi(\varepsilon\xi) \xi^s d\xi, \quad \Phi^-(s) = \int_0^1 \varphi_-(\xi) \xi^s d\xi$$

$$F^+(s) = -\frac{1}{\pi} \int_1^\infty \eta^s \int_0^1 J_+(\eta, \xi) \xi^{\Lambda-1} d\xi d\eta + O(\varepsilon^{-\Lambda+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Функция $G_+(s)$ определена в (2.6), контур Γ — в (2.5), функция $\varphi_-(\xi)$ неизвестна. При помощи теоремы о свертке Меллина и теории вычетов находим

$$\pi F^+(s) = -(\Lambda + s)^{-1} [\psi(-s) - \psi(\Lambda)] + 1/2 (\Lambda + s)^{-1} A_1 \beta(\Lambda) - 1/4 A_3 - \\ - 1/2 \beta(-s) [(\Lambda + s)^{-1} A_1 + A_2 + s A_3] + O(\varepsilon^{-\Lambda+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$A_1 = \Lambda(\Lambda + 1) p_1^+ - \Lambda(\Lambda - 1) p_2^+ + (\Lambda - 1)(\Lambda - 2) p_3^+$$

$$A_2 = -(\Lambda + 1) p_1^+ + (\Lambda - 1) p_2^+ - (\Lambda - 3) p_3^+, \quad A_3 = p_1^+ - p_2^+ + p_3^+$$

здесь $\psi(x)$ — ψ -функция, $\beta(x)$ — β -функция [6]:

Факторизуем функцию $G_+(s)$. Для этого представим эту функцию в виде

$$G_+(s) = \text{ctg } \pi s G_*(s), \quad \text{ind}_\Gamma G_*(t) = 0, \quad G_*(t) = K^+(t) X^+(t) [K^-(t) X^-(t)]^{-1}$$

$$K^+(s) = -\Gamma(-s) [\Gamma(1/2 - s)]^{-1}, \quad K^-(s) = \Gamma(1/2 + s) [\Gamma(1 + s)]^{-1}$$

$$X(s) = \exp \left[-\frac{s}{\pi} \int_0^\infty \ln \left(1 - \frac{p_3^+ + p_4^+ \tau^2}{\text{ch } \pi \tau} \right) \frac{d\tau}{\tau^2 + s^2} \right] \quad (s \neq 0)$$

$$X^-(0) = \varkappa_0, \quad \varkappa_0 = (1 - p_3^+)^{-1/2} = [8\delta_0^- \mu(\mu + 1)]^{-1/2}$$

Решение задачи (3.4) получим аналогично (2.5):

$$\Phi^\pm(s) = R\varepsilon^{\Lambda-1} [K^\pm(s) X^\pm(s)]^{-1} \Psi^\pm(s) + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\Psi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{K^-(t) X^-(t) F^+(t)}{t - s} dt \quad (3.5)$$

При помощи обратного преобразования Меллина находим решение интегрального уравнения (3.3):

$$\varphi(\varepsilon\xi) = R\varepsilon^{\Lambda-1} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left[\frac{\Psi^-(s)}{K^-(s) X^-(s)} + F^+(s) \right] \frac{\sin \pi s}{\delta_+^-(s)} x^{-s-1} ds + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

откуда получаем асимптотику $\varphi(x_1)$:

$$\varphi(x_1) \sim -Rq_+^- x_1^{-\Lambda-1} \varepsilon^{2\Lambda} + O(\varepsilon^{\Lambda+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

$$q_+^- = 2 [K^-(\Lambda) X^-(\Lambda) \delta_+^\circ(\Lambda)]^{-1} B(\Lambda) \sin \pi \Lambda \quad (3.7)$$

$$\delta_+^\circ(\Lambda) = -\pi \sin \pi \Lambda + 2p_4^+ \Lambda, \quad B(\Lambda) = \Psi^-(\Lambda) + K^-(\Lambda) X^-(\Lambda) F^+(\Lambda)$$

Для того, чтобы вычислить значение $B(\Lambda)$, продолжим аналитически функцию $F^+(s)$ в область D^- при помощи формул [6]:

$$\psi(-s) = \psi(1 + s) + \pi \text{ctg } \pi s, \quad \beta(-s) = \beta(s) - s^{-1} - \pi \text{cosec } \pi s$$

и используем теорию вычетов. На основании (3.5) найдем

$$B(\Lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(j + 1/2) X^-(j)}{j! (j - \Lambda)} \left[\frac{1}{\Lambda + j} - \frac{(-1)^j}{2} \left(\frac{A_1}{\Lambda + j} + A_2 + j A_3 \right) \right] \quad (3.8)$$

Усилим сходимость последнего ряда. Для этого разложим $X^-(j)$ в ряд

$$X^-(j) = 1 + j^{-1} f_0 + 1/2 j^{-2} f_0^2 + O(j^{-3}), \quad j \rightarrow \infty$$

$$f_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \left(1 - \frac{p_3^+ + p_4^+ \tau^2}{\text{ch } \pi \tau} \right) d\tau$$

и просуммируем слабо сходящиеся ряды. Получим

$$B(\Lambda) = \frac{\alpha_0(A_1 + \Lambda A_2 - 2)}{2\pi^{1/2}\Lambda^2} + \sigma_1 - \frac{1}{2} (A_1\sigma_2 + A_2\sigma_3 + A_3\sigma_4) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} b_j$$

$$\sigma_m = \pi^{-1/2}\Lambda^{-2} + (2\pi\Lambda)^{-1} [s_m(-\Lambda) - s_m(\Lambda)] \quad (m = 1, 2)$$

$$\sigma_3 = t_1 + f_0 t_2, \quad \sigma_4 = t_0 + f_0 t_1 + 1/2 f_0^2 t_2$$

$$s_1(a) = \pi \Gamma(a) [\Gamma(a + 1/2)]^{-1} \quad (3.9)$$

$$s_2(a) = \Gamma(a) \Gamma(1/2 - a) + (1/2\pi)^{1/2} (a - 1/2)^{-1} F(1/2, 1; 3/2 - a; 1/2)$$

$$t_0 = -\pi^{-1}\Gamma(1 - \Lambda) \Gamma(1/2 + \Lambda) + 2^{-5/2}\pi^{-1/2} (\Lambda + 1/2)^{-1} F(3/2, 1; 3/2 + \Lambda; 1/2)$$

$$t_1 = \pi^{-1/2}\Lambda^{-1} - (\pi\Lambda)^{-1} \Gamma(1 - \Lambda) \Gamma(1/2 + \Lambda) - (2\pi)^{-1/2} (\Lambda + 1/2)^{-1} \times \\ \times F(1/2, 1; 3/2 + \Lambda; 1/2)$$

$$t_2 = \sigma_2 + \frac{\Lambda}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} c_j, \quad c_j = \frac{\Gamma(j + 1/2) (-1)^j}{j! (j^2 - \Lambda^2) j} = O(j^{-7/2}), \quad j \rightarrow \infty$$

$$b_j = [j! (j - \Lambda)]^{-1} \Gamma(j + 1/2) \{ (j + \Lambda)^{-1} [X^-(j) - 1] [1 - 1/2 (-1)^j A_1] - \\ - 1/2 (-1)^j [X^-(j) - 1 - j^{-1} f_0] (A_2 + j A_3) + 1/4 (-1)^j j^{-1} f_0^2 A_3 \} = O(j^{-7/2}), \quad j \rightarrow \infty$$

Рассмотрим задачу Ω_ε^- о плоской деформации области Ω^- (фиг. 3) с разрезом, не доходящим до линии раздела сред. Имеем следующие асимптотические представления для нормального смещения

$$v_2(T_\varepsilon^-) = v_2(T_0) + v_2(T_\varepsilon) \sim v_2(T_0) + v_2(t_\varepsilon^-), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$v_2(\Omega_\varepsilon^-) \sim v_2(\Omega_0) + v_2(t_\varepsilon^-), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$v_\theta(\Omega_\varepsilon^-) = v_\theta(\Omega_0) + K_I Q^- \xi_0 \varepsilon^{2\Lambda} + O(\varepsilon^{\Lambda+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Учитывая формулы (3.6) и (3.2), находим выражения для постоянной Q^- :

$$Q^- = 1/2 (2\pi)^{2\Lambda-1} \omega_2(-\Lambda) q_*^- [\gamma d\omega_2(\Lambda)]^{-1} \quad (3.10)$$

Асимптотическое представление для потенциальной энергии деформации примет вид

$$U_\varepsilon^- = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\varepsilon^-} p v_2(\Omega_\varepsilon^-) d\partial\Omega_\varepsilon^- \sim U_0 - \frac{1}{2} \varepsilon^{2\Lambda} Q^- K_I^2 + O(\varepsilon^{\Lambda+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.11)$$

В случае однородной среды $G(s) = \text{ctg } \pi s$, $X^\pm(t) = 1$, $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ и ряд (3.8) суммируется: $B(1/2) = -\pi^{1/2}$. Постоянные q_*^- , Q^- , определенные в (3.7) и (3.10) соответственно, принимают значения $q_*^- = 1$, $Q^- = -2(1 - \nu^2)E^{-1}$ и приходим к формуле Гриффитса

$$U_\varepsilon^- \sim U_0 + 1/2 (1 - \nu^2) E^{-1} K_I^2 + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Сопоставляя асимптотические равенства (2.17) и (3.11), получаем выражение для приращения ΔU потенциальной энергии деформации при переходе трещины нормального отрыва через линию раздела сред

$$\Delta U \sim -1/2 \varepsilon^{2\Lambda} Q K_I^2 + O(\varepsilon^{\Lambda+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad Q = Q^+ - Q^- \quad (3.12)$$

Численные расчеты позволяют сделать вывод, что для каждого набора коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 ($0 < \nu_1 < 1/2$) существует одно и только одно значение параметра μ_* $= E_1 E_2^{-1}$, такое, что $\Lambda = 1/2$. Например, если $\nu_1 = 0,35$, $\nu_2 = 0,2$, то

μ_*	Λ	γ_*	Q^+	Q^-	Λ_*
0,01	0,0852	0,00318	381,1	449,9	0,722
0,05	0,183	0,0161	45,30	60,07	0,761
0,1	0,246	0,0315	19,15	26,71	0,802
0,2	0,321	0,0579	8,679	12,09	0,864
0,5	0,425	0,107	3,416	4,133	0,963
1,0	0,5	0,137	1,820	1,820	1,0
1,5	0,540	0,143	1,287	1,154	0,986
2,0	0,566	0,141	1,012	0,855	0,963
10,0	0,667	0,0684	0,259	0,268	0,802

$\Lambda = 1/2$ при $\mu_* = 0,81818$. При этом, однако, формула (3.12) не совпадает с формулой Гриффитса ($Q^+ \neq -Q^-$): $Q^+ = 2,072E_2^{-1}$, $Q^- = -1,858E_2^{-1}$. При вычислении Q^- при $\Lambda = 1/2$ ($E_1 \neq E_2$) в формулах (3.9) следует перейти к пределу $\Lambda \rightarrow 1/2$ и тогда

$$s_1 \left(-\frac{1}{2} \right) = 0, \quad s_2 \left(\frac{1}{2} \right) = 2\pi^{1/2} \ln 2 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1/2)_j}{2^j j!} [\psi(1) - \psi(1+j)]$$

Если $\nu_1 = \nu_2$, то при переходе трещины из жесткой среды в мягкую ($E_2 > E_1$) $\Lambda < 1/2$. В противном случае $\Lambda > 1/2$.

В таблице приведены значения Λ , $\gamma_* = -E_2^{-1}\gamma$, $Q^+ = E_2 Q^+$, $Q^- = -E_2 Q^-$ при $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ для некоторых значений μ_* . В последней колонке таблицы указаны значения Λ_* — корни функции $\delta(s)$, определяющего особенность решения системы интегральных уравнений (2.3). Значения Λ совпадают с приведенными при $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\mu_*^{-1} = 2$, $3/2$, $1/2$ в [8]. В этой же работе выписана соответствующая (3.12) асимптотическая формула для приращения потенциальной энергии. Однако метод для нахождения постоянной Q не приводится, и для ее определения предлагается апеллировать к эксперименту.

Автор благодарит С. А. Назарова за полезные консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черепанов Г. П. Механика крупного разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. Мазья В. Г., Назаров С. А. Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях границы вблизи угловых и конических точек // Тр. Моск. матем. об-ва. 1987. Т. 50. С. 79—129.
3. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Match. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29—60.
4. Унгуадзе А. В. Первая основная задача для кусочно-однородной изотропной плоскости, содержащей полубесконечную трещину, пересекающую границу раздела под прямым углом // Тр. Тбил. матем. ин-та. 1986. Т. 81. С. 79—87.
5. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких выключений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
7. Leguillon D., Sanchez-Palencia E. Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity. Masson, Paris, J. Wiley, New York. 1987. 200 p.
8. Leguillon D. Calcul du taux de restitution de l'energie au voisinage d'une singularité // C. R. Acad. Sci. Paris. 1989. Т. 309. Sér. II. P. 945—950.