МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1993

УДК 531.382

© 1993 г. В. Н. КОШЛЯКОВ

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ДВИЖЕНИИ БЫСТРОВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА ВБЛИЗИ ВЕРТИКАЛИ

Статья посвящена развитию публикаций [1, 2]. С помощью аппарата параметров Родрига — Гамильтона строится, в отличие от [1], точное частное решение уравнений движения тяжелого твердого тела вблизи вертикали. Получены, в развитие [2], явные условия неустойчивости названного решения.

1. Постановка задачи и исходные уравнения. Телу произвольной формы с неподвижной точкой O сообщается быстрое вращение с угловой скоростью ω относительно оси Oz связанного с телом ортогонального трехгранника $Oxyz$, оси которого совпадают с направлениями главных осей инерции тела для точки O. Предполагается, что ось Oz в начальный момент совпадает с вертикалью $O\zeta$ [1, 2]. Центр тяжести тела полагается не лежащим на оси Oz; x_c, y_c, z_c — его координаты в осях трехгранника $Oxyz$. Будем также полагать выполняющимися условия $A + B > C$, $B + C > A$, $C + A > B$, где A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Для определенности исключим из рассмотрения случай вращения вокруг средней оси эллипсоида инерции ($A < C < B$), а также стационарные вращения Штауде относительно вертикальных осей, не являющихся главными для точки O. Диссипация энергии считается пренебрежимо малой.

Аналог уравнений Эйлера — Пуассона, выраженный посредством параметров Родрига — Гамильтона, имеет вид [1, 2]:

$$2ABCd^2\lambda/dt^2 + Q\lambda = 0 \tag{1.1}$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — столбцевая матрица параметров Родрига — Гамильтона, Q — матрица вида

$$Q = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{Vmatrix}$$

$$a_1 = 2ABC(\dot\lambda_0^2 + \dot\lambda_1^2 + \dot\lambda_2^2 + \dot\lambda_3^2),\quad a_2 = BC[M_x - (C - B)qr]$$

$$a_3 = CA[M_y - (A - C)rp],\quad a_4 = AB[M_z - (B - A)pq] \tag{1.2}$$

Здесь M_x, M_y, M_z — проекции на оси Ox, Oy и Oz момента, создаваемого в данном случае силой P веса тела; p, q, r — проекции на те же оси вектора мгновенной угловой скорости тела.

Выражения параметров Родрига — Гамильтона посредством функций углов Эйлера имеют вид

$$\lambda_0 = \cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2},\quad \lambda_1 = \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}$$

$$\lambda_2 = \sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2},\quad \lambda_3 = \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2} \tag{1.3}$$

Параметры λ_s связаны условием

$$\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1 \tag{1.4}$$

Воспользуемся далее неособенным преобразованием вращения, причем, в отличие от [1], применим его непосредственно к системе (1.1). Положим

$$\lambda_1 = -u_1\cos\chi - u_2\sin\chi,\quad \lambda_0 = u_0\cos\chi + u_3\sin\chi$$

$$\lambda_2 = -u_1\sin\chi + u_2\cos\chi,\quad \lambda_3 = u_0\sin\chi - u_3\cos\chi\quad (\chi = \omega t/2) \tag{1.5}$$

где u_k — некоторые новые переменные. Угловая величина χ соответствует вращению с начальной угловой скоростью ω, когда ось Oz совпадает с вертикалью $O\zeta$. Начальной ориентации тела соответствует равенство нулю угла нутации ϑ. В последнем случае, как известно, вращение вырождается в поворот на угол $\psi+\varphi$ относительно оси $O\zeta$ (ψ — угол прецессии, φ — угол чистого вращения).

Преобразование (1.5) приводит исходную систему (1.1) к нелинейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, которые в матричной записи представляются следующим образом

$$a_0 d^2u/dt^2 + a_0\Omega du/dt + Su = 0,\quad (u = (u_0, u_1, u_2, u_3))$$

$$a_0 = 2ABC,\quad \Omega = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},\quad S = \begin{Vmatrix} s & -a_2 & a_3 & -a_4 \\ a_2 & s & a_4 & a_3 \\ -a_3 & -a_4 & s & a_2 \\ a_4 & -a_3 & -a_2 & s \end{Vmatrix} \tag{1.6}$$

$$s = a_0\,[\dot u_0(\dot u_0 + \omega u_3) + \dot u_1(\dot u_1 + \omega u_2) + \dot u_2(\dot u_2 - \omega u_1) + \dot u_3(\dot u_3 - \omega u_0)]$$

Далее понадобятся выражения проекций M_x, M_y, M_z, а также p, q, r через переменные u_k ($k=0, 1, 2, 3$). Имеем

$$M_x = -P\,\{2(u_0u_1 + u_2u_3)z_c + [1 - 2(u_1^2 + u_2^2)]y_c\}$$

$$M_y = P\,\{2(u_0u_2 - u_1u_3)z_c + [1 - 2(u_1^2 + u_2^2)]x_c\} \tag{1.7}$$

$$M_z = 2P\,\{(u_0u_1 + u_2u_3)x_c + [u_1u_3 - u_0u_2]y_c\}$$

$$p = 2\,[u_1\dot u_0 - u_0\dot u_1 - u_3\dot u_2 + u_2\dot u_3 + \omega(u_1u_3 - u_0u_2)]$$

$$q = 2\,[-u_2\dot u_0 - u_3\dot u_1 + u_0\dot u_2 + u_1\dot u_3 - \omega(u_0u_1 + u_2u_3)]$$

$$r = \omega - 2\omega(u_1^2 + u_2^2) + 2(u_3\dot u_0 - u_2\dot u_1 + u_1\dot u_2 - u_0\dot u_3) \tag{1.8}$$

Матричное уравнение (1.6) допускает некоторое точное частное решение. Это решение, обращающее в нуль матрицу S и соответствующее постоянным u_k (при этом $s=0$), получается путем приравнивания нулю составляющих a_j ($j=2, 3, 4$) матрицы S. К получающимся при этом трем уравнениям присоединяем условие (1.4), которому, в силу преобразования (1.5) удовлетворяют переменные u_k. Обозначая через u_k^* значения переменных u_k, соответствующие указанному частному решению, приходим к четырем уравнениям вида

$$2\{(C-B)[1-2(u_1^{*2}+u_2^{*2})]\omega^2-Pz_c\}(u_0^*u_1^*+u_2^*u_3^*)=P[1-2(u_1^{*2}+u_2^{*2})]y_c$$

$$2\{(C-A)[1-2(u_1^{*2}+u_2^{*2})]\omega^2-Pz_c\}(u_0^*u_2^*-u_1^*u_3^*)=P[1-2(u_1^{*2}+u_2^{*2})]x_c$$

$$2(B-A)\omega^2(u_0^*u_2^*-u_1^*u_3^*)(u_0^*u_1^*+u_2^*u_3^*)=$$

$$=P[(u_0^*u_1^*+u_2^*u_3^*)x_c+(u_1^*u_3^*-u_0^*u_2^*)y_c]$$

$$u_0^{*2}+u_1^{*2}+u_2^{*2}+u_3^{*2}=1 \tag{1.9}$$

из которых определяются неизвестные u_k^*.

Движение, которому соответствуют решения u_k^*, удовлетворяющие уравнениям (1.9), выбираем в качестве невозмущенного. В возмущенном движении полагаем

$$u_k=u_k^*+x_k \tag{1.10}$$

где x_k — вариации величин u_k, считающиеся малыми.

Учитывая уравнения (1.9), осуществляем подстановку (1.10) в матричном уравнении (1.6). В результате приходим к уравнению вида

$$a_0d^2x/dt^2+D^*dx/dt+S'u^*=X \tag{1.11}$$

где $x=(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$, $u^*=(u_0^*,u_1^*,u_2^*,u_3^*)$ — столбцевые матрицы величин x_k и u_k^*, X — матрица с элементами, зависящими от x_k и $x_k^{\boldsymbol\cdot}$ в степени выше первой, D^* и S' — матрицы вида

$$D^*=a_0\omega\begin{Vmatrix} u_0^*u_3^* & u_0^*u_2^* & -u_0^*u_1^* & 1-u_0^{*2}\\ u_1^*u_3^* & u_1^*u_2^* & 1-u_1^{*2} & -u_1^*u_0^*\\ u_2^*u_3^* & -(1-u_2^{*2}) & -u_1^*u_2^* & -u_2^*u_0^*\\ -(1-u_3^{*2}) & u_3^*u_2^* & -u_3^*u_1^* & -u_0^*u_3^*\end{Vmatrix},$$

$$S'=\begin{Vmatrix} 0 & -a_2' & a_3' & -a_4'\\ a_2' & 0 & a_4' & a_3'\\ -a_3' & -a_4' & 0 & a_2'\\ a_4' & -a_3' & -a_2' & 0\end{Vmatrix}$$

Здесь через a_j' обозначены значения величин a_j, относящиеся к возмущенному движению и линейно зависящие от вариаций x_k и их производных.

Переходя в (1.2) к переменным u_k согласно неособенному преобразованию (1.5) и используя (1.7), (1.8) и (1.9), получаем выражения для коэффициентов a_j'. Ниже приводятся эти выражения с некоторым изменением обозначений, принятых в [2]. Имеем

$$a_2'=-2BC\{m_2(u_1^*x_0+u_0^*x_1+u_3^*x_2+u_2^*x_3)-m_2'(u_1^*x_1+u_2^*x_2)+$$

$$+(C-B)\omega[-(n_2u_2^*+2n_3u_3^*)x_0^{\boldsymbol\cdot}+(2n_3u_2^*-n_2u_3^*)x_1^{\boldsymbol\cdot}+$$

$$+(n_2u_0^*-2n_3u_1^*)x_2^{\boldsymbol\cdot}+(2n_3u_0^*+n_2u_1^*)x_3^{\boldsymbol\cdot}]\}$$

$$a_3'=2CA\{m_3(u_2^*x_0-u_3^*x_1+u_0^*x_2-u_1^*x_3)-m_3'(u_1^*x_1+u_2^*x_2)+$$

$$+ (C - A)\,\omega\,[(n_2 u_1^* - 2n_3' u_3^*)\, x_0^{\cdot} - (n_2 u_0^* - 2n_3' u_2^*)\, x_1^{\cdot} -$$

$$- (2n_3' u_1^* + n_2 u_3^*)\, x_2^{\cdot} + (2n_3' u_0^* + n_2 u_2^*)\, x_3^{\cdot}]\,\}$$

$$a_4' = 2AB\,\{\, m_4 (u_1^* x_0 + u_0^* x_1 + u_3^* x_2 + u_2^* x_3) - m_4' (u_2^* x_0 - u_3^* x_1 + u_0^* x_2 - u_1^* x_3) +$$

$$+ 2 (B - A)\,\omega\,[(n_3 u_1^* - n_3' u_2^*)\, x_0^{\cdot} - (n_3 u_0^* + n_3' u_3^*)\, x_1^{\cdot} +$$

$$+ (n_3' u_0^* - n_3 u_3^*)\, x_2^{\cdot} + (n_3' u_1^* + n_3 u_2^*)\, x_3^{\cdot}]\,\} \tag{1.12}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$m_2 = Pz_c - (C - B)\,\omega^2 n_2,\;\; m_2' = Py_c - 4\,(C - B)\,\omega^2 n_3,\;\; n_3 = u_0^* u_1^* + u_2^* u_3^*$$

$$m_3 = Pz_c - (C - A)\,\omega^2 n_2,\;\; m_3' = Px_c - 4\,(C - A)\,\omega^2 n_3',\;\; n_3' = u_0^* u_2^* - u_1^* u_3^*$$

$$m_4 = Px_c - 2\,(B - A)\,\omega^2 n_3',\;\; m_4' = Py_c + 2\,(B - A)\,\omega^2 n_3,\;\; b_2 = 1 - 2\,(u_1^{*2} + u_2^{*2}) \tag{1.13}$$

2. Частное решение системы (1.6). Геометрическая интерпретация. Нетрудно показать, что уравнения (1.9) допускают следующее частное решение

$$u_3^* = 0, \quad u_0^* = [1 - (u_1^{*2} + u_2^{*2})]^{1/2} \tag{2.1}$$

где u_1^* и u_2^* удовлетворяют нелинейной системе алгебраических уравнений[1]

$$2\,\{\,(C-B)\,[1-2\,(u_1^{*2}+u_2^{*2})]\,\omega^2 - Pz_c\,\}\,[1-(u_1^{*2}+u_2^{*2})]^{1/2}\,u_1^* = P\,[1 - 2\,(u_1^{*2}+u_2^{*2})]\,y_c \tag{2.2}$$

$$2\,\{\,(C-A)\,[1-2\,(u_1^{*2}+u_2^{*2})]\,\omega^2 - Pz_c\,\}\,[1-(u_1^{*2}+u_2^{*2})]^{1/2}\,u_2^* = P\,[1 - 2\,(u_1^{*2}+u_2^{*2})]\,x_c$$

Действительно, полагая $u_3^* = 0$ в первых двух из уравнений (1.9), находим из них произведения $u_0^* u_1^*$ и $u_0^* u_2^*$. Последние, будучи подставлены в третье из уравнений системы (1.9), где также полагаем $u_3^* = 0$, обращают его в тождество. Полагая далее $u_3^* = 0$ в четвертом из уравнений системы (1.9), приходим ко второму из решений (2.1). Решение (2.1)—(2.2), в отличие от полученного в [1], является точным.

Уравнения (2.2) образуют систему двух нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных u_1^* и u_2^*. Из них легко получаются приближенные, но практически достаточно точные, формулы для нахождения величин u_1^* и u_2^*. Обращаясь к выражениям (2.2), имеем

$$Px_c = 2\,\{\,(C-A)\,[1-2\,(u_1^{*2}+u_1^{*2})]\,\omega^2 - Pz_c\,\}\,[1-(u_1^{*2}+u_2^{*2})]^{1/2}\,[1-2\,(u_1^{*2}+u_2^{*2})]^{-1}\,u_2^*$$

$$Py_c = 2\,\{\,(C-B)\,[1-2\,(u_1^{*2}+u_1^{*2})]\,\omega^2 - Pz_c\,\}\,[1-(u_1^{*2}+u_2^{*2})]^{1/2}\,[1-2\,(u_1^{*2}+u_2^{*2})]^{-1}\,u_1^* \tag{2.3}$$

[1] Исправим неточность, допущенную в [2]. В третьем из уравнений (5) цитируемой статьи, аналогичных уравнениям (1.9), по недосмотру пропущены члены с u_3^*, что не влияет на дальнейшее изложение, поскольку $u_3^* = 0$ в силу решения (2.1), которое в [2] также приводится.

Используя строку Тейлора в правых частях полученных выражений, получаем

$$Px_c = 2\,[(C - A)\,\omega^2 - Pz_c]\,u_2^* + o\,(u_s^{*3})$$

$$Py_c = 2\,[(C - B)\,\omega^2 - Pz_c]\,u_1^* + o\,(u_s^{*3}) \quad (s = 1, 2) \tag{2.4}$$

где через $o\,(u_s^{*3})$ условно обозначена совокупность членов порядка u_s^{*3} и выше. Применяя к выражениям (2.3) несложную итерацию, убеждаемся, что невыписанные в (2.4) члены оказываются порядка ω^{-6} и выше. В предположении достаточно большой величины ω они могут быть неучитываемы. В этом случае имеем

$$u_1^* = Py_c/2\,[(C - B)\,\omega^2 - Pz_c], \quad u_2^* = Px_c/2\,[(C - A)\,\omega^2 - Pz_c] \tag{2.5}$$

Что касается величины u_0^*, то применительно к этому же случаю, можно полагать $u_0^* = 1$.

Когда $C > B \geq A$ или $C < B \leq A$, что соответствует вращениям относительно наименьшей или наибольшей из полуосей эллипсоида инерции для точки O, малость величин (2.5) всегда может быть обеспечена выбором достаточно большой ω.

Движение, которому соответствуют решения (2.1) и (2.2), выберем в качестве невозмущенного. Ему нетрудно дать геометрическую интерпретацию. В невозмущенном движении ось Oz тела отклонена от вертикали на угол ϑ^*, значение которого находится из представлений (1.3). С учетом (1.5) имеем

$$\sin \vartheta^*/2 = (\lambda_1^{*2} + \lambda_2^{*2})^{1/2} = (u_1^{*2} + u_2^{*2})^{1/2} \tag{2.6}$$

Для нахождения остальных углов Эйлера, соответствующих невозмущенному движению, воспользуемся представлениями [3]:

$$\operatorname{tg}\psi = (\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3)/(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3), \quad \operatorname{tg}\varphi = (\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)/(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) \tag{2.7}$$

Принимая во внимание преобразование (1.5) и учитывая, что, в силу решений (1.9) имеем $u_3^* = 0$, получим $\operatorname{tg}\psi^* = (u_1^* \sin 2\chi - u_2^* \cos 2\chi)/(u_1^* \cos 2\chi + u_2^* \sin 2\chi)$. Полагая здесь $u_1^* = M \cos \varepsilon$, $u_2^* = M \sin \varepsilon$, где M и ε — некоторые постоянные, найдем

$$\psi^* = 2\chi - \varepsilon = \omega t - \varepsilon, \quad \varepsilon = \operatorname{arctg}\,(u_2^*/u_1^*) \tag{2.8}$$

Используя второе из представлений (2.7), получаем, аналогично предыдущему, $\varphi^* = \varepsilon$, где ε определяется согласно (2.8).

Таким образом, в невозмущенном движении выполняется условие $\psi^* + \varphi^* = \omega t$. Ось Oz тела вращается вокруг оси $O\zeta$ с постоянной угловой скоростью ω, описывая при этом прямой круговой конус с вершиной в точке O. Образующая конуса составляет угол ϑ^* с вертикалью $O\zeta$, значение которого определяется формулой (2.6). Неподвижный аксоид вырождается в ось $O\zeta$, подвижным аксоидом служит прямой конус с осью Oz. Параметры Родрига — Гамильтона, отнесенные к невозмущенному движению, определяются следующими выражениями

$$\lambda_0^* = \cos\frac{\vartheta^*}{2}\cos\frac{\omega t}{2}, \quad \lambda_1^* = \sin\frac{\vartheta^*}{2}\cos\left(\frac{\omega t}{2} - \varepsilon\right)$$

$$\lambda_2^* = \sin\frac{\vartheta^*}{2}\sin\left(\frac{\omega t}{2} - \varepsilon\right), \quad \lambda_3^* = \cos\frac{\vartheta^*}{2}\sin\frac{\omega t}{2}$$

3. Исследование уравнений возмущенного движения. Группируя с учетом выражений (1.12) члены с x_s и $x_s^{\cdot}$, линейную часть матричного уравнения (1.11) можно представить в форме

$$a_0 d^2x/dt^2 + Vdx/dt + Wx = 0 \tag{3.1}$$

где V и W — некоторые постоянные квадратные матрицы размера 4×4.

Анализ уравнения (3.1) упрощается, если учесть преобразование (1.5) и частное решение (2.1)—(2.2). Преобразование (1.5) не изменяет условия нормировки (1.4) в отношение величин u_k, вследствие чего имеем

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \tag{3.2}$$

В силу подстановки (1.10) и решения (2.1), согласно которому $u_3^* = 0$, имеем $u_3 = u_3^* + x_3 = x_3$. Поэтому, в рамках линейного приближения в отношении величин x_k, условие (3.2) после осуществления в нем подстановки (1.10) уже в переменных u_0, u_1 и u_2, представляется в форме

$$u_0^* x_0 + u_1^* x_1 + u_2^* x_2 = 0 \tag{3.3}$$

В силу постоянства величин u_k^*, имеем из (3.3):

$$\sum_{k=0}^{2} u_k^* x_k^{\cdot} = 0, \quad \sum_{k=0}^{2} u_k^* x_k^{\cdot\cdot} = 0 \tag{3.4}$$

Условия (3.3) и (3.4) должны соблюдаться в любое мгновение времени, в том числе и в начальное. Названные условия не содержат переменную x_3 и ее производную; поэтому соотношениям (3.3)—(3.4) можно удовлетворить, оперируя лишь с тремя дифференциальными уравнениями второго порядка, отнесенными к переменным x_0, x_1 и x_2. Что касается самой переменной x_3, входящей в названные уравнения, то нетрудно показать, что, находясь в пределах линейного приближения, вообще можно считать $x_3 = x_3^{\cdot} = 0$. С этой целью выпишем, руководствуясь преобразованием (1.5), обратные представления для переменных u_0 и u_3:

$$u_0 = \lambda_0 \cos\chi + \lambda_3 \sin\chi, \quad u_3 = \lambda_0 \sin\chi - \lambda_3 \cos\chi \tag{3.5}$$

Подставляя в первое из выражений (3.5) значения λ_0 и λ_3 из (1.3) и учитывая (2.1), (2.6) и (3.2), будем иметь

$$u_0 = \cos\frac{\vartheta}{2}\cos\left(\chi - \frac{\psi+\varphi}{2}\right) = [1 - (u_1^2 + u_2^2)]^{1/2}\cos\left(\chi - \frac{\psi+\varphi}{2}\right) =$$

$$= (u_0^2 + u_3^2)^{1/2}\cos\left(\chi - \frac{\psi+\varphi}{2}\right) = (u_0^2 + x_3^2)^{1/2}\cos\left(\chi - \frac{\psi+\varphi}{2}\right)$$

Полученное выражение является точным. В рамках линейного приближения получаем отсюда условие

$$u_0\left[1 - \cos\left(\chi - \frac{\psi+\varphi}{2}\right)\right] = 0$$

Поскольку в нашем случае u_0 не обращается в нуль, то полученному условию можно удовлетворить, полагая

$$\chi = 1/2\,(\psi + \varphi) \tag{3.6}$$

Применительно к переменной u_3 имеем, с учетом (3.6):

$$u_3 = u_3^* + x_3 = x_3 = \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\left(\chi - \frac{\psi+\varphi}{2}\right) = 0 \tag{3.7}$$

Таким образом, три уравнения второго порядка, получаемые из (1.11) будут

$$\begin{gathered}
a_0 \ddot{x}_0 + a_0\omega u_0^* (u_2^*\dot{x}_1 - u_1^*\dot{x}_2) - a_2' u_1^* + a_3' u_2^* = 0 \\
a_0 \ddot{x}_1 + a_0\omega u_1^* u_2^* \dot{x}_1 + \omega a_0 (1 - u_1^{*2})\dot{x}_2 + a_2' u_0^* + a_4' u_2^* = 0 \\
a_0 \ddot{x}_2 - a_0\omega (1 - u_2^{*2})\dot{x}_1 - a_0\omega u_1^* u_2^* \dot{x}_2 - a_3' u_0^* - a_4' u_1^* = 0
\end{gathered} \tag{3.8}$$

где a_2', a_3' и a_4' определяются согласно (1.12), причем следует считать u_3^* и x_3 равными нулю в силу (3.7). Имеем

$$\begin{gathered}
a_2' = -2BC\, \{ m_2 (u_1^* x_0 + u_0^* x_1) - m_2' (u_1^* x_1 + u_2^* x_2) + \\
+ (C - B)\,\omega\, [-n_2 u_2^* \dot{x}_0 + 2n_3 u_2^* \dot{x}_1 + (n_2 u_0^* - 2n_3 u_1^*)\dot{x}_2] \} \\
a_3' = 2CA\, \{ m_3 (u_1^* x_0 + u_0^* x_2) - m_3' (u_1^* x_1 + u_2^* x_2) + \\
+ (C - A)\,\omega\, [n_2 u_1^* \dot{x}_0 - (n_2 u_0^* - 2n_3' u_2^*)\dot{x}_1 - 2n_3' u_2^* \dot{x}_2] \} \\
a_4' = 2AB\, \{ m_4 (u_1^* x_0 + u_0^* x_1) - m_4' (u_2^* x_0 + u_0^* x_2) + \\
+ 2(B - A)\,\omega\, [(n_3 u_1^* - n_3' u_2^*)\dot{x}_0 - n_3 u_0^* \dot{x}_1 + n_3' u_0^* \dot{x}_2].
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Коэффициенты m_s и m_s' определяются формулами (1.13), где в данном случае следует полагать $n_3 = u_0^* u_1^*$, $n_3' = u_0^* u_2^*$.

Непосредственно устанавливается, что уравнения (3.8) тождественно удовлетворяют третьему из соотношений (3.4). Действительно, заменяя в нем старшие производные из уравнений (3.8), получаем

$$\begin{gathered}
\sum_{k=0}^{2} u_k^* \ddot{x}_k = u_0^* [-a_0\omega u_0^* (u_2^* \dot{x}_1 - u_1^* \dot{x}_2) + a_2' u_1^* - a_3' u_2^*] + \\
+ u_1^* [-a_0\omega u_1^* u_2^* \dot{x}_1 - \omega a_0 (1 - u_1^{*2})\dot{x}_2 - a_2' u_0^* - a_4' u_2^*] + \\
+ u_2^* [\omega a_0 (1 - u_2^{*2})\dot{x}_1 + a_0\omega u_1^* u_2^* \dot{x}_2 + a_3' u_0^* + a_4' u_1^*] \equiv 0
\end{gathered}$$

В силу принятых начальных условий удовлетворяются, в рамках линейного приближения, и остальные выражения (3.3) и (3.4).

Обращаясь теперь к уравнениям (3.8) и выражениям (3.9), замечаем, что в состав каждого из названных уравнений входят члены с первыми производными $\dot{x}_k$ $(k = 0, 1, 2)$ от искомых функций. Наличие таких членов, однако, отнюдь не свидетельствует о наличии в системе демпфирующих или, наоборот, «ускоряющих сил» [4], а обусловлено спецификой аппарата параметров Родрига — Гамильтона (напомним, что по самой постановке задачи демпфирование не учитывается). В рассматриваемом случае такие члены вообще могут быть исключены во всех трех уравнениях системы (3.8) с помощью второго из условий (3.4). Выполняя это исключение и придерживаясь точности представлений (2.4), приходим к уравнению (3.1), где следует считать $x = (x_0, x_1, x_2)$. В результате трудоемких но, по существу, несложных выкладок удается получить явное представление матриц V и W для данного случая. Имеем

$$V = 2\omega \left\| \begin{matrix} 0 & AC(A+B-C)u_2^* & -BC(A+B-C)u_1^* \\ \nu_2 u_2^* & 0 & BC(A+B-C) \\ \nu_1 u_1^* & -(A+B-C)AC & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$W = \left\| \begin{matrix} 0 & -PBCy_c & -PCAx_c \\ PBCy_c & 2BC\,[(C-B)\omega^2 - Pz_c] & \mu_2 u_1^* u_2^* \\ PCAx_c & \mu_1 u_1^* u_2^* & 2CA\,[(C-A)\omega^2 - Pz_c] \end{matrix} \right\| \qquad (3.10)$$

$$\nu_1 = -A\,[2(C-B)(B+C-A) - C(A+B-C)],$$

$$\nu_2 = B\,[2(C-A)(A+C-B) - C(A+B-C)]$$

$$\mu_1 = -4A\,\{C\,[(C-A)\omega^2 + Pz_c] + B\,[(C-B)\omega^2 - Pz_c]\}$$

$$\mu_2 = -4B\,\{C\,[(C-B)\omega^2 + Pz_c] + A\,[(C-A)\omega^2 - Pz_c]\}$$

Характеристическое уравнение системы (3.8) имеет вид

$$(2ABC)^3\varkappa^6 + a_2\varkappa^4 + a_3\varkappa^3 + a_4\varkappa^2 + a_5\varkappa + a_6 = 0 \qquad (3.11)$$

Член с $\varkappa^5$ отсутствует, так как $\mathrm{Sp}\,V \equiv 0$ в силу (3.10).

Не следует отождествлять уравнение (3.11) с характеристическим уравнением первого приближения системы Эйлера — Пуассона, адекватной рассматриваемому случаю, в силу нелинейной и неканонической связи (1.3) углов Эйлера с параметрами Родрига — Гамильтона. В связи с этим, уже в линейном приближении системы (1.11) удается учесть обстоятельства, которые при использовании модели Эйлера — Пуассона требуют учета членов второго и высшего порядков малости относительно возмущенных значений искомых переменных (См. также [3], § 3, 7).

Коэффициенты уравнения (3.11) определенным образом выражаются посредством составляющих v_{jk} и w_{jk} матриц V и W. Ограничимся приведением явных значений a_5 и a_6.

Имеем

$$a_6 \equiv \det W = w_{11}w_{20}^2 + w_{22}w_{10}^2 - w_{20}w_{10}(w_{12} + w_{21}) = \qquad (3.12)$$

$$= 2BC\,[(C-B)\omega^2 - Pz_c]\,(PCAx_c)^2 + 2CA\,[(C-A)\omega^2 - Pz_c]\,(PBCy_c)^2 + \Delta_1$$

Добавка Δ_1 в полученном выражении с учетом (2.5) и (3.10) может быть представлена в виде $\Delta_1 = -P^2C^2AB\,(\mu_1 + \mu_2)\,u_1^* u_2^* x_c y_c$.

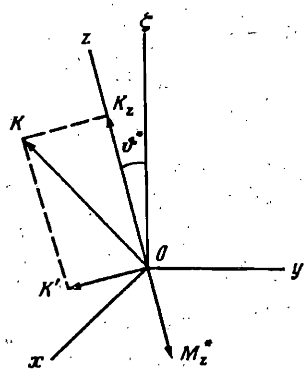
Величина Δ_1 имеет порядок ω–2 и в предположении быстрого вращения тела оказывается пренебрежимо малой в сравнении с выписанными в (3.12) членами. Поэтому положительность коэффициента a_6 всегда может быть обеспечена выполнением известных условий [3, 5]: $(C-A)\omega^2 - Pz_c > 0$, $(C-B)\omega^2 - Pz_c > 0$. Явное выражение коэффициента a_5 через составляющие матриц V и W будет

$$a_5 = -w_{10}w_{20}(v_{12} + v_{21}) + w_{10}w_{22}(v_{10} - v_{01}) + w_{20}w_{11}(v_{20} - v_{02}) + \Delta_2,$$

где $\Delta_2 = (w_{10}v_{02} - v_{10}w_{20})w_{21} + (w_{20}v_{01} - v_{20}w_{10})w_{12}$. В результате будем иметь $a_5 = 2\mu w_{11}w_{22}\omega u_1^* u_2^* + \Delta_2$, где $\mu = B\,[2(C-A)(A+C-B) - C(A+B-C)] - A\,[2(C-B)(B+C-A) - C(A+B-C)] = (B-A)\,[3(C-A)(C-B) + AB]$. Таким образом

$$a_5 = 2P^2ABC^2\omega\,[3(C-A)(C-B) + AB](B-A)x_c y_c + \Delta_2 \qquad (3.13)$$

При оговоренном выше исключении из рассмотрения случая, соответствующего вращению относительно средней оси эллипсоида инерции для точки O, выписанная



часть коэффициента a_5 обращается в нуль когда $A = B$, или когда равна нулю хотя бы одна из координат x_c и y_c центра тяжести тела, что соответствует расположению его в одной из главных плоскостей инерции Oyz или Ozx. Этим же свойством обладает и добавка Δ_2 в (3.13), явное значение которой не выписывается, поскольку она имеет порядок $(u_1^* u_2^*)^2$, что соответствует членам, не учитываемым в использованных выше представлениях (2.4).

Продолжая описываемый процесс, можно показать, что отмеченным выше свойством обладает и коэффициент a_3 в уравнении (3.11).

В общем случае, когда $A \neq B$ и $x_c y_c \neq 0$, все коэффициенты характеристического уравнения системы (3.8) оказываются неравными нулю, за исключением коэффициента при $\varkappa^5$. А в этом случае названное уравнение обязательно будет иметь по крайней мере один корень с положительной вещественной частью. Тривиальное решение уравнений (3.8), которому соответствует невозмущенное движение тела, оказывается неустойчивым.

Полученный вывод согласуется с результатами, полученными в [1, 2]. Эффект неустойчивости обусловлен дестабилизирующим влиянием поперечных дебалансов x_c и y_c. При неравных нулю x_c и y_c в моменте M_z образуется постоянная часть $\langle M_z \rangle$, на которую и реагирует экваториальная составляющая K' полного кинетического момента (см. фигуру). Точное выражение для $\langle M_z \rangle$, соответствующее невозмущенному движению, получается из (1.7):

$$< M_z > = M_z^* = 2Pu_0^* \, (u_1^* x_c - u_2^* y_c) \tag{3.14}$$

где величины u_0^*, u_1^* и u_2^* определяются согласно (2.1)—(2.2.). Если воспользоваться приближенными представлениями (2.4), то будем иметь $\langle M_z \rangle = 4 \, (B - A)\omega^2 u_1^* u_2^*$.

Если $A = B$, или хотя бы одна из величин x_c и y_c обращается в нуль, постоянная составляющая (3.14) не возникает.

Может показаться, что в случае, когда составляющая M_z^* направлена в сторону, противоположную той, которая указана на фигуре, создается прецессионное движение по направлению к вертикали $O\zeta$. Это, однако, не соответствует действительности, поскольку вектор K при наличии боковых дебалансов имеет составляющие по осям Ox и Oy и, следовательно, не лежит в плоскости $O\zeta z$.

Автор выражает признательность В. Ф. Журавлеву, Д. М. Климову и В. В. Румянцеву за обсуждение работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кошляков В. Н.* Об одном случае неустойчивости быстровращающегося тяжелого тела//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 43—50.
2. *Кошляков В. Н.* О неустойчивости вертикального вращения тяжелого тела//Укр. мат. журн. 1989. 41. № 9. С. 1214—1221.
3. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. — 286 с.
4. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.
5. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применение. Пер. с нем. 2-е изд. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. Т. 1. 315 с.

Киев

Поступила в редакцию
5.VI.1990