

УДК 539.3

© 1992 г. Н. Х. АРУТЮНЯН, В. Э. НАУМОВ, Ю. Н. РАДАЕВ

ДИНАМИЧЕСКОЕ НАРАЩИВАНИЕ УПРУГОГО СЛОЯ. Ч.2. СЛУЧАЙ ПАДЕНИЯ ПРИРАЩИВАЕМЫХ ЧАСТИЦ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Рассматривается задача о распространении продольных волн в нелинейно упругом растущем слое. Нарращивание слоя осуществляется динамическим образом: на одну из его поверхностей равномерно осаждается поток частиц материала, падающих нормально к поверхности слоя с постоянной скоростью. Противоположная поверхность слоя скреплена с жесткой стенкой.

Формулируется эволюционная граничная задача для определения закона движения растущего слоя. Для определенности описания реакции материала слоя упругий потенциал принят в форме Синьорини. Приводится точное решение этой задачи. Решение получено в форме продольной ударной волны, распространяющейся по толщине слоя с последовательными отражениями от закрепленной поверхности и свободной поверхности наращивания. Скорость и дисторсия имеют постоянные значения перед и за фронтом ударной волны и определяются с помощью условий совместности Рэнкина – Гюгоньо. Исследованы случаи отражения продольной ударной волны от жесткой стенки и поверхности наращивания слоя. Установлена аналогия с лобовым отражением от жесткой стенки изэнтропической ударной волны сжатия в идеальном газе.

Задача о равномерном наращивании упругого слоя исследована также в приближении малых деформаций.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим нелинейно упругий слой толщины h , находящийся в момент времени $t=0$ в естественном ненапряженном состоянии. Ориентируем декартову систему координат $x_{(k)}$ так, чтобы слой занимал область $\{-\infty \leq x_{(1)} \leq \infty, -\infty \leq x_{(2)} \leq \infty, -h \leq x_{(3)} \leq 0\}$ пространства. Начиная с момента $t=0+$ слой наращивается элементами того же нелинейно упругого материала, которые падают нормально на границу слоя, которая до начала наращивания совпадала с координатной поверхностью $x_{(3)}=0$. Поверхность слоя $x_{(3)}=-h$ жестко закреплена. Примем, что концентрация приращиваемых частиц в осаждаемом потоке постоянна и равна c_0 , а все частицы имеют одинаковую скорость, равную по модулю v_0 .

Для определенности примем, что определяющее уравнение сжимаемого гиперупругого материала имеет форму Синьорини:

$$\mathbf{T} = [\lambda I_A + \frac{1}{2}(\lambda + \mu - \frac{1}{2}c) I_A^2 + c I I_A] \mathbf{I} + 2[\mu - (\lambda + \mu + \frac{1}{2}c) I_A] \mathbf{A} - 2c \mathbf{A}^2$$

где \mathbf{T} – тензор напряжений Коши, \mathbf{A} – тензор деформации Альманси –

Гамеля (I_A, II_A — главные инварианты этого тензора), I — единичный тензор, λ, μ, c — упругие постоянные. Ниже используются также постоянные ν, κ, N и K , выражающиеся через λ, μ и c по следующим формулам: $\nu = 1/2\lambda + \mu$, $\kappa = 3/8(\lambda + \mu) + 13/16c$, $N = 2(\nu - 2\kappa)/\rho_0$, $K = 4\kappa/\rho_0$, где ρ_0 — плотность материала в естественном состоянии.

В [4] сформулирована эволюционная граничная задача для динамически наращиваемого нелинейно упругого слоя. Эта задача заключается в нахождении закона движения растущего слоя как функции фазовых переменных Ψ и t :

$$x_{(s)} = \chi(\Psi, t) \quad (-h < \Psi < c_0 v_0 t, t > 0) \quad (1.1)$$

где значением функции $\chi(\Psi, t)$ является вертикальная координата в момент времени t точки (частицы) основного слоя с меткой $\Xi = \Psi$ (если $-h < \Psi < 0$) или вертикальная координата в момент t точки дополнительного слоя, которая присоединилась к слою в момент $t = \Psi/(c_0 v_0)$ (если $\Psi > 0$).

Приведем формулировку граничной задачи для нахождения функции $\chi(\Psi, t)$ [1–3]:

$$\left\{ N \left(\frac{\partial \chi}{\partial \Psi} \right)^{-3} + K \left(\frac{\partial \chi}{\partial \Psi} \right)^{-5} \right\} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \Psi^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$(\Psi, t) \in \{-h < \Psi < 0, t > 0\} \cup \{0 < \Psi < c_0 v_0 t, t > 0\}$$

$$\{\chi(\Psi, t)\}_{\Psi=-h} = -h \quad (t \geq 0) \quad (1.3)$$

$$\{\chi(\Psi, t)\}_{t=0} = \Psi, \quad \{\partial \chi(\Psi, t)/\partial t\}_{t=0} = 0 \quad (-h \leq \Psi < 0) \quad (1.4)$$

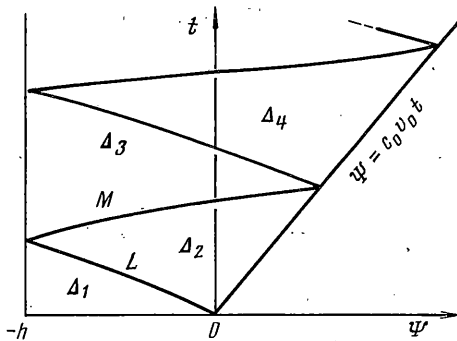
$$\left\{ \frac{\partial \chi(\Psi, t)}{\partial \Psi} + \frac{1}{c_0 v_0} \frac{\partial \chi(\Psi, t)}{\partial t} \right\}_{\Psi=c_0 v_0 t} = 1 - \frac{1}{c_0} \quad (t \geq 0) \quad (1.5)$$

$$\{\chi(\Psi, t)\}_{\Psi=0-} = \{\chi(\Psi, t)\}_{\Psi=0+} \quad (t > 0) \quad (1.6)$$

$$\{\partial \chi(\Psi, t)/\partial \Psi\}_{\Psi=0-} = \{\partial \chi(\Psi, t)/\partial \Psi\}_{\Psi=0+} \quad (t > 0) \quad (1.7)$$

Заметим, что дифференциальное уравнение (1.2) должно удовлетворяться в каждой из областей $\{-h < \Psi < 0, t > 0\}$ и $\{0 < \Psi < c_0 v_0 t, t > 0\}$ фазовой плоскости (фиг. 1). Для сопряжения решения на луче $\{\Psi = 0, t > 0\}$ имеются условия (1.6), (1.7). Будем считать выполненными следующие ограничения на упругие постоянные: $K > 0$, $N < 0$, $-N/K < 1$, достаточные для того, чтобы уравнение (1.2) принадлежало к гиперболическому типу в интервале $p \in (0, \sqrt{-K/N})$ и функция $f(p) = \{Np^{-3} + Kp^{-5}\}^{1/2}$, имеющая смысл местной скорости звука в нелинейно упругой среде Синьорини, возрастала при уменьшении аргумента p от значения $p = 1$ (подробности см. в [1, 3]). Когда выполняется последнее условие, гладкого решения эволюционной граничной задачи (1.2)–(1.7) не существует [4] и единственного решения этой задачи нет. Поэтому будем считать, что закон движения (1.1) является непрерывным по паре фазовых переменных, но первые частные производные $\partial \chi/\partial \Psi$ и $\partial \chi/\partial t$ разрывны при переходе через некоторые кривые, расположенные в фазовой плоскости. Физически это означает, что решение представляет собой продольную волну, распространяющуюся по слою вглубь его в прямом и обратном направлениях (изменение направления распространения волны происходит в результате ее отражения либо от жесткой стенки, либо от поверхности наращивания слоя).

На фазовой плоскости (Ψ, t) геометрическое место мгновенных положений фронта ударной волны есть система кривых, попеременно имеющих положительный или отрицательный угловой коэффициент (фиг. 1). Первую такую кривую с отрицательным наклоном обозначим через L , а с по-



Фиг. 1

ложительным — через M . Эти кривые разбивают область, ограниченную лучами $\{\Psi = -h, t > 0\}$, $\{\Psi = c_0 v_0 t, t > 0\}$ и отрезком $\{-h \leq \Psi \leq 0, t = 0\}$, на бесконечную последовательность треугольных областей Δ_k ($k=1, 2, \dots$), в каждой из которых закон движения $\chi(\Psi, t)$ является гладкой функцией фазовых переменных.

Сформулируем условия совместности на кривых разрыва первых частных производных закона движения.

2. Условия совместности в задаче о наращиваемом слое. Предположим, что в сплошной среде распространяется сингулярная поверхность $\Sigma(t)$, при переходе через которую поля (или их градиенты), характеризующие состояние среды, изменяются скачком. Обозначим через \mathbf{n} единичный вектор нормали к поверхности Σ , направленный в сторону ее распространения по материальным точкам среды. Предельным значениям полей по разные стороны поверхности Σ будем приписывать индексы 1 и 2, причем нумерацию сторон поверхности Σ выберем так, чтобы направление \mathbf{n} соответствовало переходу со стороны 1 на сторону 2.

На поверхности разрыва между предельными значениями полей должны выполняться законы сохранения массы и количества движения (уравнения Рэнкина — Гюонио) [5]:

$$\rho_1 (v_{n1} - g^2) = \rho_2 (v_{n2} - g^2) \quad (2.1)$$

$$[T_{(ij)}]_{\Sigma} n_{(j)} = \rho_1 (v_{n1} - g^2) [v_{(i)}]_{\Sigma} \quad (2.2)$$

где g^2 — скорость движения поверхности Σ в направлении вектора \mathbf{n} , v_n — проекция на направление \mathbf{n} эйлерова поля скоростей континуума, $T_{(ij)}$, $v_{(i)}$ — декартовы компоненты тензора напряжений Коши и эйлерова поля скоростей соответственно. Квадратными скобками обозначается скачок поля при переходе через поверхность Σ : $[A]_{\Sigma} \equiv A_2 - A_1$.

Для любого непрерывного эйлерова тензорного поля $A(x_{(i)}, t)$ выполняется кинематическое условие совместности Адамара [5]:

$$\left[\frac{\partial A}{\partial t} \right]_{\Sigma} + g^2 n_{(i)} \left[\frac{\partial A}{\partial x_{(i)}} \right]_{\Sigma} = 0 \quad (2.3)$$

В одномерной задаче о движении плоской волны в слое уравнения (2.1) — (2.3) приобретают вид:

$$\rho_1 (v_{(3)1} n_{(3)} - g^2) = \rho_2 (v_{(3)2} n_{(3)} - g^2) \quad (2.4)$$

$$[T_{(33)}]_{\Sigma} n_{(3)} = \rho_1 (v_{(3)1} n_{(3)} - g^2) [v_{(3)}]_{\Sigma} \quad (2.5)$$

$$\left[\frac{\partial A}{\partial t} \right]_{\Sigma} + g^2 n_{(3)} \left[\frac{\partial A}{\partial x_{(3)}} \right]_{\Sigma} = 0 \quad (2.6)$$

Преобразуем условия совместности (2.4)–(2.6) к фазовым переменным Ψ, t , имея в виду в качестве поля A закон движения растущего слоя χ . Вводя в уравнение (2.5) определяющее соотношение

$$T_{(33)} = v \{1 - (\partial\chi/\partial\Psi)^{-2}\} - \kappa \{1 - (\partial\chi/\partial\Psi)^{-2}\}^2$$

и приняв обозначения $p = \partial\chi/\partial\Psi$, $q = \partial\chi/\partial t$, в результате указанного преобразования получим

$$\rho_1 (q_1 n^* - g^x) = \rho_2 (q_2 n^* - g^x) \quad (2.7)$$

$$n^* \left\{ \frac{N}{2} \left[\frac{1}{p^2} \right]_{x^*} + \frac{K}{4} \left[\frac{1}{p^4} \right]_{x^*} \right\} = \frac{\rho_1}{\rho_0} (q_1 n^* - g^x) [q]_{x^*} \quad (2.8)$$

$$[q]_{x^*} + n^* G [p]_{x^*} = 0 \quad (2.9)$$

Здесь Σ^* — образ фронта разрывов в лагранжевом многообразии; $n^* = 1$, если поверхность Σ^* движется в направлении возрастающих значений Ψ ; и $n^* = -1$, если Σ^* движется в направлении убывающих значений Ψ . Через G обозначена нормальная скорость распространения поверхности разрывов Σ^* .

Учитывая уравнения неразрывности в форме Лагранжа, которые в данном случае имеют вид: $\rho_0 = \rho_1 |p_1|$, $\rho_0 = \rho_2 |p_2|$, уравнения (2.7) и (2.8) приведем к виду (для удобства перепишем сюда также и уравнение (2.9)):

$$\frac{q_1 n^* - g^x}{|p_1|} = \frac{q_2 n^* - g^x}{|p_2|} \quad (2.10)$$

$$-n^* \left\{ \frac{N}{2} \left[\frac{1}{p^2} \right]_{x^*} + \frac{K}{4} \left[\frac{1}{p^4} \right]_{x^*} \right\} = \frac{q_2 n^* - g^x}{|p_2|} [q]_{x^*} \quad (2.11)$$

$$[q]_{x^*} + n^* G [p]_{x^*} = 0 \quad (2.12)$$

Наконец, необходимо еще выразить скорость распространения фронта разрывов в физическом пространстве g^x через соответствующую фазовую скорость G (лагранжеву скорость фронта). Исходя из соображений удобства, будем различать два случая, соответствующих фазовым кривым L -типа и M -типа.

Для кривой L -типа (уравнение которой возьмем в форме $\Psi = \alpha(t)$) имеем: $n^* = -1$, $G = -\alpha'(t)$ (штрих здесь и всюду ниже означает производную). Вычисляя скорость g^x , получим:

$$g^x = -\frac{d}{dt} \{ \chi(\Psi, t) |_{\Psi = \alpha(t)} \} = -p_2 \alpha'(t) - q_2$$

и, следовательно

$$g^x = p_2 G - q_2 \quad (2.13)$$

Аналогично, для кривой M -типа ($n^* = 1$) получим

$$g^x = p_2 G + q_2 \quad (2.14)$$

Заметим, что при выводе уравнений (2.13), (2.14) было использовано уравнение (2.10), что и позволило заменить p и q их значениями перед фронтом разрывов.

Таким образом, в задаче о динамическом наращивании нелинейно упругого слоя условия совместности для кривых L - и M -типов соответственно имеют вид

$$\frac{N}{2} \left[\frac{1}{p^2} \right]_L + \frac{K}{4} \left[\frac{1}{p^4} \right]_L = -G^L [q]_L \quad (2.15)$$

$$[q]_L - G^L [p]_L = 0$$

$$\frac{N}{2} \left[\frac{1}{p^2} \right]_M + \frac{K}{4} \left[\frac{1}{p^4} \right]_M = G^M [q]_M \quad (2.16)$$

$$[q]_M + G^M [p]_M = 0$$

Заметим также, что по известным фазовым скоростям G^L и G^M соответствующие фазовые кривые определяются из дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -G^L, \quad \frac{d\Psi}{dt} = G^M \quad (2.17)$$

3. Точное решение нелинейной эволюционной граничной задачи. Решение задачи (1.2)–(1.7) с условиями совместности (2.15), (2.16) будем искать в кусочно-постоянной для частных производных p и q форме: в каждой из треугольных областей Δ_k частные производные p и q равны некоторым константам, которые подлежат определению.

Прежде всего необходимо отметить, что уравнение (1.2) тогда удовлетворяется тождественно в каждой из областей Δ_k . Условия сопряжения (1.6), (1.7) также, очевидно, удовлетворяются. Начальным условиям (1.4) удовлетворим, положив $p=1$, $q=0$ в области Δ_1 (эта область соответствует невозмущенному состоянию слоя и называется обычно областью покоя).

В области Δ_2 положим

$$p=p_{II}, \quad q=q_{II} \quad (3.1)$$

где постоянные p_{II} , q_{II} должны быть найдены, исходя из граничного условия (1.5) и условий совместности (2.15) для кривой L -типа. Поэтому, для определения трех неизвестных величин p_{II} , q_{II} и G^L имеем три уравнения (учтено, что $p_1^L=p_{II}$, $q_1^L=q_{II}$, $p_2^L=1$, $q_2^L=0$)

$$p_{II} + \frac{1}{c_0 v_0} q_{II} = 1 - \frac{1}{c_0} \quad (3.2)$$

$$\frac{N}{2} \left(1 - \frac{1}{p_{II}^2} \right) + \frac{K}{4} \left(1 - \frac{1}{p_{II}^4} \right) = G^L q_{II} \quad (3.3)$$

$$-q_{II} - G^L (1 - p_{II}) = 0 \quad (3.4)$$

Выразим G^L из уравнения (3.4) и подставим результат в уравнение (3.3), которое затем разрешим относительно q_{II} , и в итоге получим

$$q_{II} = -(1 - p_{II})^{1/2} \left(\frac{N}{2p_{II}^2} + \frac{K}{4p_{II}^4} - \frac{N}{2} - \frac{K}{4} \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

$$G^L = (1 - p_{II})^{-1/2} \left(\frac{N}{2p_{II}^2} + \frac{K}{4p_{II}^4} - \frac{N}{2} - \frac{K}{4} \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

Выражение (3.5) подставим в уравнение (3.2). После ряда преобразований получим, что постоянная p_{II} есть корень следующего полиномиального алгебраического уравнения шестой степени

$$P(p) = \sum_{n=0}^6 a_n p^n = 0 \quad (3.7)$$

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2\gamma, \quad a_3 = -2\gamma$$

$$a_4 = 4(1 - c_0)^2 \delta - 2\gamma + 1, \quad a_5 = 8c_0(1 - c_0)\delta + 2\gamma - 1$$

$$a_6 = 4c_0^2 \delta$$

Здесь введены безразмерные постоянные параметры

$$\gamma = -N/K > 0, \delta = v_0^2/K \quad (3.8)$$

которые вместе с концентрацией c_0 определяют значение корня p_{II} уравнения (3.7).

Поскольку от свободной поверхности слоя распространяется ударная волна сжатия, то необходимо найти вещественный корень многочлена $P(p)$ на интервале $p \in (0, 1)$. Такой корень существует, так как $P(0) = -1 < 0$, $P(1) = 4\delta > 0$.

После нахождения p_{II} величины q_{II} и G^L вычисляются по формулам (3.5), (3.6). В силу (2.17) кривая, разделяющая треугольные области Δ_1 и Δ_2 , — есть отрезок прямой с уравнением $\Psi + G^L t = 0$.

Перейдем к построению решения в области Δ_3 :

$$p = p_{III}, \quad q = q_{III} \quad (3.9)$$

Постоянную q_{III} следует положить равной нулю, чтобы удовлетворить граничному условию (1.3). Для определения двух неизвестных величин p_{III} и G^M имеем два условия совместности (2.16), в которых следует положить $p_2^M = p_{II}$, $q_2^M = q_{II}$, $p_1^M = p_{III}$, $q_1^M = 0$:

$$\frac{N}{2} \left(\frac{1}{p_{II}^2} - \frac{1}{p_{III}^2} \right) + \frac{K}{4} \left(\frac{1}{p_{II}^4} - \frac{1}{p_{III}^4} \right) = G^M q_{II} \quad (3.10)$$

$$q_{II} + G^M (p_{II} - p_{III}) = 0 \quad (3.11)$$

Выражая из уравнения (3.11) величину G^M и учитывая уравнение (3.5), получим:

$$G^M = (p_{II} - p_{III})^{-1} (1 - p_{II})^{1/2} \left(\frac{N}{2p_{II}^2} + \frac{K}{4p_{II}^4} - \frac{N}{2} - \frac{K}{4} \right)^{1/2} \quad (3.12)$$

Подставляя формулы (3.5) и (3.12) в (3.10), для определения p_{III} получим алгебраическое уравнение

$$Q(p) = \sum_{n=0}^5 b_n p^n = 0 \quad (3.13)$$

коэффициенты которого выражаются через безразмерный параметр γ , определенный в (3.9), и значение корня p_{II} , которое считается найденным: $b_0 = p_{II}^5$, $b_1 = -p_{II}^4$, $b_2 = -2\gamma p_{II}^5$, $b_3 = 2\gamma p_{II}^4$, $b_4 = (1 - 2\gamma)(p_{II}^4 - p_{II}^5) + 2\gamma p_{II}^2 - 1$, $b_5 = 1 - 2\gamma p_{II}^2$.

Уравнение (3.13) имеет очевидный корень $p = 1$. Однако, этот корень должен быть отброшен, так как $0 < p_{II} < 1$ и из (3.12) следует $G^M < 0$, что противоречит кинематическому определению этой величины. Корень полинома $Q(p)$, представляющий в данном случае интерес, должен располагаться на интервале $p \in (0, p_{II})$. Такой корень существует, так как $Q(0) = p_{II}^5 > 0$, $Q(p_{II}) = -4p_{II}^8 q_{II}^2 / K < 0$ (см. (3.5)).

После нахождения корня p_{III} величина G^M вычисляется по формуле (3.12) и, таким образом, определяется отрезок, разделяющий области Δ_2 и Δ_3 .

Отметим качественные закономерности процесса отражения продольной ударной волны от жесткой стенки: за фронтом отраженной волны скорость равна нулю, а степень сжатия среды и ее плотность увеличиваются ($0 < p_{III}/p_{II} < 1$) по сравнению со сжатием и плотностью за фронтом падающей ударной волны; отношение фазовых скоростей отраженной и

падающей ударной волны есть

$$\frac{G^M}{G^L} = \frac{1-p_{II}}{p_{II}-p_{III}} > 1$$

Исследуем еще процесс отражения ударной волны сжатия от поверхности наращивания. Сам факт такого отражения, очевидно, имеет место, если прямая $G^M t - \Psi = h(1+G^M/G^L)$ пересекается с прямой $\Psi = c_0 v_0 t$ в первом квадранте фазовой плоскости (т. е., если отраженная волна «догонит» свободную поверхность, смещающуюся вследствие наращивания). В области Δ_4 фазовой плоскости имеем

$$p = p_{IV}, q = q_{IV} \quad (3.14)$$

Для определения трех неизвестных величин p_{IV} , q_{IV} и G^L (здесь имеется в виду уже вторая линия L -типа) служат граничное условие (1.5) и два условия совместности (2.15), в которых следует положить $p_2^L = p_{III}$, $q_2^L = 0$, $p_1^L = p_{IV}$, $q_1^L = q_{IV}$:

$$p_{IV} + \frac{1}{c_0 v_0} q_{IV} = 1 - \frac{1}{c_0} \quad (3.15)$$

$$\frac{N}{2} \left(\frac{1}{p_{III}^2} - \frac{1}{p_{IV}^2} \right) + \frac{K}{4} \left(\frac{1}{p_{III}^4} - \frac{1}{p_{IV}^4} \right) = G^L q_{IV} \quad (3.16)$$

$$-q_{IV} - G^L (p_{III} - p_{IV}) = 0 \quad (3.17)$$

Выразим фазовую скорость G^L из уравнения (3.17), а скорость q_{IV} — из уравнения (3.15), результаты затем подставим в уравнение (3.16). Для нахождения величины p_{IV} получим алгебраическое уравнение шестой степени

$$R(p) \equiv \sum_{n=0}^6 d_n p^n = 0 \quad (3.18)$$

с коэффициентами, выражаемыми через безразмерные постоянные γ и δ , а также постоянную концентрацию c_0 и значение корня p_{III} :

$$d_0 = -p_{III}^5, \quad d_1 = p_{III}^4, \quad d_2 = 2\gamma p_{III}^5, \quad d_3 = -2\gamma p_{III}^4,$$

$$d_4 = c_0^2 \delta (1 - 1/c_0)^2 p_{III}^4 - 2\gamma p_{III}^3 + p_{III},$$

$$d_5 = -2c_0^2 \delta (1 - 1/c_0) p_{III}^4 + 2\gamma p_{III}^2 - 1, \quad d_6 = c_0^2 \delta p_{III}^4.$$

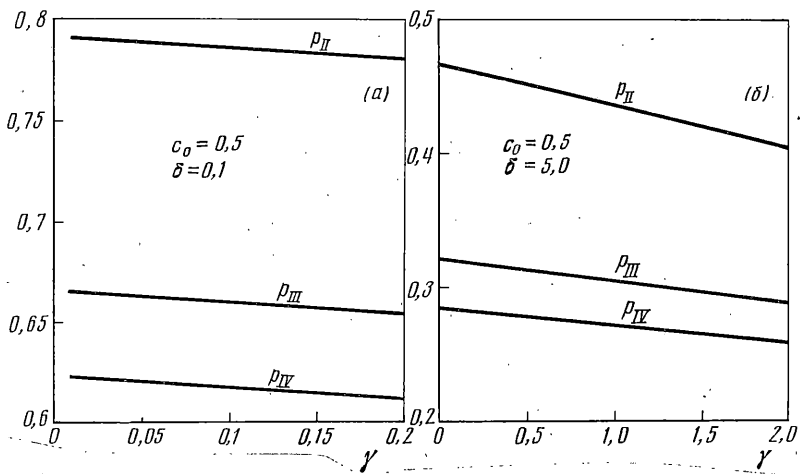
Корень уравнения (3.18) на интервале $p \in (0, p_{III})$ существует, так как

$$R(0) = -p_{III}^5 < 0,$$

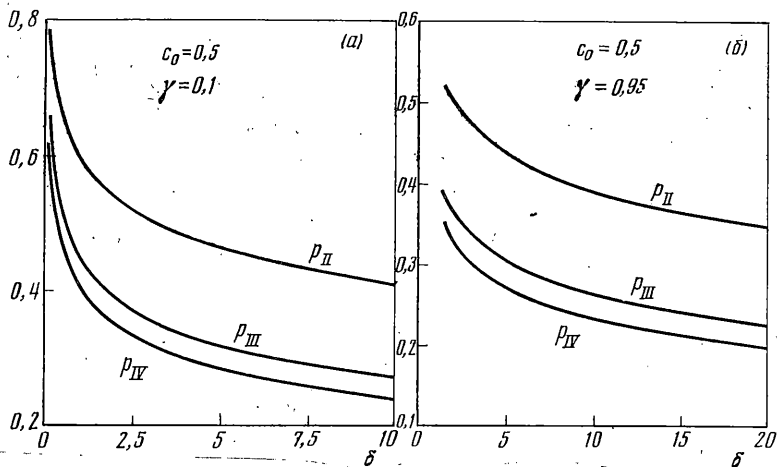
$$R(p_{III}) = p_{III}^4 (1 - p_{III}) + c_0^2 \delta p_{III}^8 (p_{III} - 1 + 1/c_0)^2 > 0.$$

Деформация сжатия за фронтом отраженной от поверхности наращивания ударной волны возрастает по сравнению с деформацией сжатия за фронтом падающей волны ($0 < p_{IV}/p_{III} < 1$), поэтому и плотность среды за фронтом отраженной волны будет больше, чем за фронтом падающей.

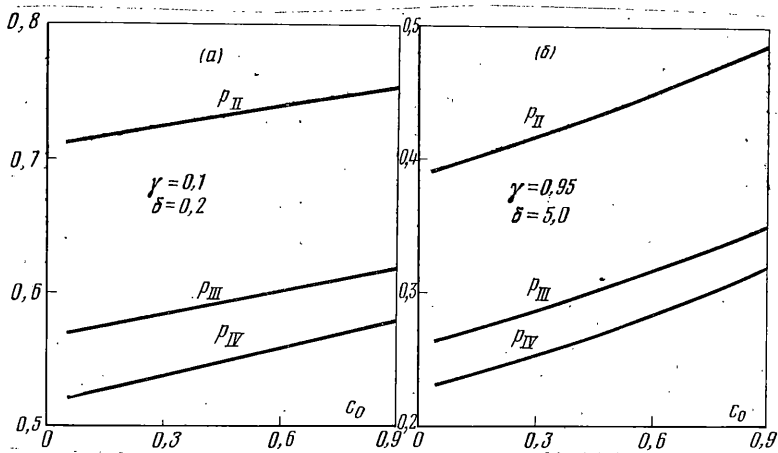
Таким образом, решение нелинейной задачи о движении ударной волны в динамически наращиваемом упругом слое найдено до области Δ_4 фазовой плоскости переменных Ψ и t включительно (постоянные p_{II} , p_{III} и p_{IV} в формулах (3.1), (3.9) и (3.14) находятся как корни полиномиальных алгебраических уравнений (3.7), (3.13) и (3.18)). Естественно, следуя указанной выше схеме, решение строится и в областях $\Delta_5, \Delta_6, \dots$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 2--4 представлены графики зависимостей величин p_{II} , p_{III} и p_{IV} от безразмерных параметров γ , δ и c_0 , рассчитанные в некоторых диапазонах изменения этих параметров. Заметим, что полного «обезразмеривания» задачи при этом не производилось, хотя это, разумеется, нетрудно сделать, приняв в качестве характерной длины начальную толщину слоя h , а в качестве характерного времени — величину h/\sqrt{K} аналогично тому, как это сделано в [1]. Из приведенных графиков видно, что разности $p_{II}-p_{III}$, $p_{III}-p_{IV}$ и $p_{II}-p_{IV}$ слабо зависят от изменения каждого взятого в отдельности параметра (из γ , δ и c_0) при фиксированных остальных двух в исследованных диапазонах.

Полученные результаты позволяют провести аналогию с процессом отражения от жесткой стенки изэнтропической ударной волны сжатия в сжимаемом идеальном газе (см., например, [6, 7]). Как известно, после лобового отражения ударной волны сжатия давление и плотность газа за фронтом отраженной волны может значительно увеличиваться по сравнению с давлением и плотностью за фронтом падающей волны. Кроме того, уменьшается скорость отраженного фронта по отношению к скорости падающего фронта (это нарушение симметрии является следствием нелинейности среды). Существование отмеченной аналогии обусловлено подобием соответствующих эволюционных граничных задач.

Картина распространения ударной волны в нарацаваемом упругом слое, возбуждаемой осаждаемым потоком частиц, можно представить как последовательность отражений ударной волны равномерного сжатия $p=p_{II}$, $q=q_{II}$ от жесткой заделки и от поверхности наращивания. Каждое отражение от жесткой стенки (заделки) приводит к увеличению деформации сжатия и уменьшению скорости частиц слоя, а каждое отражение от движущейся поверхности наращивания — к дальнейшему увеличению деформации сжатия и увеличению скорости частиц слоя.

Проследим за изменением скорости поверхности фронта ударной волны в результате отражений. Отношение скоростей фронта до и после его отражения от жесткой стенки находится из соотношений (2.13), (2.14), (3.6) и (3.12):

$$\frac{g^L}{g^M} = (1-p_{II})^{-1} \left(\frac{p_{II}}{p_{III}} - 1 \right) \quad (3.19)$$

Аналогичным образом в случае отражения от поверхности наращивания имеем

$$\frac{g^M}{g^L} = \frac{p_{II}-p_{III}}{(1-p_{II})^{1/2}(p_{III}-p_{IV})^{1/2}} \left\{ \frac{N}{2} \left(\frac{1}{p_{III}^2} - \frac{1}{p_{IV}^2} \right) + \frac{K}{4} \left(\frac{1}{p_{III}^4} - \frac{1}{p_{IV}^4} \right) \right\}^{1/2} \quad (3.20)$$

В соотношениях (3.19) и (3.20) предполагается, что величина g^M в них одна и та же, а величины g^L — разные (g^L в (3.19) — есть скорость фронта до первого отражения от жесткой стенки, а g^L в (3.20) — скорость фронта после первого отражения от поверхности наращивания).

Ясно, что отношения (3.19) и (3.20) зависят от соотношений параметров задачи и, как показывают расчеты, например отношение (3.19) меньше единицы. Это и означает повышение скорости фронта ударной волны после отражения от жесткой стенки.

Из приведенных выше соотношений легко вычисляется длительность интервала времени от момента начала наращивания до момента первого отражения фронта ударной волны от поверхности наращивания. Обозначив эту длительность t_* , имеем

$$t_* = h(1-p_{III}) \left\{ (1-p_{II})^{1/2} \left(\frac{N}{2p_{II}^2} + \frac{K}{4p_{IV}^2} - \frac{N}{2} - \frac{K}{4} \right) - c_0 v_0 \right\}^{-1} \quad (3.21)$$

Поскольку отражение от свободной поверхности наращивания приводит к очередному скачку деформации сжатия, то в некоторых случаях может быть целесообразным ограничение продолжительности наращивания величиной t_* из (3.21) для того, чтобы избежать развития чрезмерных деформаций сжатия.

4. Приближение малых деформаций в задаче о динамическом наращивании упругого слоя. Рассмотрим слой $-h \leq x_{(3)} \leq 0$, который, начиная с момента времени $t=0$, наращивается потоком частиц, падающих нормально свободной границе слоя (поверхности наращивания). Примем, что концентрация частиц в осаждаемом потоке постоянна и равна c_0 и все частицы потока имеют постоянную скорость v_0 . Предположим далее, что упругие волны, распространяющиеся в слое, вызывают малые деформации всех его элементов в любой момент времени.

Закон движения растущего слоя, как и выше, будем искать в виде (1.1). Однако, в приближении малых деформаций удобнее ввести поле

$$u(\Psi, t) = \chi(\Psi, t) - \Psi \quad (4.1)$$

являющееся аналогом поля перемещений для слоя постоянного состава. В дальнейшем поле $u(\Psi, t)$ будем называть полем перемещений растущего слоя. Предположение о малости деформаций эквивалентно следующему условию: градиент перемещений растущего слоя по фазовой переменной Ψ является малой величиной и более высокие степени величины $du/d\Psi$ во всех уравнениях можно отбросить.

4.1. Линейная аппроксимация эволюционной граничной задачи. Граничная задача (1.2)–(1.7) в случае, когда градиенты перемещений $du/d\Psi$ малы, сводится к линейной смешанной граничной задаче для волнового уравнения. Сформулируем эту задачу. В каждой из областей $\Gamma_1 = \{(\Psi, t): -h < \Psi < 0, t > 0\}$ и $\Gamma_2 = \{(\Psi, t): 0 < \Psi < c_0 v_0 t, t > 0\}$ фазовой плоскости необходимо построить решение $u(\Psi, t)$ волнового уравнения

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \Psi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad ((\Psi, t) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2) \quad (4.2)$$

где a — скорость распространения продольной линейно упругой волны, удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$u=0, \quad \partial u / \partial t = 0 \quad (-h \leq \Psi < 0, t=0) \quad (4.3)$$

$$u=0 \quad (\Psi = -h, t \geq 0) \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \Psi} + \frac{1}{c_0 v_0} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{c_0} \quad (\Psi = c_0 v_0 t, t > 0) \quad (4.5)$$

$$\lim_{\Psi \rightarrow 0-} u = \lim_{\Psi \rightarrow 0+} u \quad (t > 0) \quad (4.6)$$

$$\lim_{\Psi \rightarrow 0-} (\partial u / \partial \Psi) = \lim_{\Psi \rightarrow 0+} (\partial u / \partial \Psi) \quad (t > 0) \quad (4.7)$$

Точное решение линейной граничной задачи (4.2)–(4.7) может быть получено следующим образом. Сформулируем в областях Γ_1 и Γ_2 независимо граничные задачи для волнового уравнения (4.2), задав дополнительное граничное условие на полупрямой $\{\Psi=0, t>0\}$, введя неопределенную функцию $U(t)$:

$$u(0-, t) = u(0+, t) \equiv U(t) \quad (t > 0), \quad U(0) = 0$$

В области будем иметь следующую корректно поставленную граничную задачу:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \Psi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (-h < \Psi < 0, t > 0) \quad (4.8)$$

$$u=0, \partial u/\partial t=0 \quad (-h \leq \Psi < 0, t=0) \quad (4.9)$$

$$u=0 \quad (\Psi=-h, t \geq 0) \quad (4.10)$$

$$u=U(t) \quad (\Psi=0-, t \geq 0) \quad (4.11)$$

Если решение этой задачи найдено, то можно определить функцию $\varepsilon(t) = (\partial u/\partial t)|_{\Psi=0-}$ и, следовательно, в области Γ_2 сформулировать следующую граничную задачу:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \Psi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (0 < \Psi < c_0 v_0 t, t > 0) \quad (4.12)$$

$$u=U(t) \quad (\Psi=0+, t \geq 0) \quad (4.13)$$

$$\partial u/\partial \Psi = \varepsilon(t) \quad (\Psi=0+, t > 0) \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \Psi} + \frac{1}{c_0 v_0} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{c_0} \quad (\Psi=c_0 v_0 t, t > 0) \quad (4.15)$$

Граничная задача (4.12)–(4.15) поставлена, вообще говоря, некорректно в том смысле, что не всегда разрешима. Поэтому неопределенную функцию $U(t)$ следует находить из условия разрешимости этой граничной задачи.

Решение задачи (4.8)–(4.11) при произвольной функции $U(t)$ можно представить в виде [8]:

$$u(\Psi, t) = U\left(t + \frac{\Psi}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ U\left(t + \frac{\Psi}{a} - \frac{2nh}{a}\right) - U\left(t - \frac{\Psi}{a} - \frac{2nh}{a}\right) \right\} \quad (4.16)$$

где функция U при отрицательных значениях аргумента считается доопределенной нулем. Заметим, что сумма в формуле (4.16) на самом деле является конечной, так как для любых значений Ψ и t лишь конечное число ее членов отличны от нуля. Дифференцируя (4.16) по Ψ и полагая затем $\Psi=0$, получим

$$\varepsilon(t) = \frac{U'(t)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} U'\left(t - \frac{2nh}{a}\right) \quad (4.17)$$

Рассмотрим граничную задачу (4.12)–(4.15) считая, что функция $\varepsilon(t)$ определена формулой (4.17). Решение этой граничной задачи существенно зависит от того, расположена ли полупрямая $\{t = \Psi/(c_0 v_0), \Psi > 0\}$ на фазовой плоскости выше или ниже характеристики $t = \Psi/a$ (см. [8]). Соответственно этому будем различать два случая – дозвуковое и сверхзвуковое наращивание слоя.

4.2. Дозвуковое наращивание слоя. Введем константу a^* , имеющую размерность скорости: $a^* = c_0 v_0$. Пусть $a^* < a$, т. е. полупрямая $\{t = \Psi/a^*, \Psi > 0\}$ на фазовой плоскости располагается выше характеристики $t = \Psi/a$ (физически это соответствует тому, что скорость смещения свободной поверхности слоя по его материальным частицам вследствие притока материала меньше скорости звука в упругой среде). Следовательно, полупрямая $\{t = \Psi/a^*, \Psi > 0\}$ попадает в область определенности задачи Коши для волнового уравнения с начальными данными (4.13), (4.14), где функция $\varepsilon(t)$ определена формулой (4.17). Последняя задача имеет решение,

которое можно представить формулой Д'Аламбера [9]:

$$u(\Psi, t) = \frac{1}{2} \{ U(t - \Psi/a) + U(t + \Psi/a) \} + \\ + \frac{1}{2} \int_{t-\Psi/a}^{t+\Psi/a} \left\{ U'(\tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} U' \left(\tau - \frac{2nh}{a} \right) \right\} d\tau$$

После ряда преобразований последнюю формулу можно представить также в форме

$$u(\Psi, t) = U \left(t + \frac{\Psi}{a} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ U \left(t + \frac{\Psi}{a} - \frac{2nh}{a} \right) - U \left(t - \frac{\Psi}{a} - \frac{2nh}{a} \right) \right\} \quad (4.18)$$

совпадающей с (4.16).

Таким образом, фазовое преобразование позволяет получить решение задачи в областях Γ_1 и Γ_2 в симметричной форме.

Функцию $U(t)$ определим из граничного условия (4.15), подставляя в него выражение для u из (4.18). После несложных преобразований получим функциональное уравнение относительно функции $V(t) \equiv U'(t)$:

$$\Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} V \left(\beta t - \frac{2nh}{a} \right) - \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} V \left(t - \frac{2kh}{a} \right) = 1 \quad (4.19)$$

$$\Omega^2 \equiv -c_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^*} \right), \quad \omega^2 \equiv c_0 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^*} \right), \quad \beta \equiv \left(1 - \frac{a^*}{a} \right) \left(1 + \frac{a^*}{a} \right)^{-1}$$

Функция $V(t)$, имеющая смысл скорости поверхности срачивания основного и дополнительного слоя, должна быть определена из уравнения (4.19) для значений $t > 0$ (если $t < 0$, то $V(t) \equiv 0$). После этого квадратурой находится функция $U(t)$ и решение задачи представляется формулой (4.18) в областях Γ_1 и Γ_2 . Зафиксируем на оси t характерные точки $t_n^{\circ} = 2nh/a\beta$ ($n=1, 2, \dots$), $t_k^{\sim} = 2kh/a$ ($k=0, 1, \dots$). На интервале $0 < t < 2h/a$ функциональное уравнение (4.19) имеет вид $-\omega^2 V(t) = 1$ и простое решение $V(t) = -\omega^{-2}$. Следовательно, в приближении малых деформаций скорость поверхности слоя сразу после удара осаждаемого потока вычисляется по формуле

$$\left. \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} \right|_{t=0+} = \left\{ c_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^*} \right) \right\}^{-1}$$

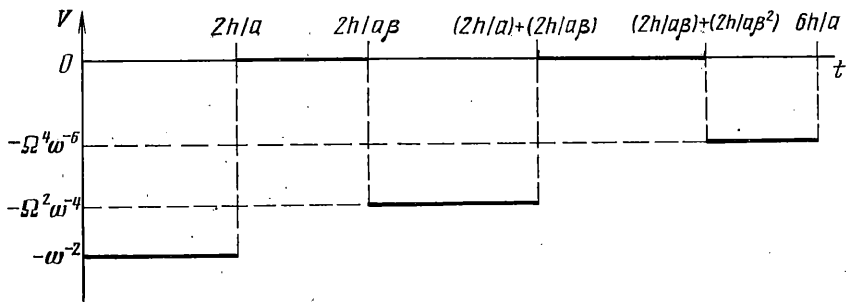
Далее сравним значения t_1° и t_2^{\sim} . Сначала предположим, что $t_1^{\circ} \geq t_2^{\sim}$, т. е. $\beta \leq 1/2$. Тогда на интервале $t_1^{\sim} < t < t_2^{\sim}$ уравнение (4.19) сводится к следующему: $-\omega^2 V(t) - \omega^2 V(t - 2h/a) = 1$, поэтому $V(t) \equiv 0$ ($t_1^{\sim} < t < t_2^{\sim}$). Пусть теперь $\beta > 1/2$, тогда решение функционального уравнения на интервале $t_1^{\sim} < t < t_2^{\sim}$ имеет вид $V(t) = 0$ ($t_1^{\sim} < t < t_1^{\circ}$), $V(t) = -\Omega^2/\omega^4$ ($t_1^{\circ} < t < t_2^{\sim}$).

В дальнейшем для определенности положим, что $\beta > 1/2$. Следующие характерные точки: $t = t_2^{\circ}$ и $t = t_3^{\sim}$. Снова имеются два случая: $\beta > 2/3$ и $\beta \leq 2/3$. Если $\beta > 2/3$, то на интервале $t_2^{\sim} < t < t_2^{\circ}$ функциональное уравнение (4.19) приводится к виду

$$-\Omega^2 \omega^{-2} - \omega^2 V(t) - 2 = 0 \quad (t_2^{\sim} < t < t_1^{\sim} + t_1^{\circ})$$

$$-\Omega^2 \omega^{-2} - \omega^2 V(t) + \Omega^2 \omega^{-2} = 0 \quad (t_1^{\sim} + t_1^{\circ} < t < t_2^{\circ})$$

и непосредственно решается.



Фиг. 5

Аналогично можно продолжить построение функции $V(t)$ при $t > t_2^\circ$. На фиг. 5 приведен график функции $V=V(t)$ при условии $\beta > 2/3$.

Если функция $V(t)$ найдена, то квадратурой находится функция $U(t) = \int V(\tau) d\tau$ ($0 \leq \tau \leq t$), а затем по формуле (4.16) — решение граничной задачи (4.2), (4.7). Поля деформаций и напряжений определяются по полю перемещений $u(\Psi, t)$ с помощью обычных соотношений линейной теории упругости.

4.3. Сверхзвуковое наращивание слоя. В этом случае $a^* > a$ и полупрямая $\{t = \Psi/a^*, \Psi > 0\}$ расположена ниже характеристики $t = \Psi/a$. В бесконечной треугольной области $\Delta = \{(\Psi, t): 0 < \Psi < at, t > 0\}$ для функции $u(\Psi, t)$ по-прежнему имеем выражение (4.18). Осталось определить функцию $u(\Psi, t)$ в бесконечном треугольнике $\Delta^* = \Gamma_2 \setminus \Delta$. В области Δ^* , очевидно, имеем следующее выражение для скорости и поля перемещений: $du/dt = -v_0$, $u = -v_0 t$. Действительно, метки Ψ , заключенные в интервале $at < \Psi < a^*t$, $t > 0$, обозначают материальные точки, которые входят к моменту t в состав растущего слоя, но фактически они не испытывают динамической реакции со стороны растущего слоя.

Условие непрерывности перемещений на характеристике $t = \Psi/a$ эквивалентно уравнению

$$U\left(\frac{2\Psi}{a}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} U\left(\frac{2\Psi}{a} - \frac{2kh}{a}\right) = -\frac{v_0\Psi}{a} \quad (\Psi > 0)$$

Дифференцируя последнее уравнение по Ψ , получим

$$V\left(\frac{2\Psi}{a}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} V\left(\frac{2\Psi}{a} - \frac{2kh}{a}\right) = -\frac{v_0}{2} \quad (\Psi > 0)$$

Это функциональное уравнение имеет простое решение:

$$V(t) = -1/2 v_0 \quad (0 < t < 2h/a), \quad V(t) = 0 \quad (t > 2h/a), \quad V(t) = 0 \quad (t < 0)$$

Следовательно, если $a^* > a$, то за время $t = 2h/a$ поверхность срачивания основного и дополнительного слоя переместится на расстояние, превосходящее толщину слоя h , т. е. слой не обладает динамической реакцией на набегающий сверхзвуковой поток (эффект Юнга [10]). Этот эффект является следствием того, что линейно упругий материал может проводить продольный импульс только с одной скоростью, равной a . Корректная постановка задачи о сверхзвуковом наращивании должна, поэтому, основываться как минимум на нелинейно упругой модели с тем, чтобы скорость упругой волны сжатия увеличивалась с увеличением деформации сжатия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аругюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 1. Движение потока осаждаемых частиц с переменной скоростью // Изв. АН. МТТ. 1992. № 5. С. 6–24.
2. Аругюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 1. Кинематика и меры деформации растущего тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 85–98.
3. Аругюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 2. Эволюционная граничная задача теории растущих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 72–86.
4. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
5. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
6. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 588 с.
7. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука. 1971. 854 с.
8. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
9. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
10. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 440 с.

Москва, Самара

Поступила в редакцию
10.X.1991