

УДК 539.374

© 1993 г. Г. З. ШАРАФУТДИНОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ  
 ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Настоящая статья является продолжением [1]. Основное внимание здесь уделяется вопросам, связанным с реализацией метода фотовязкопластичности — рассмотрены вопросы определения напряжений и деформаций по данным поляризационно-оптического метода в случае плоского напряженного состояния и приводится конкретный пример: решение задачи о растяжении пластинки из вязкопластического материала, имеющей центральное круговое отверстие, в условиях активного нагружения и разгрузки.

1. Основными параметрами двойного лучепреломления являются порядки полос изохром  $m$  и параметры изоклин  $\varphi$ . С компонентами тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\epsilon_{ij}$  они связаны соотношениями [1]:

$$m \cos 2\varphi = \int_0^t F_\sigma(t-\tau) d(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \int_0^t F_\epsilon(t-\tau) d(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \quad (1.1)$$

$$m \sin 2\varphi = \int_0^t F_\sigma(t-\tau) d\sigma_{12} + \int_0^t F_\epsilon(t-\tau) d\epsilon_{12} \quad (1.2)$$

где  $t$  — время.

Дополняя их определяющими соотношениями в кусочно-линейной форме [1, 2]:

$$e_{ij} = \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij} + \int_{s^1}^t \Pi_1(t-\tau) d(s_{ij} - s_{ij}^1) + \int_{s^2}^t \Pi_2(t-\tau) d(s_{ij} - s_{ij}^2) \quad (1.3)$$

где  $e_{ij}$ ,  $s_{ij}$  — компоненты девиаторов деформаций и напряжений соответственно, и одним из уравнений равновесия, например,

$$\partial\sigma_{11}/\partial x_1 + \partial\sigma_{12}/\partial x_2 = 0 \quad (1.4)$$

получим замкнутую систему уравнений относительно неизвестных  $s_{11}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{22}$ ,  $e_{11}$ ,  $e_{12}$ ,  $e_{22}$ . Материал при этом полагаем несжимаемым.

Заметим также, что в случае плоского напряженного состояния среднее напряжение  $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$  равно  $\sigma = s_{11} + s_{22}$  и, следовательно,  $\sigma_{11} = 2s_{11} + s_{22}$ ;  $\sigma_{22} = s_{11} + 2s_{22}$ .

Система уравнений (1.1) — (1.4) путем замены интегралов соответствующими суммами, а производных — разностными соотношениями, приводится к системе алгебраических уравнений, последовательно решаемых при  $t = \Delta t, 2\Delta t, \dots$ . Определяющие соотношения (1.3) при этом используются в соответствии со структурой кусочно-линейных соотношений, а именно, при  $s \equiv s_{ij} s_{ij} < s^1 < s^2$ , где  $s^1, s^2$  — предельные параметры, устанавливаемые в экспериментах, в (1.3) остается только первое слагаемое; при  $s^1 < s < s^2$  — два первых слагаемых и при  $s > s^2$  — соотношение (1.3) используется полностью. Моменты достижения указанных

предельных состояний выше были отмечены как  $t_1$  и  $t_2$ . При мгновенном нагружении до уровня напряжений, обеспечивающих выполнение условий  $s > s'$  (или  $s > s^2$ ) необходимо различать два случая. Если поведение материала при мгновенном нагружении является линейно-упругим, то при регулярных функциях  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  этот факт автоматически учитывается за счет того, что  $t_1(t_2)$ , как и  $t$  равно нулю.

Если же мгновенная реакция материала не является линейно-упругой, то в этом случае ядра интегральных операторов должны содержать сингулярные составляющие [1]. Здесь этот случай рассматриваться не будет, поскольку используемый модельный материал обладает мгновенной линейно-упругой реакцией.

Нетрудно увидеть в предложенном выше подходе обобщение известной методики разделения напряжений и деформаций в методе фотоупругости. Однако в данном случае измерение параметров изоклин, процесс сам по себе достаточно длительный и трудоемкий, зачастую осуществить по разным причинам невозможно, в первую очередь, из-за существенной зависимости напряженно-деформированного состояния от времени. Кроме того, заметим, что в отличие от порядков полос изохром, параметры изоклин не являются инвариантными величинами относительно вращения. В связи с этим рассмотрим методику разделения напряжений и деформаций при отсутствии параметров изоклин, лишь по картине изохром. Заметим, что на практике случаи измерения параметров изоклин при изучении динамических и квазистатических [3] процессов деформирования являются скорее исключением, чем правилом.

2. Будем исходить из того, что имеется лишь порядок полос  $m$ . Очевидно, что при этом число неизвестных в системе (1.1) — (1.4) увеличивается на одно и это требует увеличения числа уравнений. Поэтому добавим к указанной системе второе уравнение равновесия

$$\partial\sigma_{12}/\partial x_1 + \partial\sigma_{22}/\partial x_2 = 0 \quad (2.1)$$

В общем случае решение задачи связано с интегрированием уравнений равновесия по заданной области с использованием экспериментальных данных. Однако в ряде случаев задача может быть упрощена за счет того, что разделение напряжений и деформаций производится в критической точке модели или в ее минимальном сечении, т. е. в местах, в которых наиболее вероятно развитие нежелательных с точки зрения прочности процессов.

Вначале рассмотрим общую задачу. Как мы уже отмечали, это связано с интегрированием уравнений равновесия в некоторой области, в простейшем случае имеющей вид треугольника в прямоугольной декартовой системе координат. Для определенности предположим, что область имеет форму прямоугольного треугольника и его катеты совпадают с осями координат:  $OX_1 \equiv OX$ ,  $OX_2 \equiv OY$ . Будем считать также, что на стороне треугольника, совпадающей с осью  $OY$ , заданы необходимые граничные условия, в данном случае компоненты  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{12}$ .

Определение компонент тензоров напряжений и деформаций внутри области производится с использованием последовательных приближений.

На первом шаге при этом величины  $\epsilon_{12}$  и  $(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})$  полагаются равными нулю. Такое предположение позволяет нам определить в граничном слое последовательно значения:  $\varphi$ ,  $\sigma_{22}$ ;  $s_{11}$ ,  $s_{22}$ ;  $s$ ;  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{12}$ ,  $\epsilon_{22}$ . После этого полученные в первом приближении величины должны быть использованы в соотношениях (1.1) и (1.2) для определения неизвестных в указанном выше списке во втором приближении и т. д. Тем самым при заданных  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{12}$  компоненты тензоров напряжений и деформаций на границе будут определены. Отнесем эти величины к первому, вертикальному граничному слою. Во втором вертикальном слое компоненты  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{12}$  вычисляются при помощи уравнений равновесия, в простейшем случае представленных в конечно-разностном виде. Нетрудно видеть, что вследствие выполнения операции дифференцирования путем вычисления отношений конеч-

ных разностей, число узлов во втором вертикальном слое уменьшится на единицу, что в общем случае и определяет область интегрирования уравнений равновесия как треугольную. Повторяя все процедуры во втором вертикальном слое и переходя затем к третьему и т. д., последовательно определим значения всех интересующих нас величин во всех узлах выбранной области.

Обратимся теперь к более простому способу разделения напряжений и деформаций вдоль оси симметрии модели. Способ базируется на предложенных в [4] приближенных формулах для компонент тензора напряжений на оси симметрии тела, выраженных через разность нормальных компонент  $(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \equiv (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \equiv r$ :

$$\sigma_{xx} = r/4 + C_1 x + C_2 \quad (2.2)$$

$$\sigma_{yy} = -3r/4 + C_1 x + C_2 \quad (2.3)$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные.

Однако предложенная в [4] методика разделения напряжений и деформаций может быть использована лишь при условии справедливости уравнения

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (2.4)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Поэтому для ее применения необходимо показать справедливость уравнения (2.4) в данном случае, при использовании кусочно-линейной формы определяющих соотношений. Это сделано в работе [5], где показано, что исходя из уравнения совместности для деформаций в плоском случае и при использовании кусочно-линейной формы определяющих соотношений для несжимаемого материала уравнение (2.4) остается справедливым.

Для определения входящих в (2.2) и (2.3) постоянных  $C_1$  и  $C_2$  воспользуемся граничными условиями. Полагая, в частности, что концы сечения, совпадающего с осью симметрии, находятся на свободных границах, имеем

$$\sigma_{xx} |_{\bar{x}=0} = 0, \quad \sigma_{xx} |_{\bar{x}=1} = 0 \quad (2.5)$$

При таких условиях получим

$$C_1 = (r(0) - r(1))/4, \quad C_2 = r(0)/4 \quad (2.6)$$

Для использования соотношений (2.2), (2.3) необходимо определить значения разности нормальных компонент напряжений. С этой целью обратимся к соотношению (1.1), в котором порядок полос вдоль выбранного сечения является известной функцией:  $m = m(x, t)$ ; при этом параметр изоклины  $\varphi$  известен и он не изменяется во времени вдоль оси симметрии, как, впрочем, и собственные направления тензоров напряжений и деформаций. Однако входящая в это соотношение величина  $(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})$  нам пока не известна; нам не известна также и разность нормальных компонент тензора напряжений. Вместе с тем, исходя из представленной информации, нетрудно предложить схему последовательных приближений, суть которых сводится к следующему: при фиксированных  $x$  и  $t$  величина  $(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})$  на первом шаге полагается равной нулю. При этом предположении вычисляется значение  $r$ . Затем при помощи (2.2) и (2.3) — компоненты  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ , а также  $s_{xx}, s_{yy}$  и  $s'$ . Далее, при помощи определяющих соотношений вычисляем значения величин  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$ , а также их разность. Эти величины используются на втором шаге для последовательного определения указанных выше величин и т. д.

3. Приведены результаты практического применения метода фотовязкопластичности по изучению напряженно-деформированного состояния в плоских моделях из оптически чувствительного материала — целлулоида в условиях активного нагружения и разгрузки.

$t$	$x = 0$	$x = 0,025$	$x = 0,075$	$x = 0,15$	$x = 0,25$	$x = 0,5$	$x = 1$
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	4,05	3,33	2,45	1,85	1,55	1,20	0,85
7	4,15	3,70	2,70	2,05	1,65	1,30	1,00
60	5,10	4,45	3,55	2,95	2,50	2,05	1,55
65	2,50	2,00	1,60	1,20	0,95	0,48	0,85
67	2,05	1,65	1,40	1,05	0,78	0,30	0,70
120	1,80	1,55	1,20	0,85	0,60	0,15	0,50
125	4,95	4,40	3,45	2,75	2,25	1,70	1,17
127	6,15	4,58	3,62	2,87	2,35	1,80	1,25
180	5,25	4,78	3,95	3,20	2,70	2,20	1,60
185	2,50	2,27	1,85	1,50	1,15	0,62	0,98
240	2,20	1,92	1,55	1,20	0,95	0,45	0,80

Общая схема применения метода при решении задач на модели такова. В соответствии с условиями моделирования устанавливаются параметры геометрического и силового подобия, после чего производится решение задачи на модели и пересчет этого решения на прототип из конструкционного материала. Заметим однако, что в ряде случаев, например, при анализе аналитических или численных методов решения соответствующих классов задач механики деформируемого твердого тела, определенный смысл имеет анализ напряженно-деформированного состояния непосредственно на модели.

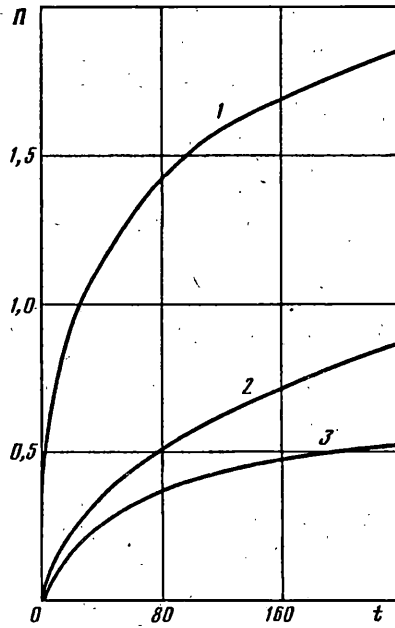
При экспериментальной реализации метода модель из оптически чувствительного материала помещают в термостат, в котором задают необходимый температурный режим. После прогрева модель нагружается в соответствии с заданными по условиям моделирования краевыми условиями. Картина полос изохром, возникающая при этом в модели, фиксируется при помощи фото- или видеотехники или каким-либо иным способом, обеспечивающим возможность построения зависимости порядков полос изохром от времени в любой фиксированной точке исследуемой модели.

В качестве модели была взята пластина из целлулоида. Основные размеры модели следующие: длина пластины — 300 мм, ширина — 100 мм, толщина — 3,9 мм, диаметр центрально расположенного отверстия — 20 мм.

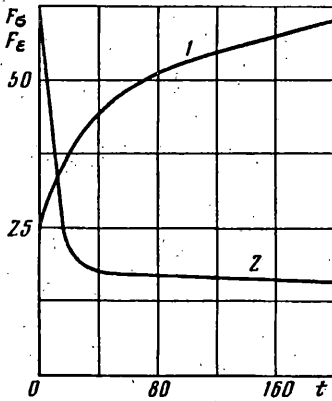
Эксперимент проводится в термостате, при постоянной температуре  $T = 55^\circ \text{C}$ . Общая продолжительность эксперимента — 4 часа. Характер нагружения — растягивающая сила, равномерно распределенная по контуру короткой стороны, действовала в течение 60 мин: первые 5 мин пластина нагружалась с постоянной скоростью до уровня 6500 Н. Этот уровень удерживался до момента  $t = 60$  мин. Затем в течение 5 мин разгрузка с такой же скоростью. В интервале от 65 мин до 120 мин к модели не прикладывались никакие внешние силы. В последующие 120 мин этот цикл нагружения — разгрузки был повторен.

В течение эксперимента было получено свыше 50 кадров с картинами полос изохром. К сожалению, единичные кадры не дают представления о развитии процесса, а все кадры поместить здесь представляется невозможным; поэтому считаем рациональным поместить здесь наиболее характерные экспериментальные данные в краткой таблице. В ней приведены значения порядков полос изохром в некоторых точках минимального сечения пластины, обозначенных в безразмерных координатах ( $x = 0$  соответствует точке выхода рассматриваемого сечения на контур кругового отверстия,  $x = 1$  — на внешний контур пластины), для различных моментов времени.

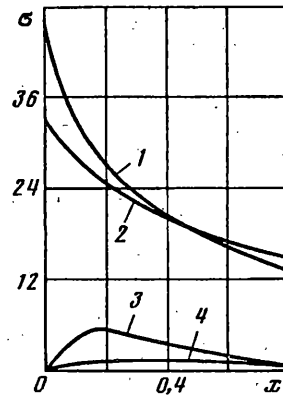
Разделение напряжений и деформаций вдоль указанной линии симметрии осуществлялось при помощи описанной выше процедуры.



Фиг. 1



Фиг. 2



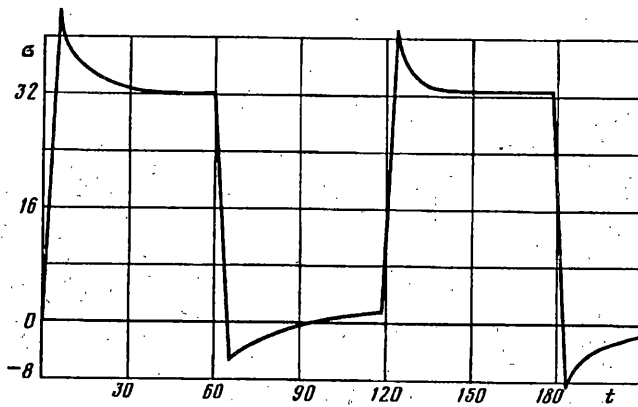
Фиг. 3

На фиг. 1 (кривые 1 — 3) приведены графики функций ползучести  $\Pi(t) \cdot 1000$ ,  $\Pi_1(t) \cdot 500$ ,  $\Pi_2(t) \cdot 50$  (все — в  $\text{МПа}^{-1}$ ) в зависимости от времени  $t$  (в мин). Предельные значения величин  $s^1 = 329 \text{ МПа}^2$ ,  $s^2 = 508 \text{ МПа}^2$ . Функции  $F_\sigma$  (в  $\text{Нм/МПа}$ ) и  $F_\varepsilon \cdot 0,005$  (в  $\text{Нм}$ ) в зависимости от времени  $t$  приведены на фиг. 2. (кривые 1, 2 соответственно). Коэффициент перевода относительной разности хода в порядок полос изохром в данном случае равен  $458 \text{ Нм/полос}$ .

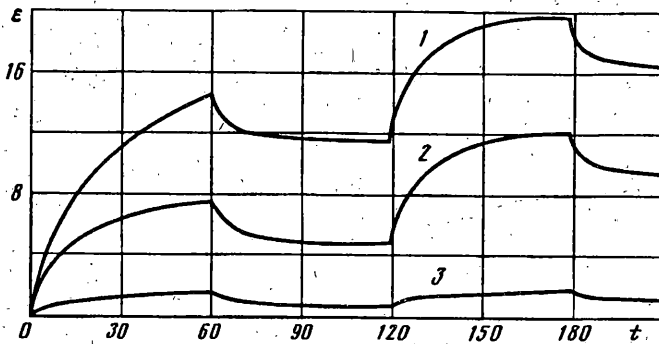
Обработка экспериментальной информации производилась на ЭВМ при помощи специально для этого случая составленной программы. Результаты расчетов частично представлены на фиг. 3—6.

На фиг. 3 приведены эпюры напряжений  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xx}$  (в  $\text{МПа}$ ) вдоль минимального сечения пластины (направление действия силы совпадает с осью  $OY$ ). Кривая 1 соответствует эпюре  $\sigma_{yy}$  при  $t = 5$  мин после начала нагружения; 2 —  $\sigma_{yy}$  — при  $t = 60$  мин; 3 и 4 —  $\sigma_{xx}$  при  $t = 5$  и 60 мин соответственно.

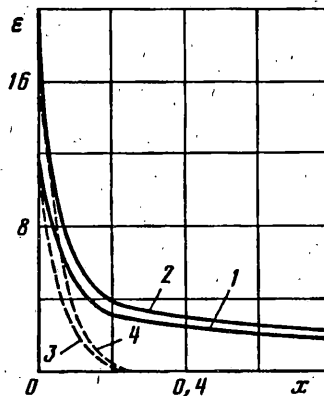
Характер изменения компоненты напряжения  $\sigma_{yy}$  в точке сечения, выходящей на контур кругового отверстия в зависимости от времени приведен на фиг. 4.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Обратим здесь внимание как на локальную релаксацию напряжений, так и на появление в этой точке сжимающих напряжений, что указывает на существенное влияние величин напряжений на характер поведения деформируемого материала. Соответствующий этой точке процесс деформирования представлен на фиг. 5 (кривая 1). Две другие кривые на этом рисунке также представляют процесс деформирования: в середине сечения ( $x = 0,5$ ) и на другом конце сечения ( $x = 1$ ). Деформации  $\epsilon_{yy}$  здесь приведены в процентах.

И, наконец, на фиг. 6 представлены эпюры деформаций  $\epsilon_{yy}$  (в %) в зависимости от  $x$  в минимальном сечении при  $t = 60$  мин и  $t = 180$  мин (кривые 1 и 2). Здесь же приведены эпюры остаточных деформаций  $\epsilon_{yy}$  (в %) после первого и второго циклов нагружения (кривые 3 и 4 соответственно).

Анализ полученного решения показал, что интегральное условие равновесия выполняется с точностью до 10—12%. Кроме того, путем реализации в стержне из используемого оптически чувствительного материала, при принятых условиях эксперимента, закона изменения порядков полос изохром в точке сечения  $x = 0$  была получена зависимость напряжений от времени (для  $0 < t < 60$  мин), с указанной точностью совпадающая с экспериментальным решением.

#### Список литературы

1. Шарафутдинов Г. З. Исследование метода фотовязкопластичности // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1, с. 114—123.
2. Шарафутдинов Г. З. Об определяющих соотношениях вязкоупругости и вязкопластичности // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 125—133.
3. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
4. Вологжанинов Ю. И. Приближенный метод разделения напряжений в фотоупругости // Прикл. мех. 1981. № 8, с. 56—61.
5. Шарафутдинов Г. З. Об определяющих соотношениях в задачах вязкопластичности // Прикл. механика. 1992. Т. 28. № 5. С. 40—47.

Москва

Поступила в редакцию  
23.1.1991