

УДК 539.375

© 1993 г. Л. Н. ГЕРМАНОВИЧ, А. В. ДЫСКИН, Н. М. ЦЫРУЛЬНИКОВ

МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ С ТРЕЩИНАМИ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ

Рассматривается модель дилатансии и разрушения хрупких горных пород при одноосном сжатии, в которой учитывается взаимодействие растущих трещин.

Большинство исследований механического поведения хрупких материалов при сжатии относится к горным породам, поскольку именно для горных пород основной интерес представляет их реакция на действие преобладающих в земной коре сжимающих напряжений. При одноосном и неравнокомпонентном трехосном сжатии образцов горных пород, начиная с некоторой величины нагрузки объем образца, до этого убывавший с ростом нагрузки почти линейно, замедляет свое убывание, а затем начинает возрастать [1]. Это неупругое увеличение объема (дилатансия), сопровождается акустической эмиссией, суммарное число импульсов которой, отсчитываемое от момента начала дилатансии, примерно пропорционально достигнутой величине дилатансии, т.е. неупругой объемной деформации, определяемой как разность между наблюдаемой объемной деформацией и величиной, сопутствующей упругому деформированию [2, 3].

В [4] установлена также пропорциональность между дилатансией и суммарной энергией акустической эмиссии. Дальнейшее увеличение нагрузки приводит (в случае недостаточно большой жесткости пресса) к разрушению образца. При одноосном сжатии, если удаётся исключить влияние торцов, наблюдается столбчатое разрушение, т.е. разделение породы на столбики, параллельные оси сжатия [5].

При сжатии с боковым обжатием разрушение происходит путем образования сдвигового разлома, наклоненного, согласно [6], к оси сжатия тем сильнее, чем выше величина бокового обжатия. Это, по-видимому, указывает на различие механизмов разрушения при одноосном сжатии и сжатии с заметным боковым поджатием. В дальнейшем речь будет идти об одноосном сжатии.

В настоящее время существуют две основные гипотезы о механизме деформирования и разрушения хрупких материалов при сжатии. Согласно первой из них дилатансия и разрушение связаны с количественным накоплением дефектов, причем каждый дефект дает в среднем равный вклад в дилатансию, слабо меняющийся в процессе нагружения [2, 7, 8]. Эта гипотеза согласуется с фактом пропорциональности величины дилатансии и суммарного числа акустических импульсов, каждый из которых, как полагают [2, 3], обусловлен одним микроразрывом. Разрушение связывается с достижением концентрацией дефектов некоторой кри-

тической величины. Так, согласно экспериментам, описанным в [9], непосредственно перед разрушением отношение среднего расстояния между зародышевыми трещинами к их характерному размеру для разных материалов примерно одинаково и составляет 5–7, что привело авторов [9] к использованию понятия о критической концентрации дефектов.

В [10, 11] для объяснения резкого увеличения интенсивности накопления дефектов перед разрушением и обоснования концепции критической концентрации привлекались перколяционные соображения (анализ некоторых результатов [11] см. также в [12]).

В [13] для обоснования концепции критической концентрации рассматривается «резервуар статистически независимых элементов, разрушение которых приводит к зарождению микротрещин», и постулируется формула для определения концентрации с «ассоциацией из s случайно оказавшихся рядом микротрещин»: $c_s = cs^{-1}(sk^{-1})^s/s!$, где c – концентрация микротрещин, $k = r^{-1}c^{-1/2}$, r – средний размер микротрещины. В результате получилось, что при $k > e \approx 2, 7 \dots$ концентрация ассоциаций неограниченно растет с ростом размера s , что дало основание автору [13] принять $k = e$ в качестве величины критической концентрации. Отметим, что предположение о статистически независимом зарождении микротрещин эквивалентно предположению об их пуассоновском распределении. Если при этом под ассоциацией из s микротрещин понимать их скопление в объеме sr^3 , то получится формула для c_s , отличающаяся от постулированной в [13] множителем $\exp(-sr^3c)$, явный учет которого исключает неограниченный рост концентрации крупных скоплений и наличие критической величины концентрации микротрещин.

В рамках гипотезы, сводящей дилатансию и разрушение хрупких пород к накоплению микроразрывов, трудно объяснить столбчатое разрушение. Кроме того в породе изначально имеется значительное число трещин [14–16], часть из которых растет с увеличением сжимающей нагрузки, причем при одноосном сжатии длины следов трещин в сечении образцов увеличиваются в несколько раз [15, 16]. Рост начальных трещин при сжатии экспериментально изучался в основном в плоском случае [17–22]; в [22] исследована также начальная стадия роста трещины в объемном случае.

Учет этих фактов приводит к гипотезе, согласно которой определяющую роль в механизме дилатансии и разрушения, по крайней мере для одноосного сжатия, играет удлинение трещин, имевшихся в породе до нагружения (см. [12, 23–32] и цитированную там литературу).

В [23, 25] рассмотрена начальная стадия развития трещин (в [25]) учтена возможность некоторого подрастания межзеренных трещин в своей плоскости). В [24–26] дилатансия вычислялась в плоской постановке путем моделирования растущих вдоль оси сжатия трещин прямолинейными разрезами, нагруженными в центре парой сосредоточенных сил, заменяющих действие начальных трещин.

В [27, 28] рассмотрена плоская модель макротрещины, образовавшейся после слияния нескольких трещин, проросших от начальных микротрещин или эллиптических пор, расклинивающее действие которых также моделировалось сосредоточенными силами. Отметим в этой связи, что если для разреза длины $2l$, раскрываемого в центре парой сил, коэффициент интенсивности напряжения $K_I \approx l^{-1/2}$ (что согласуется с результатами численного моделирования прорастания начальной трещины [26]), то для разреза, раскрывающегося вследствие наличия в центре малой поры, $K_I \approx l^{-5/2}$ [29], т. е. начальная пора значительно слабее поддерживает рост трещины, чем пара сил. В [30] исследовано взаимодействие трещин в процессе их прорастания из двоякопериодической системы пор.

В [31] предложена объемная модель роста трещины при одноосном сжатии, позволившая описать дилатансию на стадии нагружения, при которой взаимодействие трещин еще не существенно. При этом удалось выделить группу экспериментов на образцах горных пород, в которых эта стадия оказалась значительной: на соответствующих участках кривых деформирования модель хорошо согласовывалась с экспериментальными данными. В других экспериментах дилатансия росла более резко, чем предсказывает модель, что, по-видимому, связано с неучтенным в модели взаимодействием трещин.

В [12], в продолжение работы [31], предложена модель разрушения при одноосном сжатии, основанная на учете взаимодействия только пар трещин, растущих в одной плоскости (на месте грани будущего столбика) навстречу друг другу, и на предположении, что разрушающей является нагрузка, при которой устойчивый рост трещин сменяется вследствие взаимодействия на неустойчивый.

Если исходить из того, что дилатансия вызывается ростом и раскрытием сравнительно небольшого и примерно фиксированного числа трещин, то необходимо объяснить пропорциональность между суммарным числом акустических импульсов и дилатансией. В [32] предположено, что в породе имеются ослабленные микроплощадки, которые, попадая в окружающие растущие трещины перенапряженные области, разрушаются, излучая акустические импульсы. Показано, что объем окружающей растущую трещину перенапряженной области примерно пропорционален объему ее раскрытия, поэтому общее число микроразрывов пропорционально суммарному объему раскрытия трещин, т. е. дилатансии.

1. Как показывают исследования шлифов горных пород на разных стадиях одноосного сжатия [15, 16], растет лишь незначительная часть из очень большого числа начальных трещин, причем их размеры в направлении оси сжатия к моменту разрушения увеличиваются в несколько раз. Можно полагать, что в первую очередь растут начальные трещины наибольших размеров, соответствующим образом наклоненные к оси сжатия, и достаточно редко расположенные. В дальнейшем только эти трещины будем называть начальными. Породу будем моделировать изотропной упругой средой, содержащей редко расположенные дискообразные начальные трещины одинакового радиуса a_0 . Ось сжатия считаем вертикальной.

На стадиях нагружения когда взаимодействием трещин еще можно пренебречь, их рост происходит следующим образом [31]. Начиная с определенной величины сжимающего напряжения от верхнего и нижнего участков контура трещины (где действует поперечный сдвиг) ответвляются вторичные трещины отрыва, которые с увеличением нагрузки растут устойчиво, ориентируясь вдоль оси сжатия. Вместе с тем, вдоль боковых участков контура трещины (где действует также и продольный сдвиг) возникает ряд микротрещин. Предполагается, что при дальнейшем нагружении, вследствие увеличения числа и размеров микротрещин и последующего разрушения породы между ними, будет происходить рост начальной трещины перпендикулярно оси сжатия (эффективно в своей плоскости). Ответвившиеся же трещины-отростки будут по-прежнему устойчиво расти вдоль оси нагружения. В результате начальная трещина вытянется перпендикулярно оси сжатия в лентообразную подложку контакта, от длинных сторон контура которой будут отходить ориентирующиеся вдоль оси сжатия участки трещины отрыва (фиг. 1), причем как длина этих участков вдоль оси нагружения, так и длина площадки будут расти с увеличением сжимающей нагрузки. Более того, без удлинения площадки был бы невозможен значительный рост трещин-отростков вдоль оси сжатия. Отметим.

что факт роста трещин в боковом направлении подтверждается анализом шлифов образцов [16].

Следуя [12, 31], центральное вертикальное сечение такой трещины на стадии значительного прорастания (когда ее размеры намного превосходят длину начальной трещины) будем моделировать в приближении плоской деформации прямолинейной трещиной нормального отрыва, поддерживаемой в раскрытом состоянии парой приложенных в центре сосредоточенных сил, заменяющих расклинивающее действие площадки контакта (фиг. 1) и равных

$$F = 2\kappa\sigma a_0, \quad \kappa = C \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (1.1)$$

где σ — величина сжимающего напряжения, α — угол наклона трещины к оси сжатия, $C < 1$ — коэффициент, учитывающий влияние трения между берегами площадки контакта, влияние искривленных участков поверхности растущей трещины, а также погрешность, связанную с рассмотрением только центрального сечения.

Далее, следуя [31], запишем выражение для коэффициента интенсивности напряжений в концах рассматриваемой трещины

$$K_I = F (\pi l)^{-1/2} \quad (1.2)$$

откуда, полагая что контур трещины находится в условиях предельного равновесия $K_I = K_{Ic}$, можно найти зависимости ее высоты $2l_0$ и площади S раскрытия центрального сечения от нагрузки. Если известна ширина трещины, т. е. длина площадки контакта $2b$ (см. фиг. 1), то можно оценить объем V трещины. Суммируя объемы всех трещин и относя полученный результат к единице объема, находим величину дилатансии.

Отметим, что предложенный в [31] способ оценки b фактически соответствует предположению о том, что ширина трещины пропорциональна высоте. В дальнейшем, учитывая, что рост трещины вбок является необходимой предпосылкой ее развития в направлении сжатия, постулируем соотношение $b = k_1 l$. Поскольку прорастание трещин слабо влияет на осевую деформацию образца (см. результаты экспериментов для хрупких пород [1–3]), имеем выражение для дилатансии

$$\Delta \epsilon_v = 2\Delta \epsilon_{\perp} = A\sigma^5, \quad A = a_0^5 \quad (1.3)$$

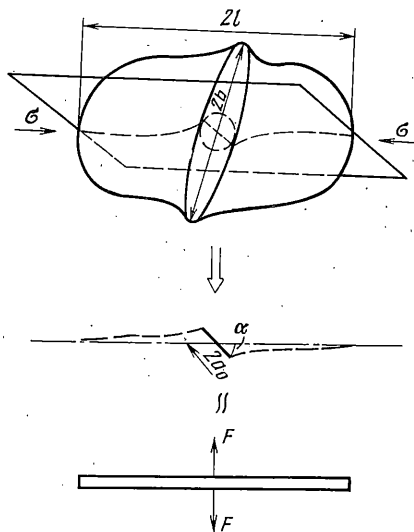
$$A = 32k_1 k_3 \kappa^5 (\alpha_{\max}) \sigma_t^{-4} E_0^{-1} \nu_0, \quad \nu_0 = N\alpha_0^3$$

Здесь $\Delta \epsilon_{\perp}$ — неупругая поперечная деформация, k_3 — коэффициент порядка единицы, учитывающий погрешность приближенного описания формы трещины, E — модуль Юнга (коэффициент Пуассона учтен в k_3), ν_0 — безразмерная концентрация начальных трещин (N — количество начальных трещин в единице объема), имеющая смысл куба отношения радиуса начальной трещины к среднему расстоянию между трещинами [33] (и тем отличающаяся от концентрации, использованной в [9]), σ_t — предел прочности на растяжение определяемый независимо на образцах с аналогичными начальными трещинами, $\alpha_{\max} = \arccos 3^{-1/2}$ — угол, при котором κ достигает максимума.

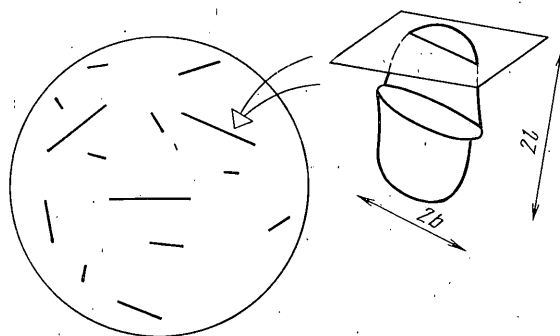
Поскольку зависимость дилатансии от угла наклона весьма резкая ($A \approx \kappa^5$), основную роль играют начальные трещины, наклоненные к оси сжатия под углами, близкими к α_{\max} . Кроме того, согласно (1.3) и соотношению

$$K_{Ic} = 2\sigma_t (a_0/\pi)^{1/2} \quad (1.4)$$

которое выражает трещиностойкость материала по отношению к субструктурным трещинам (σ_t — предел прочности при растяжении аналогичного образца с теми же начальными трещинами; подробнее см. [31]). Поэтому из указанной группы начальных трещин следует еще выделить трещины



Фиг. 1



Фиг. 2

наибольшего размера. Таким образом из всех начальных трещин только трещины наибольшего размера, наклоненные к оси сжатия под углами, близкими к α_{\max} , оказывают основное влияние на дилатансию. Учет взаимодействия, как будет показано ниже, только усиливает этот эффект. Этим и обосновывается введенное выше определение начальных трещин.

В [31] получено хорошее согласование экспериментальных и теоретических результатов для образцов горных пород, имеющих развитую стадию нагружения, на которой взаимодействие растущих трещин еще не существенно. На завершающей стадии нагружения дилатансия растет более резко, чем предсказывает модель [31]. Это отличие естественно попытаться объяснить взаимодействием трещин. Будем полагать, что и для взаимодействующих трещин отмеченная пропорциональность размеров сохранится, причем коэффициент пропорциональности для всех трещин один и тот же.

2. Взаимодействие приводит к тому, что трещины в силу их хаотического расположения растут неодинаково [п. 4, 12]. Предположим, что для сильно выросших трещин реализуется и в дальнейшем сохраняется распределение по размерам, близкое к широкому, когда соседние трещины сильно различаются по размерам, а трещины близких размеров расположены достаточно редко и их взаимодействием можно пренебречь. При этом возможность слияния трещин не учитывается.

Учет взаимодействия начнем с наиболее сильно выросшей трещины. Вблизи нее находятся лишь значительно меньшие трещины. Влияние малых трещин на большую будем моделировать введением эффективной сплошной среды. Это соответствует усреднению полей напряжений и деформаций по элементу объема, содержащему достаточно много малых трещин, и позволяет найти раскрытие большой трещины, усредненное по всевозможным расположениям окружающих ее малых трещин.

Условие роста большой трещины определяется коэффициентом интенсивности напряжений K_I , описывающим напряженное состояние в концевой области, которая не содержит малых трещин. Поэтому локальные напряжения в ней определяются по найденному раскрытию с помощью исходных модулей упругости. Иными словами при подрастании большой трещины изменение энергии всего образца включает работу раскрытия окру-

жающих трещин, в то время как изменение энергии концевой области большой трещины определяется только свойствами исходного материала.

По этому поводу необходимо сделать замечание. Рассмотрим модельную задачу о трещине в бесконечной изотропной пластине, наполненной также хаотически ориентированными малыми трещинами. Пластина растягивается напряжением p , действующим перпендикулярно к большой трещине. Тогда, в силу линейности задачи, предложенный метод приводит к следующему выражению для коэффициента интенсивности напряжений большой трещины

$$K_I = p (\pi l)^{1/2} E_0 / E_* \quad (2.1)$$

Здесь l — длина трещины, E_0 — модуль Юнга материала, E_* — эффективный модуль Юнга.

Однако, на первый взгляд кажется, что можно рассуждать иначе. Поскольку глобальное изменение энергии пластины (отнесенное к единице площади) при продвижении трещины на Δl равно $p E_*^{-1} \Delta l$, то сравнивая его с локальным изменением энергии $K_I^2 E_0^{-1} \Delta l$, получаем

$$K_I = p l E_0 / E_* \quad (2.2)$$

что отличается от (2.1). Ошибка второго рассуждения заключается в следующем. Использование эффективной среды и вычисление E_* подразумевает, что поля напряжений и деформаций усредняются по элементарным объемам (размера L), содержащим много малых трещин.

При таком, крупномасштабном подходе, можно учитывать только приращения длин трещин Δl не меньшие, чем размер элементарного объема ($\Delta l \geq L$). При таком приращении длины трещины, локальное изменение энергии определяется эффективным модулем и равно $(K_I^*)^2 E_*^{-1} \Delta l$. Здесь K_I^* — крупномасштабный коэффициент интенсивности напряжений, определяющий форму раскрытия трещины вблизи ее кончика после усреднения смещений в масштабе L . Очевидно, что и поверхностная энергия разрушения также должна относиться к масштабу L , а потому будет определяться малыми трещинами и, следовательно, отличаться от поверхностной энергии разрушения исходного материала. Поскольку в предлагаемой модели дилатансии малые трещины также растут с ростом нагрузки, такой способ описания условий роста большой трещины неудобен.

Однако, если принять гипотезу эргодичности, то введение эффективной среды можно интерпретировать иначе — как усреднение по всевозможным расположениям малых трещин. Именно этому случаю и соответствует формула (2.1), в которой под K_I понимается среднее значение маломасштабного коэффициента интенсивности напряжений, определяющего напряжения вблизи кончика трещины в масштабе, меньшем, чем расстояние между малыми трещинами (строго говоря в (2.1) следовало бы написать $\langle K_I \rangle$, где $\langle \cdot \rangle$ — оператор усреднения.) Использование «маломасштабного» коэффициента интенсивности напряжений удобно тем, что теперь рост трещины определяется трещиностойкостью исходного материала. Поскольку в дальнейшем рассматриваются устойчиво растущие трещины, можно полагать, что в процессе их роста отклонения истинных значений K_I от среднего, полученного предложенным выше способом, будут усредняться и, в целом, процесс роста трещин будет описан правильно.

Если интерпретировать введение эффективной среды как усреднение по всевозможным расположениям малых трещин, то в формулу (2.2) должно было бы входить среднее значение величины K_I^2 , т. е. $\langle K_I^2 \rangle$. Именно неравенство $\langle K_I^2 \rangle \neq \langle K_I \rangle^2$ является причиной различия результатов, даваемых формулами (2.1) и (2.2) и приводит к необходимости использовать (2.1).

Итак схема учета взаимодействия трещин состоит в том, что сперва находим среднее раскрытие трещины путем мысленного помещения ее в эффективную среду, определяемую малыми трещинами, а затем, по заданному раскрытию для трещины в исходном материале, вычисляем коэффициент интенсивности напряжений (дополнительные аргументы в пользу этой схемы приведены в [12]).

Аналогичные соображения применимы к трещинам промежуточных размеров. Для каждой рассматриваемой трещины эффективная среда определяется трещинами меньших размеров, а влияние на нее крупных трещин в первом приближении не учитывается, поскольку возмущенное поле от большой трещины самоуравновешено и, следовательно, дополнительные напряжения, действующие на рассматриваемую малую трещину, после усреднения по всевозможным ее расположениям относительно большой трещины обратятся в нуль. При этом существенно сделанное выше предположение о широком распределении трещин по размерам, согласно которому малые трещины равномерно распределены в пространстве между большими трещинами.

Конечно степень подрастания каждой отдельно взятой малой трещины зависит от ее положения относительно большой трещины. Однако можно полагать, что в рассматриваемом случае указанная равномерность распределения малых трещин сохранится, поскольку большие трещины, как будет показано ниже, с ростом нагрузки увеличиваются в большей степени, чем малые, а значит зоны концентрации напряжений больших трещин, продвигаясь в процессе их значительного прорастания, захватывают различные малые трещины, исключая тем самым возможность локализации последних (в отличие от случая сжатия с заметным боковым поджатием, когда трещины не могут сильно прорасти, а указанные зоны передвигаться).

Найдем обусловленное взаимодействием среднее раскрытие трещин. Оставаясь в рамках принятого упрощенного рассмотрения, выделим некоторое поперечное (т. е. перпендикулярное оси сжатия) сечение образца и заменим взаимодействие реальных трещин взаимодействием их следов в этом сечении в приближении плоской деформации (фиг. 2).

Выделим одну растущую трещину, временно пренебрегая влиянием остальных. Предположим, что наблюдаемое раскрытие следа этой трещины в указанном сечении вызвано некоторой системой нагрузок, заменяющей нагрузки, действующие на исходную трещину. Теперь, не меняя этой системы нагрузок, поместим рассматриваемый след-трещину в эффективную среду, определяемую следами меньших трещин. Поскольку при основном однородном сжатии имеет место осевая симметрия, следы в указанном сечении ориентированы хаотически. Следовательно эффективная среда, соответствующая рассматриваемой плоской задаче, будет изотропной.

Раскрытие трещины в изотропной среде в приближении плоской деформации пропорционально $E_*^{-1}(1-\nu_*^2)$, где E_* и ν_* модуль Юнга и коэффициент Пуассона эффективной среды. Т. е. в эффективной среде оно увеличится по сравнению с раскрытием в исходной среде в $E_0 E_*^{-1}(1-\nu_*^2) \times (1-\nu_0^2)^{-1}$ раз (E_0, ν_0 — упругие константы материала), или, согласно [33], в $\exp(\pi\Omega/4)$ раз, где $\Omega = N_s \langle (2b_s)^2 \rangle$ — концентрация следов малых трещин, $2b_s$ — длина следа, N_s — число следов в единице площади сечения, $\langle \rangle$ — означает усреднение по длинам.

Вводя объемную концентрацию малых трещин $\nu = N \langle l^3 \rangle$, где N — число малых трещин в единице объема; $2l$ — высота одной трещины, и учитывая, что $N_s \approx N \langle 2l \rangle$, $\langle l^3 \rangle \approx \langle l^2 \rangle \langle l \rangle$, $\langle b_s^2 \rangle \approx \langle b^2 \rangle$, где $2b$ — ширина растущей трещины, а также пропорциональность длины и ширины растущей трещины ($b = k_1 l$), получим

$$\Omega = 8k_1^2 k_2 \nu \quad (2.3)$$

где k_2 — коэффициент, компенсирующий, в первом приближении, ошибку замены взаимодействия трещин взаимодействием их следов.

Предположим, что раскрытие растущих трещин увеличится вследствие их взаимодействия с меньшими трещинами во столько же раз, во сколько увеличится раскрытие соответствующих следов в поперечном сечении. Тогда коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва, определяющий развитие трещины вдоль оси сжатия, в силу линейности упругой задачи, равен $K_I = E_0 E_*^{-1} (1 - \nu_0^2) (1 - \nu_*^2)^{-1} K_I^{(0)}$, где $K_I^{(0)}$ — коэффициент интенсивности напряжений для растущей трещины в отсутствие взаимодействия.

Рассмотрим растущую трещину высоты $2l$. Согласно (1.2), с учетом (2.3) окончательное выражение для K_I имеет вид

$$K_I = F \exp [2\pi k_1^2 k_2 \nu(l)] / \sqrt{\pi l} \quad (2.4)$$

По определению [33] концентрация растущих трещин равна

$$\nu(l) = N \int_{l_0}^l l^3 f_\sigma(l) dl \quad (2.5)$$

где $2l_0$ — наименьший возможный размер растущей трещины (т. е. размер, который она имела бы в отсутствие взаимодействия), $f_\sigma(l)$ — функция распределения трещин по размерам при достигнутом уровне сжимающих напряжений; удовлетворяющая условию нормировки

$$\int_{l_0}^{l_{\max}} f_\sigma(l) dl = 1 \quad (2.6)$$

Дифференцируя (2.4), (2.5) по l , с учетом условия $K_I = K_{Ic}$ имеем

$$f_\sigma(l) = \frac{1}{4\pi k_1^2 k_2 N l^4} \quad (2.7)$$

Из (2.6), (2.7) и выражения для длины выросшей трещины в центральном сечении $l = F^2 \pi^{-1} K_{Ic}^{-2}$ [31] определим размер наиболее сильно выросшей трещины

$$l_{\max}(\sigma) = \frac{l_0(\sigma)}{(1 - 12\pi k_1^2 k_2 N l_0^3(\sigma))^{1/3}}, \quad l_0(\sigma) = \frac{(2\pi \chi a_0)^2}{\pi K_{Ic}^2} \quad (2.8)$$

Как видно из (2.8), отношение l_{\max}/l_0 монотонно растет с ростом нагрузки. Это означает, что различие размеров выросших трещин при нагружении тела увеличивается. При некотором σ знаменатель в (2.8) обращается в нуль ($l_{\max} \rightarrow \infty$). Это напряжение естественно принять за предел прочности на одноосное сжатие σ_c .

Согласно (1.4) K_{Ic} можно выразить через предел прочности на растяжение σ_t аналогичного образца с такими же начальными трещинами [12]. На основании этого, имеем

$$\sigma_c = \sigma_t \chi^{-1} (12\pi k_1^2 k_2 \nu_0)^{-1/3} \quad (2.9)$$

где $\nu_0 = N a_0^3$ — концентрация начальных трещин.

Отсюда следует $\sigma_c/\sigma_t \approx \nu_0^{-1/3}$. Это совпадает с результатом [12] (выводы [12] о коэффициенте хрупкости также сохраняют силу).

Для нахождения дилатансии определим объем раскрытия трещины высоты $2l$:

$$V(l) = 2k_3 b S(l), \quad S(l) = \frac{8\pi \chi a_0 \sigma l}{E_0 (1 - \nu_0^2)} \exp [2k_1^2 k_2 \nu(l)] \quad (2.10)$$

где k_3 — коэффициент, учитывающий форму трещины, $b = k_1 l$, $S(l)$ — площадь раскрытия центрального вертикального сечения трещины. Экспоненциальный множитель отражает увеличение раскрытия трещины, вызван

ное взаимодействием с меньшими трещинами. Определяя его из (2.4) при $K_1=K_{1c}$, интегрируя (2.10) по l с весом $f_\sigma(l)$ и используя (2.7)–(2.9), получаем неупругую объемную деформацию (дилатансию)

$$\Delta \epsilon_V = \Delta \epsilon_V^{\max} \frac{\sigma_c}{\sigma} \left[1 - \left(1 - \frac{\sigma^6}{\sigma_c^6} \right)^{1/6} \right] \quad (2.11)$$

где $\Delta \epsilon_V^{\max} = 8\sigma_c^2 k_3 (\pi k E_0 \sigma_c k_1 k_2)^{-1}$ — максимальная дилатансия, соответствующая напряжению $\sigma = \sigma_c$.

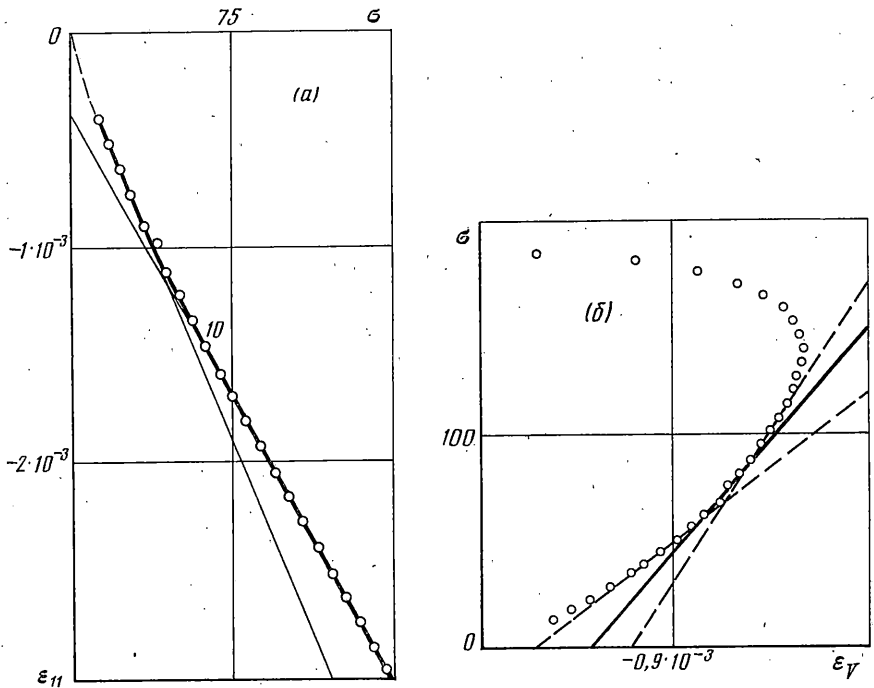
Можно показать, что в (2.11) $\Delta \epsilon_V$ растет с ростом a_0 и κ достаточно резко: сильнее, чем их пятая степень. Т. е. и в этой модели основное влияние на дилатансию оказывают только самые крупные начальные трещины, обладающие максимальным κ (оптимально наклоненные к оси сжатия и с минимальным трением между берегами). Разлагая (2.11) в ряд по степеням σ и удерживая первый член, получим, с учетом (2.9), выражение (1.3). Т. е. при малых σ предложенная модель переходит в модель дилатансии с не взаимодействующими трещинами [31].

3. Сопоставим полученный результат (2.11) с данными экспериментов. В [3] четыре цилиндрических образца гранита высотой 11,5 см и диаметром 4,425 см подвергались одноосному сжатию при разных скоростях нагружения ϵ_0 (первые четыре строки таблицы соответствуют образцам № 511–514, N^* — тип породы). Осевые и радиальные деформации измерялись тензодатчиками, а величины дилатансии рассчитывались. Все данные даны в [3] в виде таблиц. Отметим, что величины дилатансии, приведенные в [3], вычислялись, как разница между измеренной объемной деформацией и объемной деформацией, формально найденной по формулам теории упругости, с использованием независимо определенного значения модуля Юнга. Поскольку точность его определения сильно влияет на вычисляемые по опытным данным величины дилатансии, для нахождения правильных значений дилатансии пришлось применить специальный анализ результатов экспериментов.

На фиг. 3 светлыми точками показаны зависимости осевой (фиг. 3, а) и объемной (фиг. 3, б) деформаций от напряжений для образца № 512. Как известно [34, 35] можно выделить несколько стадий деформирования. Начальная стадия сопровождается постепенным закрытием имеющихся в породе трещин и полостей, что проявляется в замедлении роста величины осевой и объемной деформаций по сравнению с линейными зависимостями. Вторая стадия (примерно линейного деформирования) соответствует этапу, когда все трещины и полости, которые могли закрыться, уже закрылись и их берега могут только проскальзывать друг относительно друга, но трещины еще не растут. Затем наступает собственно стадия дилатансии, связанная с ростом определенной группы начальных трещин. На графике осевой деформации вторая и третья стадии практически не разделяются, так как рост трещин вдоль оси сжатия почти не меняет модуль деформации в этом направлении.

Вычисляемая в предложенной модели неупругая объемная деформация есть разница между объемной деформацией на третьей стадии и деформацией, полученной формальным продолжением линейной зависимости, соответствующей второй стадии, в область более высоких напряжений (сплошная линия на фиг. 3, б). Однако линейный участок деформирования (см. фиг. 3, б) выделяется неоднозначно: для каждого образца можно указать два или три варианта (на фиг. 3, б) альтернативные варианты показаны штрихом).

Конкретный вариант выбирался исходя из наилучшего согласования эксперимента и теории (при этом каждый раз входящий в (2.11) коэффициент $\Delta \epsilon_V^{\max}$ подбирался методом наименьших квадратов по эксперимен-



Фиг. 3

тальным точкам; точки, соответствующие $\sigma > 0,95\sigma_c$, игнорировались, поскольку, согласно [1], в этой области информация, даваемая тензодатчиками, ненадежна). Отметим, что использование альтернативных вариантов существенно ухудшает согласованность теории и эксперимента.

Аналогичная обработка была сделана и для остальных образцов [3]. Окончательные результаты показаны на фиг. 4. Светлые точки соответствуют образцу № 511, темные — № 512, крестами отмечены результаты для образца № 513, а квадратами — для № 514, см. табл. 1.

В табл. 2 приведены полученные значения $\Delta\varepsilon_{\gamma}^{\max}$ и σ_d — напряжения начала дилатансии, характеризующего выбранный вариант выделения второй стадии деформирования. Видно, что несмотря на значительное (третьего порядка) различие скоростей нагружения для разных образцов, значения максимальной дилатансии $\Delta\varepsilon_{\gamma}^{\max}$ весьма близки. Напряжения начала дилатансии также имеют небольшой разброс (43–49% от разрушающего напряжения).

В остальных строчках № 5–13 таблицы и на фиг. 5 приведены результаты обработки экспериментов [1, 2]. Темные точки соответствуют образцу № 5 (гранит Westerly [1]), остальные точки — образцам № 6–13 из [2]; последовательно темные квадраты, ромбы, светлые точки соответствуют образцам № 31, 36, 45 гранита (№ 6–8), а светлые квадраты, прямые кресты, темные треугольники, светлые треугольники и косые кресты — образцам из мрамора, туфа, песчаника, кварцита и габбро (№ 9–13). Для этих экспериментов данные о объемных деформациях снимались визуально с приведенных в [1, 2] графиков. Соответственно и согласование теории и экспериментов оказалось несколько хуже. Тем не менее в случае серии одинаковых образцов одной породы (гранит Westerly [2]) сохраняется стабильность значения $\Delta\varepsilon_{\gamma}^{\max}$. Данные опытов на одноосное сжатие, приведенные в [6], содержат слишком мало точек и потому не обрабатывались.

Таблица 1

Образец	$10^7 \cdot \Sigma / \Delta \epsilon \gamma$	$\Delta_{\max} \cdot 10^{-3}$	σ_m
№ 511	1,1	1,03	13,9
№ 512	1,8	0,75	10,9
№ 513	1,2	1,04	14,5
№ 514	0,57	1,72	22,1

Таблица 2

№	ϵ_0	σ_c	E_0	$\Delta \epsilon \gamma^{\max}$	σ_d / σ_c
1	$4,27 \cdot 10^{-5}$	200	5,5	5,86	0,44
2	$4,14 \cdot 10^{-6}$	187	5,5	5,22	0,47
3	$3,68 \cdot 10^{-7}$	173	5,5	5,86	0,43
4	$3,48 \cdot 10^{-8}$	163	5,5	5,88	0,49
5	10^{-5}	228	6,0	7,8	0,7
6	10^{-5}	281	6,5	3,9	0,6
7	10^{-5}	282	6,5	3,6	0,6
8	10^{-5}	284	6,5	4,2	0,6
9	10^{-5}	50	3,2	2,5	0,6
10	10^{-5}	91	1,4	2,3	0,6
11	10^{-5}	230	—	5,5	0,6
12	10^{-5}	505	—	2,0	0,6
13	10^{-6}	215	—	2,8	0,6

4. Полученные результаты вынуждают сделать замечание о связи акустической эмиссии и дилатансии. В [32] данные о суммарном числе акустических импульсов сопоставлялись со значениями дилатансии, приведенными в [3]. Поскольку, как указано выше, эти значения не точны, сопоставление пришлось провести заново, используя полученные значения дилатансии.

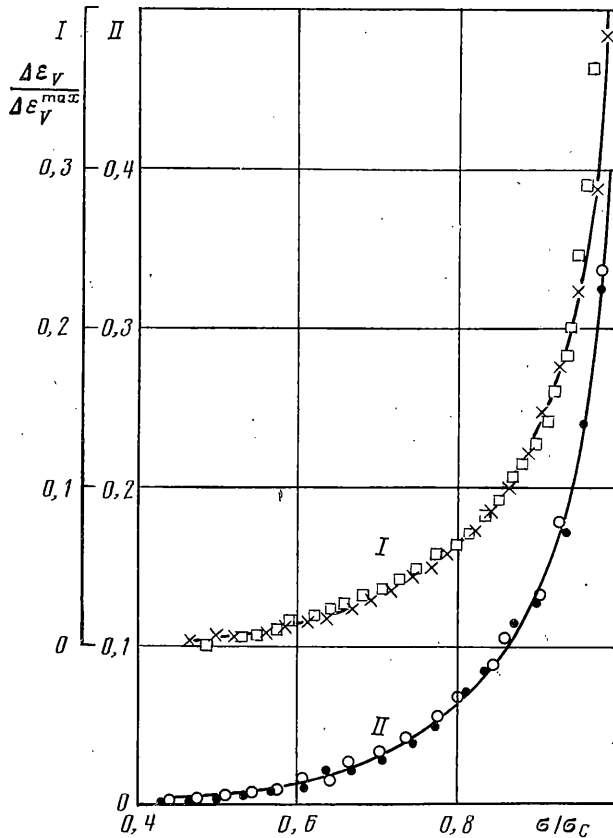
Результаты приведены на фиг. 6, где по оси абсцисс отложены величины суммарного количества акустических импульсов, а по оси ординат — значения дилатансии (цифры на фиг. 6 обозначают величину нагрузки в процентах от предела прочности, номер образцов дан в скобках).

Видно, что суммарное количество импульсов в основном пропорционально дилатансии, по крайней мере до нагрузок, не очень близких к разрушающим. Согласно [32] это явление интерпретируется следующим образом. Если рассмотреть асимптотику дальнего поля напряжений от растущих трещин, то окажется, что вокруг них есть области, в которых на площадках, параллельных оси сжатия, действуют растягивающие напряжения, причем объемы этих областей примерно пропорциональны объемам раскрытия трещин. Тогда можно предположить, что акустическая эмиссия вызывается разрушением попавших в эти области микроплощадок ослабления, по достижении на них нормальными растягивающими напряжениями предела прочности, нижняя оценка которого имеет вид (подробнее см. [32]):

$$\sigma_m = I E_0 \Delta_{\max} / 6\pi, \quad I \approx 4,70 \quad (4.1)$$

где E_0 — модуль Юнга породы, Δ_{\max} — максимальная величина дилатансии, до которой еще имеет место пропорциональность.

При этом конечно значения коэффициентов пропорциональности будут другими, и соответственно требуют корректировки основанные на них расчеты [32]. Исправленные результаты приведены в табл. 1. Во второй колонке даны значения коэффициента пропорциональности.

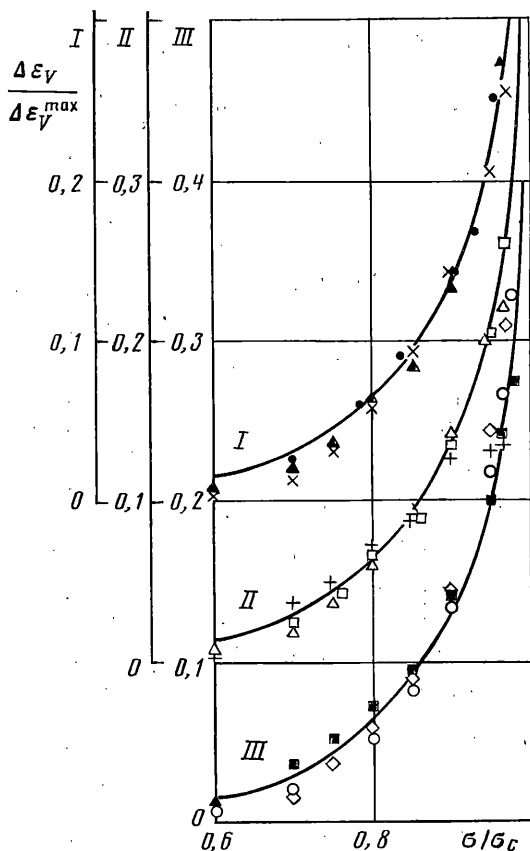


Фиг. 4

Отметим также, что отклонение от пропорциональности вблизи предела прочности может объясняться не только перекрытием перенапряженных областей соседних трещин (как предположено в [32]), но и тем, что трещины достигли значительных размеров, сравнимых с размерами перенапряженных областей, вследствие чего асимптотика дальнего поля, на которой основаны расчеты, стала давать заметные погрешности. По-видимому, совместное действие этих двух причин приводит к тому, что для разных образцов наблюдаются отклонения от пропорциональности в разные стороны.

В [12] модель разрушения хрупких пород при одноосном сжатии основывалась на предположении, что взаимодействие можно учесть, рассматривая лишь отдельные пары трещин, растущих навстречу друг другу и образующих после слияния грани столбиков, на которые разбивается образец при разрушении. Поскольку получившееся при этом соотношение между пределами прочности на сжатие σ_c и растяжение σ_t , отличается от (2.9) лишь коэффициентом, рассматривая только стадию разрушения невозможно определить, какой из механизмов взаимодействия (рассмотренный в [12] механизм парных взаимодействий или предложенный в данной работе механизм взаимодействия неодинаково проросших трещин) преобладает. Для ответа на этот вопрос в рамках предположений из [12] была вычислена дилатансия с учетом взаимодействия только пар трещин. Ширина растущих трещин по-прежнему предполагалась пропорциональной длине.

На фиг. 7 приведен пример расчета (кривая I) для образца № 511 [3]

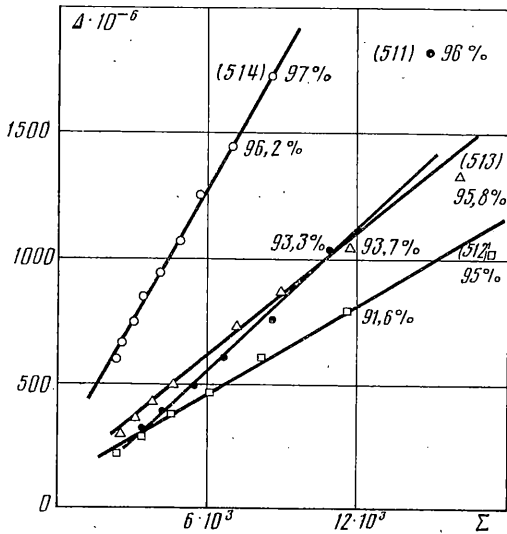


Фиг. 5

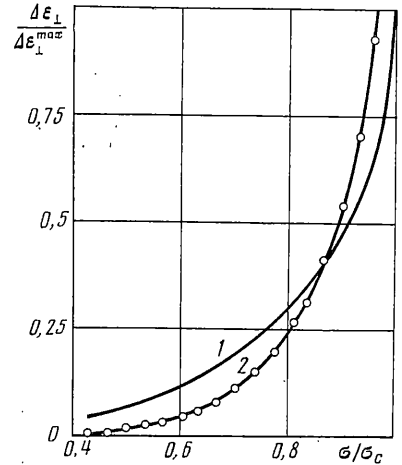
(точки — экспериментальные данные). Для сравнения приведены также результаты, даваемые формулой (2.11) (кривая 2). В обоих случаях для выбора неизвестной величины максимальной дилатансии использовался метод наименьших квадратов. Видно, что дилатансия растет более резко, чем предсказывает модель парных взаимодействий, т. е. учет только парных взаимодействий недостаточен. Для других образцов, из табл. 1 картина аналогична. Таким образом, значительное прорастание трещин вследствие взаимодействия с меньшими трещинами, по-видимому, играет наиболее важную роль в механизме неупругого деформирования и столбчатого разрушения горных пород при одноосном однородном сжатии. При этом предлагаемая модель позволяет с единых позиций объяснить механизмы этих процессов (наряду с акустической эмиссией). Следует отметить также, что, по существу, только эта модель и объясняет столбчатое разрушение, тогда как модель парных взаимодействий сама основана на факте столбчатого разрушения (т. е. на предположении о росте трещин в одной плоскости).

Предложенная модель может быть применена для анализа процессов деформирования и разрушения в породном массиве, когда нагружение близко к одноосному сжатию. При этом под начальными трещинами следует понимать трещины соответствующего размера R . В частности из (2.9) получается выражающее масштабный эффект отношение пределов прочности на сжатие в массиве и в образце:

$$\frac{\sigma_c^{(m)}}{\sigma_c} = \frac{\sqrt{\pi} K_{Ic}^{(m)}}{2 \sqrt{R} \sigma_i^{(0)}} \left(\frac{v_0^{(0)}}{v_0^{(m)}} \right)^{3/4}$$



Фиг. 6



Фиг. 7

где $\sigma^{(0)}$ — предел прочности образца на растяжение, $v_0^{(0)}$ и $v_0^{(m)}$ — концентрации начальных трещин в образце и в массиве, $K_{Ic}^{(m)}$ — трещиностойкость массива по отношению к крупномасштабным трещинам.

В случаях, когда $K_{Ic}^{(m)}$ слабо меняется при изменении размеров трещин зависимость предела прочности от масштаба близка к корневой.

5. В рамках рассмотренной приближенной схемы можно оценить скорости продольных упругих волн при прозвучивании образцов или массива горных пород в направлении, перпендикулярном оси сжатия, когда длина волны намного превосходит размеры трещин.

Предположим, что вектор смещения лежит в плоскости нормального к оси сжатия сечения образца, в которой в приближении плоской деформации учитывалось в п. 2 взаимодействие трещин. В этой плоскости эффективный модуль Юнга, как указывалось выше, равен (квадратом коэффициента Пуассона по сравнению с единицей пренебрегаем):

$$E_* = E_0 e^{\pi \alpha / 4} \quad (5.1)$$

где E_0 — модуль Юнга материала до нагружения. Используя соотношения (2.3), (2.5), (2.7) вторую из формул (2.8), а также (2.9) и (1.4), находим зависимость E_* от приложенного сжимающего напряжения σ :

$$E_* = E_0 \left[1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_c} \right)^6 \right]^{1/4} \quad (5.2)$$

Отсюда, учитывая, что влияние раскрытия трещин на плотность материала ρ пренебрежимо мало, получаем оценку для скорости продольной волны в плоскости, перпендикулярной оси сжатия

$$u \approx (E_* / \rho)^{1/2} \approx u_0 [1 - (\sigma / \sigma_c)^6]^{1/8} \quad (5.3)$$

где $u_0 = (E_0 / \rho)^{1/2}$ — скорость продольной волны в материале без выросших трещин, т. е. до нагружения. Сравнивая (5.3) и (2.11), получаем

$$\Delta \varepsilon_V / \Delta \varepsilon_V^{\max} \approx [1 - (u / u_0)^2] [1 - (u / u_0)^{12}]^{-1/4} \quad (5.4)$$

Отметим, что если эффективный коэффициент Пуассона в рассматриваемом сечении с ростом трещин меняется мало, то (5.4) справедливо и

для поперечных упругих волн, вектор смещения которых лежит в том же сечении.

Предложенная в п. 2 схема позволяет также рассмотреть случай двухосного равнокомпонентного сжатия. При этом трещины будут расти, выстраиваясь перпендикулярно оси, свободной от нагрузки [31]. В плоскости сжатия растущие трещины будут ориентированы хаотически.

Оставаясь в рамках принятого приближенного подхода, рассмотрим сечение, перпендикулярное растущим трещинам, и взаимодействие последних заменим взаимодействием их следов в этом сечении в приближении плоской деформации. При этом в обозначениях п. 2, по-прежнему $b=k_1l$, $\Omega=N_s\langle(2b_s)^2\rangle$, но теперь

$$\langle b_s \rangle \approx 1/2(\langle l \rangle + \langle b \rangle), \quad N_s \approx N(\langle l \rangle + \langle b \rangle) \quad (5.5)$$

В результате $\Omega=k_2(k_1+1)^3v$, где коэффициент k_2 компенсирует погрешность замены взаимодействия трещин взаимодействием их следов.

В сечении, перпендикулярном растущим трещинам, все следы параллельны. Поэтому, согласно [12], имеем

$$K_I=K_I^0[1+1/3\pi\Omega(l)]^3, \quad K_I^0=F(\pi l)^{-1/2} \quad (5.6)$$

где F определяется формулой (1.1), но в α под α понимается теперь угол наклона трещины к плоскости сжатия. Аналогично п. 2 находим

$$l_{\max}=l_0[1-1/4\pi k_2(k_1+1)^3Nl_0^3]^{-1/17} \\ l_0=(2\kappa\sigma a_0)^2/(\pi K_{Ic}^2) \quad (5.7)$$

откуда видно, что $l_{\max} \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \sigma_{2c}$, где напряжение

$$\sigma_{2c}=\sigma_t\sqrt{2}\kappa^{-1}(k_1+1)^{-1/2}(17\pi k_2 v_0)^{-1/6} \quad (5.8)$$

естественно принять за предел прочности при двухосном равнокомпонентном сжатии.

Для нахождения дилатансии $\Delta\varepsilon_V$, которая в данном случае совпадает с поперечной неупругой деформацией $\Delta\varepsilon_{\perp}$ в направлении, перпендикулярном к плоскости сжатия, вычисляем объем раскрытия трещины длины $2l$:

$$V(l)=2k_3bS(l), \quad S(l)=8\kappa a_0\sigma l[1+1/4\pi k_2(k_1+1)^3v(l)]^3/E_0$$

В результате дилатансия равна

$$\Delta\varepsilon_V=\Delta\varepsilon_V^{\max}\frac{\sigma_{2c}}{\sigma}\left[1-\left(1-\frac{\sigma^6}{\sigma_{2c}^6}\right)^{2/17}\right] \\ \Delta\varepsilon_V^{\max}=64k_1k_3\sigma_t^2[\pi E_0\kappa k_2(k_1+1)^3\sigma_{2c}]^{-1} \quad (5.9)$$

где $\Delta\varepsilon_V^{\max}$ — максимальная дилатансия, достигаемая перед разрушением.

Интересно сравнить зависимости (5.9) и (2.11) относительной дилатансии $\Delta\varepsilon_V/\Delta\varepsilon_V^{\max}$ от напряжений x , выраженных в долях предела прочности $x=\sigma/\sigma_c$, или $x=\sigma/\sigma_{2c}$. Можно показать, что на всем интервале изменения x ($0 \leq x \leq 1$) относительная дилатансия при одноосном сжатии превосходит относительную дилатансию при двухосном равнокомпонентном сжатии, совпадая с ней лишь при $x=0$ (начало деформирования) и $x=1$ (момент разрушения).

Авторы благодарны Р. Л. Салганику, Л. И. Слепяну и В. И. Шемякину за ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brace W. F., Paulding B. W., Scholz C. H.* Dilatancy in the fracture of crystalline rocks // *J. Geophys. Res.* 1966. V. 71. No. 16. P. 3939–3953.
2. *Scholz C. H.* Microfracturing and the inelastic deformation of rock in compression // *J. Geophys. Res.* 1968. V. 73. No. 4. P. 1417–1432.
3. *Sano O, Ito I., Terada M.* Influence of strain rate on dilatancy and strength of Oshima granite under uniaxial compression // *J. Geophys. Res.* 1981. V. 86. No. B10. P. 9299–9311.
4. Дилатансия и энерговыделение при мягком и жестком нагружении образцов гранита / Куксенко В. С., Мансуров В. А., Ли Р. С., Гайворонский Г. Б., Манжиков Б. Ц., Тилегенов К. Т. // *Изв. АН СССР. Физика Земли.* 1989. № 4. С. 80–84.
5. *Поль В.* Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // *Разрушение.* М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 336–520.
6. *Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г.* Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 401 с.
7. *Stevens J. L., Holcomb D. L.* A theoretical investigation of the sliding crack model of dilatancy // *J. Geophys. Res.* 1980. V. 85. No. B12.
8. *Holcomb D. L., Stevens J. L.* The reversible Griffith crack: A viable model for dilatancy // *J. Geophys. Res.* 1980. V. 85. No. 12. P. 7101–7107.
9. *Куксенко В. С., Орлов Л. Г., Фролов Д. И.* Концентрационный критерий укрупнения трещин в гетерогенных материалах // *Механика композит. материалов.* 1979. № 2. С. 195–201.
10. *Бердыев А. А., Мухамедов В. А.* О формировании макротрещины и акустической эмиссии хрупкого разрушения // *Докл. АН СССР.* 1980. Т. 255. № 6. С. 1364–1366.
11. *Челидзе Т. Л.* Методы теории перколяции в механике разрушения // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1983. № 6. С. 114–123.
12. *Германович Л. Н., Дыскин А. В.* Модель разрушения хрупкого материала с трещинами при одноосном нагружении // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1988. № 2. С. 118–131.
13. *Петров В. А.* О механизме и кинетике макроразрушения // *Физика твердого тела.* 1979. Т. 21. Вып. 12. С. 3681–3686.
14. *Оберт Л.* Хрупкое разрушение горных пород // *Разрушение.* М.: Мир, 1976. Т. 7. Ч. 1. С. 59–128.
15. *Peng S., Johnson A. M.* Crack growth and faulting in cylindrical specimens of Chelmsford granite // *Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.* 1972. V. 9. No. 1. P. 37–86.
16. *Sandha C. M., Talbot C. J., Dhir R. K.* Microfracturing of a sandstone in uniaxial compression // *Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.* 1974. V. 11. No. 3. P. 107–113.
17. *Brace W. F., Bombolakis E. G.* A note on brittle crack growth in compression // *J. Geophys. Res.* 1963. V. 68. No. 12. P. 3709–3713.
18. *Hoek B., Bieniawski Z. T.* Brittle fracture propagation in rock under compression // *Intern. J. Fract. Mech.* 1965. V. 1. No. 3. P. 137–155.
19. *Nemat-Nasser S., Horii H.* Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation and rockburst // *J. Geophys. Res.* 1982. V. 87. No. B8. P. 6805–6821.
20. *Horii H., Nemat-Nasser S.* Compression-induced microcrack growth in brittle solids: Axial splitting and shear failure // *J. Geophys. Res.* 1985. V. 90. № B4. P. 3105–3125.
21. *Horii H., Nemat-Nasser S.* Brittle failure in compression: Splitting faulting and brittle – ductile transition // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 1986. V. A319. No. 1549. P. 337–374.
22. *Adams M., Sines G.* Crack extension from flaws in a brittle material subjected to compression // *Tectonophysics.* 1978. V. 49. No. 1/2. P. 97–118.

23. *Kachanov M. L.* A' microcrack model of rock inelasticity. Pt 1, II. // *Mech. Mater.* 1982. V. 1. No. 1. P. 19-41.
24. *Moss W. C., Gupta Y. M.* A constitutive model describing dilatancy and cracking in brittle rocks // *J. Geophys. Res.* 1982. V. B87. No. 4. P. 2985-2998.
25. *Fanella D., Krajcinovic D.* A micromechanical model for concrete in compression // *Eng. Fract. Mech.* 1988. V. 29. № 1. P. 49-66.
26. *Nemat-Nasser S., Obata M.* A microcrack model of dilatancy in brittle materials // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 1988. V. 55. No. 1. P. 24-35.
27. *Никигин Л. В., Одинцов В. Н.* Образование протяженных сомкнутых трещин отрыва в хрупких горных породах // *Докл. АН СССР.* 1987. Т. 294. № 4. С. 814-817.
28. *Никигин Л. В., Одинцов В. Н.* Механика отрывного разрушения сжатых газоносных горных пород // *Изв. АН СССР, МТТ.* 1988. № 6. С. 135-144.
29. *Германович Л. Н., Черепанов Г. П.* О критериях разрушения материалов с дефектами // *ПММ.* 1987. Т. 51. № 2. С. 330-340.
30. *Isida M., Nemat-Nasser S.* On mechanics of crack growth and its effects on the overall response of brittle porous solids // *Acta met.* 1987. V. 35. No. 12. P. 2887-2898.
31. *Дыскин А. В., Салганик Р. Л.* Модель дилатансии хрупких материалов с трещинами при сжатии // *Изв. АН СССР, МТТ.* 1987. № 6. С. 168-178.
32. *Дыскин А. В.* О связи между акустической эмиссией и дилатансией при одноосном сжатии хрупких горных пород // *Изв. АН СССР, Физика Земли.* 1989. № 6. С. 31-37.
33. *Салганик Р. Л.* Механика тел с большим числом трещин // *Изв. АН СССР, МТТ.* 1973. № 4. С. 149-158.
34. *Brady B. T.* The nonlinear mechanical behavior of brittle rock. Pt I. Stress-strain behavior during regions I and II // *Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.* 1969. V. 6. No. 2. P. 221-225.
35. *Brady B. T.* The nonlinear mechanical behavior of brittle rock. Pt II. Stress (strain) behavior during regions III and IV // *Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.* 1969. V. 6. No. 3. P. 301-310.

Москва

Поступила в редакцию
6.II.1990