МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1992

УДК 539.3

 В. Ф. КРОТОВ

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ УПРУГОСТЬ

Уравнения физических законов должны быть лоренц-инвариантны. Это свойство является математическим выражением принципа относительности Эйнштейна. Уравнения теории упругости им не обладают. Эта теория хорошо формализована, особенно в инфинитезимальном приближении идеально-упругой однородной изотропной среды. Связь с опытом модели последней сводится к двум коэффициентам Ляме μ, ν и плотности ρ. Синтез и исследование лоренц-инвариантной модели такой среды и является предметом данной работы.

Следующее рассуждение дает представление о некоторых новых эффектах, которых следует ожидать от релятивистской теории упругости. Продольные и поперечные упругие волны имеют скорости $a_1=(\lambda+2\mu)^{1/2}\rho^{-1/2}$ и $a_2=\mu^{1/2}\rho^{-1/2}$, т. е. для сред с достаточно малой плотностью или большими коэффициентами упругости значения a_1, a_2 могут превысить скорость света c. Но это противоречит релятивистской теории. Из нее должны следовать другие формулы, содержащие помимо характеристик среды μ, ν, ρ фундаментальную константу c и удовлетворяющие неравенствам $a_{1,2}<c$ при любых их значениях. Этот эффект не зависит от скоростей материальных точек среды, которые могут быть сколь угодно малы. Это значит, что для «релятивизации» теории упругости недостаточно перейти от ньютоновой динамики элементов среды к динамике специальной теории относительности (СТО). Необходима новая феноменология их упругого взаимодействия.

Релятивистская теория упругости исследовалась в работах [1–5], причем в рамках общей теории относительности (ОТО), минуя СТО. Настолько минуя, что ковариантные уравнения этих теорий не изотропны в пространстве Минковского, т. е. не лоренц-инвариантны. В частности, из них следуют приведенные выше классические формулы скорости звука [1, 2]. Это обусловлено ориентацией на определенные задачи теоретической астрономии: взаимодействие планет с гравитационным полем и упругогравитационные процессы в звездах, для которых эффекты СТО несущественны.

Релятивистское уточнение модели упругого континуума представляет интерес и в связи с особой его ролью в истории теоретической физики. Достаточно вспомнить, что решающим аргументом против теорий эфира явилась его релятивистская неинвариантность [6]. Наличие релятивистски корректной модели упругого твердого тела возрождает тему аналогий его динамики и динамики фундаментальных физических объектов в связи с современными проблемами оснований теоретической физики, минимального описания, единых теорий.

В данной работе предложена новая феноменология упругого однородного изотропного твердого тела, получены релятивистски инвариантные уравнения его деформаций в вариационной и дифференциальной форме, имеющие классический нерелятивистский предел. Их анализ ориентирован на следствия, связанные с двумя направлениями: новые эффекты в макроскопических средах, которые допускают хотя бы принципиальную возможность экспериментальной проверки, и разработка упомянутой темы динамических подобий. К первому направлению относятся новые формулы для скорости продольных и поперечных волн, а также для энергии, импульса, момента импульса упругой среды. Ко второму – выявление деформаций безынерционной среды, динамически подобных инерционным телам, электромагнитному полю и заряду, квантовым частицам и полям. Их наличие дает новый материал для обсуждения некоторых оснований электродинамики, квантовой механики, ОТО, которое здесь проводится. Это направление продолжает исследования [7–10].

1. Вариационный принцип для свободного потока в актуальных координатах. 1. Будем пользоваться аналитическим описанием пространства Минковского в виде эвклидова 4-мерного пространства E с вектором декартовых координат $x=(\mathbf{x}, x^4)$, где $\mathbf{x}=(x^1, x^2, x^3)$ – трехмерный действительный вектор пространственных координат, элемент соответствующего подпространства $\mathbf{E}$; $x^4=ix_4=ict$ – мнимая координата, t – время. Далее так будут выделяться все конструкции, связанные с пространством $\mathbf{E}$.

Релятивистская механика материальной точки описывается уравнением

$$\delta J[x(\cdot)]=0; \quad x(\cdot)\in M; \quad J=-mc\int_{x_0}^{x_1} ds \tag{1.1}$$

где m – масса покоя; варьируемые траектории $x(\cdot)$ проходят через заданные точки x_0, x_1; $ds^2=-dx^2=c^2dt^2-d\mathbf{x}^2$, J – действие.

Рассмотрим сплошную среду, движение которой описывается в терминах эволюции пространственных конфигураций [11, 12] зависимостью $\mathbf{x}=\chi(t, \nu)$, $\nu\in N$, $t\in[t_0, t_1]$, где N – борелевское множество (тело), на котором определена неотрицательная борелевская мера – масса. Пусть эта мера есть абсолютно-непрерывная функция объема в $\mathbf{E}$ и тем самым определена плотность $\rho(t, \mathbf{x})$ в $\mathbf{E}$. Элемент $\nu\in N$ идентифицирует в некотором материальном или отсчетном описании тело-точку среды. При каждом фиксированном t зависимость $\chi(t, \nu)$ есть гомеоморфизм $N\div X_t\subset\mathbf{E}$ (пространственная конфигурация среды). При каждом фиксированном ν – описывает движение точки-тела ν. Обозначим $v=cdx(\nu, t)/ds=(\mathbf{v}, v^4=iv_4)$ – 4-вектор скорости тела-точки $\nu\in N$ в момент t и векторное поле скоростей $v(x)$. Вектор $v(x)$ при фиксированном $x=(\mathbf{x}, x^4=ict)$ совпадает с вектором $v(\nu, t)$ скорости точки-тела $\nu=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$, которая в момент t находится в положении $\mathbf{x}$. Очевидно $v^2=-c^2$. Действие свободного потока

$$J=\int_N dJ(\nu)=-c\iint_{NT}\dot{s}(t,\nu)\,dm\,dt=-c\iint_{X_tT}\dot{s}[t,\chi^{-1}(x,t)]\times$$
$$\times\rho(t,x)\,d^3x\,dt=ic\int_X g(x)\,d^4x \tag{1.2}$$

где $d^3x=dx^1dx^2dx^3$; $d^4x=d^3xdx^4$; $T=(t_0, t_1)$; $X\in E: t\in(t_0, t_1)$, $\mathbf{x}\in\mathbf{X}_t$; $\varkappa^{-1}\in(x, t)$ – функция обратная $\chi(\nu, t)$ при фиксированном t. Инвариант $g(x)$ определяется равенством $ic\rho=gv^4$. В состоянии покоя $\mathbf{v}=0$ он совпадает с плотностью ρ. Назовем его инвариантной плотностью. Введем также 4-вектор тока $j=gv=(\mathbf{j},\ j^4=ic\rho=gv^4)$. Динамическое состояние потока определяется совокупностью $z=(g,\ v)$ или $z=(g,\ j)$, удовлетворяющей принципу

$$\delta J(z)=0, \qquad J(z)=ic\int g\,d^4x \tag{1.3}$$

$$v^2=-c^2;\ \operatorname{div}(gv)=0;\ \text{или}\ j^2=-g^2;\ \operatorname{div} j=0 \tag{1.4}$$

Последнее равенство — уравнение непрерывности потока. Варьируемые функции ограничены, помимо (1.4), граничными условиями. Ограничимся следующим вариантом последних: $c\rho(t_0,\ \mathbf{x})$ и $c\rho(t_1,\mathbf{x})$ суть заданные неотрицательные функции; $g(t,\ \mathbf{x})=0,\ \mathbf{x}\in S_t$, где S_t — граница области $\mathbf{X}_t$. При таких граничных условиях из (1.4) следует закон сохранения массы потока

$$m(t)=\int\rho(t,\mathbf{x})\,d^3x=\text{const}, \qquad \int\rho_*(t,\mathbf{x})d^3x=1, \qquad \rho_*=\rho/m \tag{1.5}$$

2. Сформулированный вариационный принцип может быть наполнен иным физическим содержанием. Именно, он также описывает динамику материальной точки массы покоя m, траектория которой не определена, но определена плотность вероятности $\rho_*(t,\ \mathbf{x})$, а также — ток вероятности $\mathbf{j}_*=\mathbf{j}/m$.

3. Этот вариационный принцип сводит описание движения потока к задаче об условном экстремуме (1.3), (1.4). Пользуясь методом множителей Лагранжа, эту задачу сведем к следующей: найти элемент $\bar z=(\bar g_*,\ \bar v)$ и функции $\varphi(x)$, $\lambda(x)$, удовлетворяющие (1.4) и

$$\delta I(\bar z,\varphi,\lambda)=0, \qquad z\in M, \qquad I=i\int Ld^4x$$

$$L=g_*mc-\varphi\operatorname{div}(gv)-\lambda g_*/2(v^2+c^2) \tag{1.6}$$

где $\lambda g_*/2$, φ — множители Лагранжа, M — множество, свободное от связей (1.4). С точностью до граничных значений, интегрируя по частям, получим

$$L=g_*(cm+\varphi_x v+{}^1/_2\lambda v^2-{}^1/_2\lambda c^2) \tag{1.7}$$

Переменные g и v теперь не связаны (1.4) поэтому

$$\partial L/\partial v=\varphi_x-\lambda v=0; \quad \partial L/\partial g_*=mc+\varphi_x v-{}^1/_2\lambda c=0$$

$$\varphi_x{}^2+m^2=0;\ \lambda=mc^{-1};\ \varphi_x=\lambda v=mv/c \tag{1.8}$$

Вариационный принцип (1.3), (1.4) симметричен относительно координат пространства E. Однако имеется и одно несимметричное условие, выделяющее движения, не противоречащие физическому смыслу. Это — условие возрастания времени $cdt/ds=-\varphi_t/cm>0$.

4. Вариационный принцип (1.3), (1.4) содержит задачу об условном экстремуме. Из сказанного выше следует и эквивалентная ему формулировка в терминах безусловного экстремума

$$\delta L(z)=0; \qquad z=(g_*,\varphi); \qquad I(z)=i\int L\,d^4x$$

$$L={}^1/_2g_*c(m+\varphi_x{}^2/m) \tag{1.9}$$

Состояние потока описывается парой скалярных функций $z=(g_*,\ \varphi)$ связанной с описанием состояния в терминах $(g,\ j)$ равенством $j=cg_*\varphi_x m$. Варьирование φ и g_* дает уравнения (1.3), (1.8). Граничные значения $\varphi(x)$ не фиксированы, остальные — определены выше. Функционал (1.9) записан с точностью до слагаемых, зависящих от граничных значений g, φ.

2. Инфинитезимальная теория упругости. 1. Действие однородной, изотропной упругой среды J складывается из действия свободного потока J_1 и действия упругого взаимодействия ее элементов J_2: $J=J_1+J_2$. В классической теории упругости оба эти слагаемые выражаются через вектор смещения $\mathbf{u}(t,\ \mathbf{x})=\chi(t,\ \nu)-\chi_0(\nu)$, $\nu=\chi_0^{-1}(\mathbf{x},\ t)$ элементов среды от некоторой отсчетной пространственной конфигурации $\chi_0(\nu)$, называемой естественной. Предполагается, что существует система координат, в которой скорости тел-точек среды в отсчетном состоянии равны нулю. В этой системе координат, «связанной с телом» в предположении малости вектора $\mathbf{u}(t,\ \mathbf{x})$ и его производных, имеем [13, 14]:

$$J_1=\iint\limits_{TX} W d^3x\, dt; \qquad J_2=-G\iint\limits_{TX} U(\varepsilon)\, d^3x\, dt$$

$$U(\varepsilon)=k/2\theta^2-2\sigma; \qquad W={}^1/_2\rho\mathbf{u}_t^2 \tag{2.1}$$

Здесь W — плотность кинетической энергии потока; GU — плотность полной свободной энергии упругого взаимодействия; G — модуль сдвига; $k=(1-\nu)$ $(0{,}5-\nu)$, ν — коэффициент Пуассона, θ, σ — первый и второй инварианты тензора деформаций Грина $\varepsilon=\{\varepsilon_j^i\}$:

$$\varepsilon_j^i={}^1/_2(\mathbf{u}_{x^j}{}^i+\mathbf{u}_{x^i}{}^j); \quad \theta=\varepsilon_i^i; \quad \sigma={}^1/_2\delta_{lm}^{ij}\varepsilon_i^l\varepsilon_j^m \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{2.2}$$

где δ_{lm}^{ij} — коэффициент, равный 0, если $i=j$, или $l=m$, или, если множества верхних и нижних индексов не совпадают, в остальных случаях он равен ±1 в соответствии с совпадением или несовпадением порядка, в каком стоят нижние индексы, с порядком верхних. По одинаковым значкам подразумевается суммирование от единицы до трех.

Движение среды $\mathbf{u}(t,\ \mathbf{x})$ определяется вариационным принципом:

$$\delta J[\mathbf{u}(t,\ \mathbf{x})]=0, \quad \mathbf{u}(t,\ \mathbf{x})\in M \tag{2.3}$$

Варьирование проводится среди множества M всех достаточно гладких вектор-функций $\mathbf{u}(t,\ \mathbf{x})$, удовлетворяющих условию $\mathbf{u}(\mathbf{x})=u_0(t,\ \mathbf{x})$ при $t=t_0$, $t=t_1$ и при $x\in S_t$, где $\mathbf{u}_0(t,\ \mathbf{x})$ — заданная вектор-функция, S_t — граница области $\mathbf{X}_t$. Если речь идет о несжимаемой среде, то множество M ограничено дополнительным условием $D\approx2\theta=0$.

Оба слагаемые действия не инвариантны относительно лоренцева преобразования и поэтому подлежат уточнению с позиций принципа относительности. Действие потока J_1 имеет лоренц-инвариантное представление (1.3), которое непосредственно следует из закона движения материальной точки (1.1). Построение такого представления для действия J_2 связано с изменением формального описания деформаций среды, физического содержания законов упругости, и соответственно,— с появлением количественных поправок к ним.

Элементарным объектом теории относительности является событие, локализованное в E. Процесс деформирования есть континуум событий. Доопределим на него материальное описание среды [11]. Пусть эти события размечены элементами μ множества M, изоморфного области $X\subset E$. Каждому элементу $\nu\subset N$ соответствует одномерное многообразие событий $M^\nu\subset M$ с параметром τ, $\mu=(\nu,\ \tau)\subset M^\nu$. Изоморфизм $M\leftrightarrow X\subset E$, $x=\chi(\mu)$, назовем конфигурацией событий. Отражение M^ν E есть траектория (мировая линия) $x(\tau)$ точки ν. Введем, далее, вектор деформаций $u(x)=\chi(\mu)-\chi_0(\mu)|_{\mu=\chi^{-1}(x)}\approx u(\xi)=\chi(\mu)-\chi_0(\mu)|_{\mu=\chi_0^{-1}(\xi)}$, где $\xi=\chi_0(\mu)$ — некоторая фиксированная (отсчетная) конфигурация. Классическое трехмерное движение среды $\mathbf{u}(t,\ \mathbf{x})$ погружается в четырехмерную модель в виде состояния $u=(\mathbf{u},\ u^4=0)$. При этом образ развернутого во времени пространственного деформирования заменяется образом фиксированной пространственно-временной конфигурации, подобным используемому в статике. Конфигурации $\chi_0(\mu)$ припишем принятые в теории упругости свойства естественного состояния. Введем пространственно-временной тензор деформаций Грина $\varepsilon=\{\varepsilon_j{}^i\}$ и его 1-й и 2-й инварианты:

$$\varepsilon_j{}^i={}^1/_2(u_{x^j}{}^i+u_{x^i}{}^j),\quad i,\ j=\overline{1,\ 4};\quad \theta=\varepsilon_i{}^i$$
$$\sigma={}^1/_2\delta_{lm}{}^{ij}\varepsilon_i{}^l\varepsilon_j{}^m \tag{2.4}$$

вычисляемые по тем же правилам, но с суммированием от 1 до 4. Лоренц-инвариантное действие упругих деформаций обретает вид

$$J_2=-G/ic\int\limits_x U(\varepsilon)d^4x,\qquad U(\varepsilon)=k/2\theta^2-2\sigma \tag{2.5}$$

Это — единственный квадратичный инвариант, совпадающий с (2.1) при $u=(u,\ 0)$. Оно есть четырехмерный аналог статической 3-мерной конструкции (2.1), полной свободной энергии деформаций. Оно зависит только от интервалов между соседними событиями, в отличие от энергии (2.1), зависящей только от расстояний между соседними материальными точками среды. Связь тензора напряжений $p=\{p_{ij}\}$ с деформациями задается соответствующим доопределением формул обобщенного закона Гука: $p_{ij}=2G[\varepsilon_{ij}+\theta\delta_{ij}(k-2)/2]$, $i,\ j=\overline{1,\ 4}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$, $\delta_{ij}=1$. Тензор p_{ij} при $u_{4t}{}^{ij}/c=0$ совпадает с классическим тензором напряжений. Новый элемент здесь — пространственно-временные компоненты тензора p_{i4}.

2. Первое слагаемое J_1 действия зависит от поля скоростей $v(x)$ и плотности $g(x)$, а второе слагаемое J_2 — от перемещений событий $u(x)$. В целом динамическое состояние среды характеризуется совокупностью $(g,\ v,\ u)$ удовлетворяющей (1.4) и равенством, связывающим v с u. Выведем это последнее. Координаты события $\mu=(\tau,\ \nu)$ в деформированном и отсчетном состояниях связаны равенством $\chi(\tau,\ \nu)=\chi_0(\tau,\ \nu)+$ $+u[\chi_0(\tau,\ \nu)]$. Интервалы между событиями $(\tau,\ \nu)$ и $(\tau+d\tau,\ \nu)$ в этих состояниях: $ds^2=|dx|^2$, $ds_0=|d\xi|^2$, $ds^2=ds_0^2+2(\varepsilon d\xi)d\xi$. Дифференцируя это равенство вдоль траектории M^ν, имеем $dx(\tau,\ \nu)/ds=d\chi(\tau,\ \nu)/d\tau(ds/d\tau)^{-1}=[d\chi_0(\tau,\ \nu)/d\tau(ds_0/d\tau)^{-1}+u_{x^j}d\chi_0{}^j/d\tau(ds_0/d\tau)^{-1}]ds_0/ds$, где $ds_0/ds=$ $=1-(\varepsilon d\xi/ds_0)d\xi/ds_0$. Обозначим 4-вектор скорости в отсчетном состоянии $n=cd\xi/ds_0$. Пусть $n=\mathrm{const}$, $g_0=\mathrm{const}$. Систему координат, в которой все точки-тела среды неподвижны $n=(\mathbf{n}=0,\ n^4=ic)$, назовем связанной с упругим телом. Полученное равенство справедливо для всех $(\nu,\ \tau)\in M$. Но каждому событию $(\nu,\ \tau)$ отвечает точка $x\in E$, где оно происходит, а левая часть здесь есть значение вектора скорости $v(x)$ в этой точке. Поэтому с точностью до малых высшего порядка

$$v=n+Du,\quad Du=(u_x-(\varepsilon n)n)n=(u_x-(\varepsilon v)v)v \tag{2.6}$$

Это искомая связь векторов $v(x)$, $u(x)$. Более подробно

$$v^i=(1-\varepsilon_{kl}n^kn^l)(n^i+u_{x^j}{}^in^j),\quad Du^i=u_{x^j}{}^in^j-\varepsilon_{kl}n^kn^ln^i \tag{2.7}$$

Оператор $Du(x)$ есть 4-мерный аналог материальной производной. Он имеет эквивалентные в пределах инфинитезимального приближения представления через векторы n и v скорости в отсчетном и деформированном состоянии.

3. Каждый элемент упругой среды есть одновременно носитель инерции и субъект упругого взаимодействия. Гамильтоново действие среды

есть сумма действия свободного потока и упругого взаимодействия. Вариационный принцип, определяющий динамическое состояние $z=(g, v, u)$ упругой среды:

$$\delta J(z)=0, \quad J(z)=i\int\limits_x V(g,\varepsilon)\,d^4x; \quad V=cg+\frac{G}{c}(k/2\theta^2-2\sigma) \tag{2.8}$$

$$v^2=-c^2; \ \operatorname{div}(gv)=0; \ v(x)-Du(x)=\mathrm{const} \tag{2.9}$$

Произвольная константа в (2.9) — 4-вектор n. Функции $g(x)$, $v(x)$, $u(x)$ удовлетворяют граничным условиям, оговоренным выше.

Если речь идет о несжимаемой среде, то к связям (8) добавляется условие несжимаемости, которое должно быть приведено к лоренц-инвариантному виду. Последнее наряду с требованием совпадения этой связи с равенством $\theta=0$ при $u^4=0$, определяет ее в виде $\theta=0$.

Полученный вариационный принцип сводит определение состояния среды к задаче на условный экстремум, симметричной относительно координат пространства Минковского. Он инвариантен на группе лоренцевых вращений, если в (2.9) использовать представление материальной производной Du через вектор v. Если же — через вектор n, то последний играет роль внешнего параметра, меняющегося с изменением системы отсчета. Уравнения принципа уже не инвариантны, но — ковариантны, т. е. в этом случае, помимо характеристик деформированного состояния g, v, u в данной точке x, уравнения упругого тела содержат характеристику n движения тела в целом, как жесткого.

В системе отсчета, связанной с телом: $Du=(\mathbf{u}_t, 0)$, $v=[\mathbf{u}_t, i(c^2+\mathbf{u}_t^2)^{1/2}]$, $\rho=g_0$, $\rho=\rho_0(1+\operatorname{div}\mathbf{u})$. С точностью до слагаемых не существенных при варьировании, принцип (2.8) обретает вид

$$\delta J[u(x)]=0, \quad J=\int\limits_T\int\limits_{X_t}[{}^1/{}_2\rho_0\mathbf{u}_t^2-GU(\varepsilon)]\,dt\,dx^3 \tag{2.10}$$

Действие зависит только от деформаций u. Связи (2.9) не существенны. Варьируется только вектор $u(x)$, связанный граничными условиями. При $c\to\infty$ имеем классический вариационный принцип (2.1), (2.2).

3. Дифференциальные уравнения деформации. Нерелятивистский предел. 1. Исследуем вариационный принцип (2.8), (2.9) при помощи метода Лагранжа. Положим $g=g_0\cdot g_*$, где $g_0=\mathrm{const}$ инвариантная плотность в недеформированном состоянии, g_* — нормированная инвариантная плотность, $g_*=1+\Delta g_*$, где $\Delta g_*=g-g_0/g_0$ — малое относительное отклонение плотности. Имеем

$$L=cg_0g_*-\varphi(g_*v)-\lambda/2(v^2+c^2)+\mu(v-Du-n)+G/cU(\varepsilon)$$

где $\varphi(x)$, $\lambda(x)g$, $\mu(x)$ — обобщенные множители Лагранжа при соответствующих связях. Или, интегрируя по частям, имеем

$$L=g_*[cg_0+\varphi_x v-\lambda/2(v^2+c^2)]+\mu(v-Du-n)+G/cU(\varepsilon) \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial g_*}L=cg_0+\varphi_x v-\lambda/2(v^2+c^2)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}L=\varphi_x+\mu-\lambda v=0, \quad v=(\varphi_x+\mu)\lambda \tag{3.2}$$

Вектор-множитель μ имеет тот же порядок малости, что и вектор деформаций u. Поэтому при выводе 2-го равенства принято $\mu g_*^{-1}=$

$=\mu(1-\Delta g_*)=\mu$ с точностью до малых высшего порядка. По этой же причине здесь принято $(\mu Du)_v=0$. Далее, варьируя L по u:

$$EL=-D\mu+\frac{G}{c}EU(\varepsilon)=0 \tag{3.3}$$

где $EL=[(\partial/\partial u_{x^l})L]_{x^l}$ — оператор Эйлера. Поясним первое слагаемое

$$[(\mu_i Du^i)_{u^{\alpha}_{x^j}}]_{x^j}=\{\mu_i[u^i_{x^m}v^m-{}^1/_2 v^i[u^k_{x^l}+u^l_{x^k}]v^lv^k]_{u^{\alpha}_{x^j}}\}_{x^j}=$$

$$=\mu_{\alpha x^j}v^j-v^{\alpha}(\mu_{ix^l}+\mu_{lx^i})v^iv^l=D_{\mu_\alpha}$$

Здесь учитывается, что в отличие от скорости v, ее производные v_{x^k} малы, и поэтому $\mu v_x\approx 0$.

С учетом (3.2) и малости μ, можно записать

$$D\mu=[\mu_{x^j}\varphi_{x^j}-{}^1/_2\varphi_x(\mu_{kx^l}+\mu_{lx^k})\varphi_{x^k}\varphi_{x^l}]\lambda^{-1}$$

Таким образом, получены лоренц-инвариантные дифференциальные уравнения для четверки переменных $(\varphi, \mu, u, \lambda)$, описывающих динамику упругой среды

$$D\mu=G/cEU(\varepsilon),\quad (\varphi_x+\mu^2)=-\lambda^2c^2 \tag{3.4}$$

$$(\varphi_x+\mu)\lambda^{-1}-Du=n,\quad \varphi_x{}^2=\lambda^2c^2-2\lambda cg_0$$

К ним следует присоединить граничные условия на $u(x)$. Четверка $(\varphi, \lambda, \mu, u)$ определена уравнениями (3.4) с точностью до произвольной векторной константы n и граничных условий на функцию $\varphi(x)$.

В естественном состоянии $\mu\equiv 0$; $\lambda=g_0c^{-1}$; $v=n$; $\varphi_x=\lambda n$, т. е.

$$\varphi(x)=g_0c^{-1}(nx) \tag{3.5}$$

При данном $\varphi(x)$ в силу (3.4) имеем

$$\lambda=g_0c^{-1},\quad \mu=g_0c^{-1}Du \tag{3.6}$$

$$g_0D^2u=GEU(\varepsilon) \tag{3.7}$$

$$\varphi_xD_u=0 \tag{3.8}$$

Таким образом, значение (3.5) функции $\varphi(x)$ не противоречит уравнениям (3.4) и при $u\neq 0$, если выполняется условие (3.8), означающее требование ортогональности вектора Du вектору n (или φ_x, или $-v$, с точностью до малых высшего порядка).

В системе координат, связанной с упругим телом: $n=(n=0, n^4=ic)$. Согласно (2.6), имеем

$$v=Du=\dot{u}_t,\quad Du_4=c(u_{x^4}{}^4-\varepsilon_{44})=0,\quad v_4=c \tag{3.9}$$

Далее $\varphi_xDu=g_0c^{-1}(nDu)=g_0c^{-1}(nu_t+n_4Du_4)=0$, иными словами, связь (3.8) выполняется в данной системе координат, и в силу ее инвариантности — в любой другой при любом $u(x)$. Таким образом, система (3.4) свелась к независимым равенствам (3.6), (3.7), (3.8).

2. Уточним правую часть уравнения (3.7). Формула (2.5) действия упругих деформаций была получена и исследована в [7] для несжимаемой среды. Используя интегрирование по частям, нетрудно записать с точностью до слагаемых, несущественных при варьировании

$$2\int\sigma\, d^4x=\int h_j{}^i\, d^4x={}^1/_2\int(E^2-H^2)\,d^4x=-{}^1/_2\int(u_{x^j}{}^iu_{x^i}{}^j-\theta^2)\,d^4x$$

$$h_j{}^i={}^1/_2(u^i_{x^j}-u^j_{x^i}),\quad E=-u_t/c-u_{4x},\quad H=\operatorname{rot}u(t,x) \tag{3.10}$$

Используя эти представления для плотности действия $U(u_x)$ и применяя к нему оператор Эйлера, получим уравнение (3.7) в виде

$$g_0 D^2 u = G\Box u + G(k-1)\theta_x \tag{3.11}$$

где $\Box = \partial^2/\partial x^i \partial x^i$; g_0 — инвариантная плотность, численно совпадающая с плотностью ρ_0 в системе отсчета, связанной с телом; оператор D определен (2.6). В зависимости от понимания последнего, (3.11) можно рассматривать либо как ковариантное уравнение деформаций, зависящее от вектора-параметра n, либо — в паре с уравнением $\mathrm{grad}(v - Du) = 0$ — как лоренц-инвариантную систему уравнений состояния среды (u, v). Это уравнение совместно с граничными условиями на $u(x)$ определяет деформации упругого тела в произвольной системе отсчета. Найдя его решение, легко получить остальные компоненты состояния $z = (u, v, g)$: v — согласно (3.2), (3.6), и g — согласно (2.9). Уравнение (3.11) в системе отсчета, связанной с телом, обретает вид

$$b^{-2}\mathbf{u}_{tt} - \Delta\mathbf{u} = (k-1)\theta_{\mathbf{x}} \tag{3.12}$$

$$c^{-2}\mathbf{u}_{4tt} - \Delta\mathbf{u}_4 = -\frac{k-1}{c}\theta_t \tag{3.13}$$

$$\theta = c^{-1}\mathbf{u}_{4t} + \operatorname{div}\mathbf{u}, \quad \Delta = \partial^2/\partial\mathbf{x}^i\partial\mathbf{x}^i$$

$$(i = \overline{1,3}), \quad b = a(1 + a^2/c^2)^{-1/2}, \quad a = (G/g_0)^{1/2} \tag{3.14}$$

Эти дифференциальные уравнения похожи на соответствующие уравнения нерелятивистской механики, но имеют следующие отличия: 1) помимо 3-мерной вектор-функции $\mathbf{u}$ в них входит четвертая неизвестная функция u_4, и соответственно помимо привычных трех уравнений (3.12) — четвертое уравнение (3.13); 2) в левую часть уравнения (3.12) вместо коэффициента a входит коэффициент b. На асимптотике $c \to \infty$ уравнения (3.12), (3.13) становятся независимыми, причем (3.12) совпадает с уравнениями ньютоновой механики, а (3.13) имеет решение $u_4 \equiv 0$. Временной сдвиг $u_4 \neq 0$ не отражается на движении $u(x) = u[\xi + u(\xi)] \approx u(\xi)$ в силу инфинитезимальности модели, т. е. ньютонова механика данной среды содержится в (3.12), (3.13) в качестве указанной асимптотики. Отсутствие временного сдвига $u_4 = 0$ сохраняется и в неасимптотическом случае для тех деформаций, в которых отсутствует объемное сжатие, $\theta \equiv 0$. Вообще же, уравнения (3.12), (3.13) обусловливают наличие смещения событий во времени $u_4 \neq 0$ даже в покоящейся системе координат, в отличие от уравнений ньютоновой механики.

4. Продольные и поперечные волны. 1. Рассмотрим деформации вида $u(t, x) = [u^1 \equiv 0,\ u^2 = u^2(t, x^1),\ u^3 \equiv u^4 \equiv 0]$. Имеем: уравнение (3.13) выполняется, а (3.12) сводится к уравнению

$$b^{-2}u_{tt} - u_{xx} = 0; \quad u = u^2; \quad x = x^1 \tag{4.1}$$

Из этого уравнения следует, что коэффициент b имеет физический смысл скорости распространения возмущений в покоящейся системе координат. Он определяется формулой (3.14). Механическая характеристика среды a есть скорость распространения возмущений в силу нерелятивистских уравнений. Таким образом, из новых уравнений упругой среды следует новый физический эффект: поправка к скорости распространения поперечных возмущений в покоящейся системе координат. Наличие данной поправки противоречит бытующему представлению, что релятивистские эффекты — это эффекты больших скоростей. Она не зависит от скоростей тел-точек, a — только от ее механических характеристик G, ρ.

2. Рассмотрим деформации вида $u(t, \mathbf{x}) = [u^1(t, x^1),\ u^2 \equiv u^3 \equiv 0,$

$u^4(t, x^1)$]. В этом случае уравнение (3.14) приобретает вид

$$b^{-2}u_{tt}-ku_{xx}=\frac{k-1}{c}u_{4tx};\qquad u=u^1,\quad x=x^1 \tag{4.2}$$

а уравнение (3.13):

$$kc^{-2}u_{4tt}-u_{4xx}=-(k-1)c^{-1}u_{tx} \tag{4.3}$$

Обратим внимание, что отсутствие сдвига времени $u_4\equiv 0$ невозможно при $u_{tx}{}^1\neq 0$, т. е. продольное возмущение сопровождается временным. Будем искать возмущение в виде волны:

$$u=f(t-x/\alpha);\quad u_4=\beta f(t-x/\alpha) \tag{4.4}$$

где $f(\xi)$ — некоторая заданная функция; α, β — подлежащие определению константы. Подставляя (4.4) в (4.2), (4.3), легко убедиться, что эта волна будет решением (4.2), (4.3) при любом $f(\xi)$, если величины α, β удовлетворяют равенствам $b^{-2}-k\alpha^{-2}=-(k-1)c^{-1}\alpha^{-1}\beta$; $(kc^{-2}-\alpha^{-2})\beta=$ $=(k-1)c^{-1}\alpha^{-1}$.

Исключая β, получим уравнение, определяющее скорость продольной волны α:

$$y^2-\frac{1}{a_1{}^2}y+\frac{k-1}{a_1{}^2c^2}=0;\qquad y=\alpha^{-2}-c^{-2}$$

$$a_1=ak^{-1/2} \tag{4.5}$$

где a_1 — нерелятивистская скорость продольной волны. При

$$2a_1(k-1)^{1/2}<c \tag{4.6}$$

уравнение (4.5) имеет два действительных корня: $y_1>0$ и $y_2>0$, которым соответствуют значения $\alpha<c$. При $c\to\infty$: $y_1\to a_1^{-2}$ $(\alpha\to a_1)$, $y_2\to 0$ $(\alpha\to c)$, корень y_2 не имеет физического смысла, тогда как выбор корня y_1 согласуется с нерелятивистским приближением. Таким образом, продольные волны (4.4) либо отсутствуют при очень больших значениях a_1, нарушающих (4.6), либо имеют скорость $\alpha<c$. Конкретная формула скорости

$$\alpha=a_12^{1/2}[1+(1-4(k-1)a^2c^{-2})^{1/2}+2a_1^2c^{-2}]^{1/2}$$

Не исключена возможность экспериментальной проверки этих формул. Для стали $a\approx 7000$ м/с, т. е. поправка a^2/c^2 приблизительно совпадает с величиной эффектов СТО на спутниках, ныне непосредственно наблюдаемыми [15]. Скорость спутника $v\approx 8000$ м/с.

5. Энергия, импульс, момент импульса. Вариационный принцип (2.8) сводит уравнения упругой среды к задаче на условный экстремум. Подобно тому, как это делалось для свободного потока, можно записать этот принцип в терминах задачи о безусловном экстремуме, используя множители Лагранжа φ, λ, μ в качестве варьируемых переменных. Именно

$$\delta I(z)=0,\qquad z=(g,\varphi,\lambda,\mu,u),\qquad I(z)=i\int Ld^4x \tag{5.1}$$

где лагранжиан $L(g,\ \varphi_x,\ u_x,\ \lambda,\ \mu)$ определен (3.1) со значением v, определенным (3.2). Варьирование $I(z)$ по компонентам z дает уравнения (3.4), (2.9). 4-вектор энергии-импульса для действия (5.1):

$$P^j=-i\int T_4{}^j\,d^3x;\qquad j=\overline{1,4} \tag{5.2}$$

Причем $W=-icP^4$ — энергия, $P=(P^1,\ P^2,\ P^3)$ — импульс. Здесь

$$T_i{}^j=(\partial L/\partial z^\alpha_{x^j})\,z^\alpha_{x^j}-L\delta_i{}^j \tag{5.3}$$

тензор энергии-импульса среды. Отметим, что среди компонент z только φ и u входят в лагранжиан L со своими производными. Поэтому первое слагаемое (5.3) можно уточнить

$$(\partial L/\partial z^{\alpha}_{x^i})\, z^{\alpha}_{x^j} = \partial L/\partial u^{\alpha}_{x^i})\, u^{\alpha}_{x^j} + (\partial L/\partial \varphi_{x^i})\, \varphi_{x^j}$$

Кроме того, при подсчете T_i^j учитывается, что совокупность функций $z=(g_*, u, \varphi, \lambda, \mu)$ удовлетворяет уравнениям (3.6), (3.7), (3.8). Имеем

$$T_4^j = gn^4/cv^j + G/c\,(E^j u_{4x^4} + k\theta \mathbf{u}_{x^4}{}^j) \quad (j=1, 2, 3)$$

В системе отсчета, связанной с телом

$$T^j = ig\mathbf{u}^j + G/ic^2\,(E^j u_{4t} + k\theta \mathbf{u}_t{}^j) \quad (j=1, 2, 3)$$

$$P = P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}}, \qquad P_{\mathrm{I}} = \int \rho \mathbf{u}_t\, d^3x, \qquad P_{\mathrm{II}} = -G/c^2 \int (Eu_{4t} + k\theta \mathbf{u}_t)\, d^3x \tag{5.4}$$

Далее

$$T_4^4 = g_* g_0 c^{-1} n^4 v^4 - \mu u_{x^4} n^4 + G/cU_{\mathbf{u}_{x^4}} u_{x^4} + g_* \mu^2/2\lambda + G/cU(\varepsilon)$$

Здесь учтено, что уравнения (3.6), (3.7), (3.8) обеспечивают выполнение равенства $v^2 = -c^2$ только в первом приближении, именно $v^2 + c^2 = \mu^2/2\lambda$.

В системе отсчета, связанной с телом

$$T_4^4 = -\rho c - \rho \mathbf{u}_t^2/2c - G/2c\,[H^2 + E^2 + k\theta^2 - k/c\theta \mathbf{u}_{4t}]$$

$$W = W_{\mathrm{I}} + W_{\mathrm{II}}, \qquad W_{\mathrm{I}} = -c \int T_4^4\, d^3x = mc^2 + \int \rho \mathbf{u}_t^2/2 d^3x \tag{5.5}$$

$$W_{\mathrm{II}} = G/2 \int (H^2 + E^2 + k\theta^2 - k/c\theta \mathbf{u}_{4t})\, d^3x$$

Эти формулы получены с учетом равенств (3.12), (3.14), и в частности, следующего из них тождества

$$\int [\mathbf{u}_t^2/c^2 - u_{4x}^2]\, dx^4 = \int \left[E^2 - 2\frac{k}{c}\theta u_{4t}\right] d^4x$$

Первые слагаемые в этих формулах P_{I} и W_{I}, суть известные значения импульса и энергии макроскопических тел, т. е.— свободного инерционного потока. Вторые слагаемые, P_{II} и W_{II} суть импульс и энергия упругого взаимодействия элементов среды. В нерелятивистском приближении импульс отсутствует, а энергия совпадает с полной свободной энергией пространственных деформаций. Новые эффекты, связанные с релятивистской теорией: появление импульса упругих деформаций и дополнительных слагаемых к их энергии.

Величина P_{II} имеет нулевой предел при $c \to \infty$ и, кроме того,— второй порядок малости по сравнению с P_{I}, т. е. при одинаковом порядке величин ρ, G значение P_{II} может считаться пренебрежимо малым. Но при малых плотностях ρ и больших модулях упругости G они могут быть соизмеримы.

Поправка к энергии упругих деформаций для поперечных волн

$$(W_{\mathrm{II}} - U)/U = E^2/H^2 = u^2/cu_1{}^2 = a^2/c^2$$

где a — классическая скорость распространения поперечных колебаний. Эта поправка наряду с формулами скорости звука может служить основанием для экспериментальной проверки теории.

Подобно импульсу и энергии, динамическим инвариантом действия (5.1) является полный момент импульса среды $M(t) = M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} = \mathrm{const}$, где $M_{\rm I}$ — момент материальных точек среды, описываемый известными формулами для момента макроскопических тел, $M_{\rm II}$ — момент упругого взаимодействия. В нерелятивистском приближении $c\to\infty$ $M_{\rm II}\to 0$. Выражение для момента $M_{\rm II}$ можно заимствовать из электродинамики, опираясь на установленную ниже аналогию (для несжимаемой среды). Имеем [16]:

$$M_{\rm II}=-\frac{G}{c}\int[E\times\mathbf{u}]\,d^3x \qquad (5.6)$$

Подынтегральное выражение здесь есть векторное произведение.

6. Безынерционная упругая среда. Аналогия с электродинамикой и квантовой механикой. 1. Рассмотрим упругую среду нулевой плотности: $g=0$. Будем называть ее упругим полем. В классической механике это — объект эластостатики, деформации которого определяются уравнением

$$\delta J=0,\qquad J=G\int U(\varepsilon)\,d^3x \qquad (6.1)$$

где J — полная свободная энергия деформаций (2.1), (2.2). В лоренц-инвариантной механике деформации определяются принципом наименьшего действия (2.8), где действие $J=J_2$, (2.5), есть формальный 4-мерный аналог статической конструкции J, однородный и изотропный в пространстве Минковского и соответственно, принцип (2.8) — аналог условия равновесия (6.1):

$$\delta J_2(u)=0,\qquad J_2=G/ic\int U(\varepsilon)\,d^4x \qquad (6.2)$$

В отличие от (6.1), принцип (6.2) является динамическим. Его решениями, в частности, являются волны. Причем скорость их распространения равна скорости света и лоренц-инвариантна.

Особый интерес представляет несжимаемая среда этого типа $\theta=0$, изученная в [7, 8]. Бросается в глаза аналогия ее динамики с динамикой электромагнитного поля. Учитывая представление (3.10), легко видеть, что действие (6.2) совпадает с точностью до постоянного множителя с действием электромагнитного поля [16], если пространственное смещение $\mathbf{u}$ положить пропорциональным магнитному потенциалу поля $\mathbf{u}_e$, а u_4 — электрическому $u_e=\beta u$, $\beta=\mathrm{const}>0$, $\beta=(4\pi G)^{1/2}$.

Обсуждение проблемы существования механической среды, динамика которой имеет корректное подобие с электродинамикой сыграло заметную роль на определенном этапе развития физики в связи с попытками обоснования концепции механического носителя электромагнитного поля, эфира [6]. Ответ на этот вопрос, опирающийся на нерелятивистские модели, был, естественно, отрицателен. В свете сказанного выше, такая среда существует. Это — упругая, несжимаемая, однородная, изотропная, безынерционная среда.

2. Введем в рассмотрение большие деформации несжимаемого упругого поля. Для них сохраняется вариационный принцип (6.2) с лагранжианом $U(\varepsilon)$, лоренц-инвариантным, но не ограниченным инфинитезимальным приближением (2.4), (2.5). Других уточнений принципа здесь не потребуется. Можно выделить классы больших деформаций, обладающие динамическим подобием с материальной точкой, электрическим зарядом, квантовой частицей.

3. Пусть имеется система отсчета x' и деформированное состояние $u'(x')$ такое, что определен интеграл

$$\alpha=G\int_T U(\varepsilon)\,d^3x' \qquad (6.3)$$

не зависящий от x_4'. Соответственно

$$J(u')=\int\limits_T \alpha\, dt' = \int\limits_{y_0'}^{y_1'} \alpha/c\, ds', \qquad y'_{0,1}=(\mathbf{y}', ict'_{0,1})$$

где $ds'=cdt'$ — элемент дуги произвольно фиксированной мировой линии $\mathbf{x}'=\text{const}=\mathbf{y}'$. Пусть теперь пространственная часть $\mathbf{x}'$ системы x' движется поступательно относительно системы x с постоянной скоростью v. Такое движение означает поворот системы x' относительно x с инвариантным интервалом

$$ds^2=c^2dt^2-dy^2=(c^2-\mathbf{v}^2)\,dt^2=(cdt')^2$$

Действие J и, следовательно, интеграл (6.3) также суть лоренцевы инварианты, поэтому:

$$J(u)=-mc\int\limits_{y_0}^{y_1} ds, \qquad m=-\alpha/c^2 \tag{6.4}$$

Введем в рассмотрение класс A состояний $u(x)$ таких, что: 1) для каждого из них существует система x', где определен интеграл (6.3); 2) для любой мировой линии $\mathbf{x}'=\text{const}=\mathbf{y}'$ производная $\mathbf{y}^{\cdot\cdot}(t)$ достаточно мала, чтобы с необходимой точностью можно было считать систему x' инерциальной, движущейся в каждый момент времени t со скоростью $v=$ $=\mathbf{y}^{\cdot}(t)$, где $\mathbf{y}(t)\subset\mathbf{E}$ — траектория точки $\mathbf{x}'=\text{const}=\mathbf{y}'$. Тем самым остается справедливой инвариантность интервала ds и интегралов J и α, и на классе состояний A справедливо представление (6.4). Теперь ds — элемент дуги траектории $y(\cdot)$. То есть действие $J(u)$ зависит только от траектории. Вариационный принцип (6.2) для состояния $u(x)\in A$ имеет вид $\delta J(y(\cdot))=0$. Но это совпадает с вариационным уравнением движения материальной точки с массой покоя m. Таким образом, выделен класс деформаций, моделирующий инерционные тела. Феномен инерции следует, тем самым, из уравнения безинерционной среды и кинематики СТО. Деформации $u\in A$ назовем стационарными образованиями, а систему x' — связанной с ними.

Далее будут изучаться такие стационарные образования $u=v(x,y)$, что большие деформации сосредоточены в малой окрестности $|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|<\rho$ точки $\mathbf{y}'\in\mathbf{E}$, а вне нее они удовлетворяют инфинитезимальному приближению. Назовем такие образования частицами, а деформации $v(x,y)$ при $|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|>\rho$ — их полями. Для потока невзаимодействующих частиц справедливы, очевидно, описание и уравнения пункта 1.

4. Введено в рассмотрение два класса деформаций: малые смещения событий $u(x)$, распределенные в пространстве, которые будем называть полями, и большие деформации, частицы, сосредоточенные в малых областях. Исследуем взаимодействие этих двух асимптотических вариантов деформаций. Назовем заряженной частицу $v(x,y)$ с полем

$$v^4(x)=\varphi_{x^4}(x); \quad v(t,v,y)=\eta(t)\,(\mathbf{x}-\mathbf{y})/(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2+\varphi_x(x);$$

$$\eta(t)=ect/8\pi \tag{6.5}$$

где e — число, $\varphi(x)$ — произвольная функция, запись — в системе координат, связанной с частицей.

Определим состояние «заряд в поле деформаций», определив его действие формулой $J(u+v)$, J задано (2.4), (2.5). Эта формула была бы справедлива, если бы деформации $v(x)$ были малы всюду. Предполагается, что для данного более сложного случая она дает приемлемое приближение. Согласно [7]:

$$J(u+v)=J(u)+S[u,y(\cdot)], \qquad S[u,y(\cdot)]=\int_{y_0}^{y_1}(-mc\,ds+e/cu(y)dy) \tag{6.6}$$

Здесь $m=-\alpha/c^2$ — определяется (6.3). Выражение (6.6) совпадает с действием частицы с электрическим зарядом e и массой m в поле с потенциалом $u_e(x)=\beta u$, [16]. Варьируя (6.6) по траектории $y(\cdot)$ и по $u(x)$, получим соответствующие дифференциальные уравнения электродинамики. Это значит, что малые деформации упругого поля действительно можно рассматривать как носитель электромагнитного поля, при этом деформированное состояние, названное здесь зарядом, идентифицирует одноименный феномен электродинамики. Поле (6.5) совпадает с полем последнего.

5. Аналогом нейтрального точечного тела (материальной точки) является частица с потенциальным полем $v(x, y)=\varphi_x(x, y)$, которое не взаимодействует с зарядом. Сумма таких деформаций имеет действие, равное сумме действий (6.4) слагаемых частиц (действие потенциальных полей равно нулю) и удовлетворяет инфинитезимальным уравнениям упругого поля. Ее континуальный вариант является аналогом свободного потока и может описываться терминами и уравнениями п. 1. Но если учитывать нелинейный эффект больших деформаций, то такая сумма уже не есть решение (6.2), (2.7). К ней следует добавить поправку $u(x)$, не удовлетворяющую инфинитезимальным уравнениям и связанную с плотностью потока $\rho(x)$, или $g(x)$ условием

$$u(x)\neq 0 \text{ если } g(x)\neq 0 \text{ и } u(x)=0, \text{ если } g(x)=0 \tag{6.7}$$

Таким образом, из данного здесь определения частицы следует, что их поток сопровождается возмущением упругого поля $u(x)$. Простейший способ моделирования этого взаимодействия — связать поток j и деформации $u(x)$ равенством, из которого следовало бы (6.7). Это равенство должно быть лоренц-инвариантно и не противоречить требованию $g\geqslant 0$. Для обеспечения последнего необходимо записать искомое равенство в виде, разрешенном относительно состояния потока. С потоком связан единственный инвариант g. Полагая возмущение малым, следует включить в искомое равенство только его инварианты минимальной, т. е. 2-ой степени: u^2, θ^2, σ. Но $\theta=0$, а инвариант σ уже использован в лагранжиане $U(\varepsilon)$. Поэтому имеем, используя нормированную инвариантную плотность $g_*=g/m$:

$$g_*=au^2, \quad a=\text{const}>0 \tag{6.8}$$

Для знакоопределенности функции $u^2=\mathbf{u}^2-u_4^2$ достаточно потребовать существования такой системы координат, где $u_4(x)\equiv 0$. Тогда инвариант $u^2(x)$ неотрицателен в любой системе отсчета.

Таким образом, условия инвариантности и инфинитезимальности определяют с точностью до константы a агрегированное описание взаимодействия потока частиц и сопровождающего поля.

Описанное взаимодействие остается справедливым и при вероятностном понимании потока. Подразумевается, что частица совершает некий танец, описываемый вероятностным распределением $\rho_*(t, x)$ взаимодействуя с полем. Взаимодействие «частица — сопровождающее поле» сводится, таким образом, к взаимодействию «поток вероятности материальной точки — поле деформаций».

6. Запишем вариационное уравнение исследуемого взаимодействия. Динамическое состояние этой системы сред описывается тройкой функций $z=(g_*, j_*, u)$, удовлетворяющей связям (1.4), (6.8) и обеспечиваю-

щей условный экстремум действия (2.8). Можно также состояние описывать тройкой функций (g, φ, u), удовлетворяющей (6.8) и обеспечивающей экстремум действия $J=J_1+J_2$ (1.9), (2.5):

$$\delta I(z)=0, \quad z=(\varphi, u); \quad I=i\int L d^4x$$

$$L=cau^2/2(m+\varphi_x/m)+G/cU(u_x) \tag{6.9}$$

Из анализа п. 1 можно видеть, что представление действия (1.9) справедливо, вообще, только для свободного потока. Поэтому закон (6.9) взаимодействия потока с полем приводит к отказу от некоторых свойств материального потока. Так, на решениях (6.9) возможно невыполнение уравнения (1.8). Оно выполняется только для сопровождающих полей $u(x)$, удовлетворяющих инфинитезимальному уравнению (6.2), например, при $u(x)=\mathrm{const}$. Будет показано, однако, что (1.8) выполняется в некотором осредненном смысле. Далее, варьируя u, φ:

$$L_u-(L_{u_{x^j}})_{x^j}=cau(m+\varphi_x{}^2/m)-G/cu_{x^ix^j}=0 \tag{6.10}$$

$$L_\varphi-(L_{\varphi_{x^j}})_{x^j}=(u^2\varphi_{x^j})_{x^j}=0 \tag{6.11}$$

Уравнения (6.10), (6.11) совместно с граничными условиями определяют решение вариационной задачи (6.9). Введем в рассмотрение комплексный вектор $\Psi(x)=\{\Psi^j\}$, $j=1, 4$, и число $\hbar$ связанное с переменными состояния u, φ и константами a, m, G – формулами

$$\Psi^j=b^j\exp(ic\varphi/\hbar), \quad b^{j2}=au^{j2}; \quad a\hbar^2=mG \tag{6.12}$$

Если скалярное уравнение (6.11) усилить до покомпонентного равенства

$$(u^{i2}\varphi_{x^j})_{x^j}=0 \quad (i=\overline{1,4}) \tag{6.13}$$

то система (6.10), (6.13) эквивалентна комплексному уравнению

$$(-c^2m^2+P^2)\Psi=0 \tag{6.14}$$

где $P=\{P_j\}$, $P_j=\hbar\partial/\partial x^j$, $j=\overline{1,4}$; т. е. если вектор Ψ удовлетворяет (6.14), то переменные состояния удовлетворяют (6.10), (6.11).

Но уравнение (6.10) совпадает с векторным комплексным уравнением Клейна – Гордона [17], описывающим релятивистскую квантовую механику частицы (бозона), если величину $\hbar$ отождествить с постоянной Планка.

Это уравнение дополняется в квантовой механике равенством $\operatorname{div}\Psi(x)=0$, эквивалентным совокупности условий несжимаемости $\theta=0$ и упомянутого выше требования $u^2\geqslant 0$.

Таким образом, исследуемая система двух сред описывается в терминах комплексных волновых вектор-функций, уравнения которых совпадают с уравнениями релятивистской квантовой механики частицы с точностью до константы $\hbar$.

В нерелятивистском приближении направление вектора b оказывается несущественным, и под этим символом можно понимать скалярную функцию. Если предположить дополнительно, что величина u_{tt}/c пренебрежимо мала, то функция $\Psi(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Шредингера. При этом ее аргумент $c\varphi$ отличается от одноименной функции в релятивистском варианте дополнительным слагаемым mc^2t. Соответственно, энергия $-c\varphi_t$ не включает теперь в себя энергию массы покоя.

Волновая вектор-функция $\Psi(x)=b(x)\exp[i\varphi(x)/\hbar]$ имеет наглядный физический смысл. Вектор $\mathbf{b}$ пропорционален вектору u пространственно-временного смещения упругого поля. Одновременно его квадрат совпадает с инвариантной нормированной плотностью потока g_*, а в нерелятивистском приближении – с его плотностью ρ_*. В этом приближении плотность $\rho_*=b^2=|\Psi|^2$ неотрицательна и допускается ее понимание как плотности вероятности положения материальной точки в пространстве, совпадающее со смыслом функции $|\Psi|^2$ в квантовой механике. Аргумент волновой функции $c\varphi(x)$ имеет смысл действия частицы в положении x. Его градиент $c\varphi_x(x)$ – 4-импульс, причем $c\varphi_x$ – импульс, а $-c\varphi_t$ – энергия.

7. Квантовые частицы делятся на два класса – бозоны и фермионы, обладающие, соответственно, векторными и спинорными трансформационными свойствами, целым и полуцелым спином. Уравнение (5.14) описывает динамику бозонов. Оказывается, динамические состояния частица – сопровождающее поле агрегируются также в семейства, представимые в виде, подобном динамике фермионов [17, с. 42–45].

7. Наблюдение и эффект квантования. 1. Найдены деформированные состояния, которые описываются комплексными волновыми функциями, связанными уравнениями квантовой механики. Но основания последней не исчерпываются ее уравнениями. Это также специальные постулаты наблюдения. Результаты [10] позволяют понять и эти постулаты в рамках данной модели.

Функции Ψ при фиксированном t рассматриваются в квантовой механике как элементы комплексного гильбертого пространства с произведением $(\Psi_1, \Psi_2)=\int \Psi_1(t, \mathbf{x})\Psi_2^*(t, \mathbf{x})d^3x$.

Они нормированы. В нерелятивистском случае – условием $(\Psi, \Psi^*)=1$. Согласно п. 6 они описывают инфинитезимальные деформации, удовлетворяя однородным уравнениям. Наблюдаемые динамические характеристики суть эрмитовы формы $I(\Psi)=(\Psi, L\Psi)$, где L – линейный оператор, называемый оператором данной наблюдаемой. Таковы, например, динамические инварианты уравнения (6.14) – импульс, энергия, момент импульса [18].

Введем в рассмотрение способ наблюдения характеристики y в заданном состоянии Ψ. Он состоит в последовательности замеров, в которых значения y случайны (для простоты предполагается дискретность ее возможных значений) с вероятностным законом распределения $P(y, \Psi)$. При этом среднее значение наблюдаемой $\bar{y}$ совпадает с теоретическим значением $I(\Psi)$. Это значит, что допускаются существенные погрешности в каждом замере, которые отфильтровываются операцией осреднения. Такой способ наблюдения назовем стохастическим, корректным в среднем. Перечисленные свойства рассматриваемых деформаций относят их к классу, для которого согласно [10] справедливо следующее утверждение: пусть имеется полная система состояний $\{\Psi_i(x)\}$, $i=1, 2, \ldots$, в которых результаты наблюдения достоверны со значением $P(y_i, \Psi_i)=1$. Тогда: 1). закон распределения y в данном состоянии имеет вид $P(y_i, \Psi)=|(\Psi_i, \Psi)|^2$; $P(y, \Psi)=0$, $y\neq y_i$; 2); y_i и Ψ_i суть собственные значения и функции оператора L.

Это – постулируемая в квантовой механике количественная связь распределения $P(y, \Psi)$ со спектром оператора наблюдаемой величины (принцип суперпозиции). Таким образом, аналогия динамики деформаций типа «частица – сопровождающее поле» с квантовой механикой охватывает и квантовые законы распределения, если оговорить способ наблюдения деформаций: стохастический, корректный в среднем, а также предположить наличие состояний, в которых наблюдаемая величина детерминирована. В силу сказанного выше последние суть собственные функции оператора L наблюдаемой величины.

Наличие таких состояний при наблюдении координат частицы следует из установленного здесь вероятностного смысла квадрата модуля волновой функции. Это — δ-функции Дирака.

Собственные функции операторов энергии и импульса получаются диагонализацией соответствующих динамических инвариантов [18] и имеют вид

$$\Psi(x)=b\exp[i(px)/\hbar]=b\exp[i(\mathbf{px}-Et)/\hbar] \tag{7.1}$$

$$b=a^{1/2}u=\mathrm{const},\ p=(\mathbf{p},\ p_4)=\mathrm{const};\ E^2=\mathbf{p}^2c^2+m^2c^4 \tag{7.2}$$

В этих состояниях сопровождающее поле постоянно $u(x)=\mathrm{const}$ и не обладает импульсом и энергией. Последние равны $\mathbf{p}$ и $|E|$ и целиком сосредоточены в частице. Величина E может быть положительна или отрицательна. С ее знаком связана специальная характеристика квантовой частицы, которая здесь не обсуждается. Связь (7.2) есть конкретизация (1.8). Она выполняется в каждом замере энергии-импульса, и в силу оговоренных свойств наблюдения — справедлива и для средних значений квадратов энергии и импульса в любом состоянии $\Psi(x)$.

Направление вектора деформаций u сопровождающего поля представляет собой наглядную интерпретацию дополнительных степеней свободы квантовой частицы по сравнению с классической — поляризации волнового вектора Ψ. Положение частицы в состоянии (7.1) не определено (закон распределения вероятности — равномерный).

Момент импульса складывается из момента частиц (орбитальный момент) и момента поля. Оба они в состоянии (7.1) равны нулю. Но энергия бозона $|E|$ и импульс p детерминированы и на семействе нормированных линейных комбинаций

$$\Psi(x)=b(t)\exp[i(\mathbf{px})/\hbar],\quad b=b_+\exp[+i/\hbar(Et)]+b_-\exp[-i/\hbar(Et)]$$

где b_+, b_- — произвольные комплексные векторы, связанные требованиями нормированности вектора $\Psi(x)$ и ортогональности векторов $b(t)$ и p. В частности, в это семейство входят и волновые векторы с сопровождающим полем

$$b(t)=c_1\sin[|E|t/\hbar]+c_2\cos[|Et/\hbar|] \tag{7.3}$$

где c_1 и c_2 — действительные 4-векторы. Этому волновому вектору отвечает колеблющееся во времени и постоянное в пространстве сопровождающее упругое поле. Момент таких состояний совпадает с моментом импульса (5.6) деформаций сопровождающего поля. Он является аналогом квантового феномена спина. Диагонализация квадратичной формы (5.6) с учетом (6.12), дает собственные значения проекции этого момента на направление p, равные 0, $\pm\hbar$ [18].

2. Следующий необходимый шаг в моделировании квантовых явлений: описание в терминах деформаций взаимодействия частиц. Пусть имеется пара частиц массы m_1, m_2, положение $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ которых случайно и описывается в каждый момент времени плотностью вероятности $\rho(t,\ \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2)$. Движение рассматривается в нерелятивистском приближении и описывается током вероятности $\mathbf{j}(t,\ \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2)=(\mathbf{j}_1(t,\ \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2),\ \mathbf{j}_2(t,\ \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2))$ связанным с плотностью вероятности уравнением непрерывности в пространстве $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$:

$$\rho_t+\mathbf{j}^i_{1_{\mathbf{x}_1}i}+\mathbf{j}^i_{2_{\mathbf{x}_2}i}=0 \tag{7.4}$$

Новым моментом здесь является несовпадение пространства случайных параметров $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ (положение частиц $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$) и пространства аргументов поля деформаций $u(t,\ \mathbf{x})$. Ввиду этого сопровождающее поле $u(t,\ \mathbf{x})$ следует считать случайным, в отличие от модели одной частицы. Сопровождающее поле этой системы частиц представим в виде суммы

$$u(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2)=u_1(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}_2)+u_2(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}_1) \tag{7.5}$$

где положения частиц $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ играют роль случайных параметров; $u_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}_2)$ — сопровождающее поле первой частицы при фиксированном положении $\mathbf{x}_2$ второй частицы; $u_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}_1)$ — поле второй частицы соответственно. То есть предполагается, что каждая из частиц имеет сопровождающее поле, зависящее от положения другой частицы. При каждом фиксированном положении последней имеет место связь (6.8):

$$\rho_1(t, \mathbf{x}/\mathbf{x}_2)=au_1^2(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}_2),\ \rho_2(t, \mathbf{x}/\mathbf{x}_1)=au_2^2(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \qquad (7.6)$$

Левые части этих равенств суть условные плотности распределения. Действие такой композиции записывается в виде $J=J_1(\rho, \mathbf{j})+J_2(u)$, где J_1 — среднее действие частиц, J_2 — среднее действие сопровождающего поля.

Можно показать [9], с. 95, что состояние $[\rho(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ системы, обеспечивающее условный экстремум $\delta J=0$ при связях (7.4), (7.5), (7.6), представимо при помощи волновой функции $\Psi(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)=$ $=b(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\exp(ic\varphi(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)/\hbar)$, $b^2=au_1^2=au_2^2$, φ — множитель Лагранжа при связи (7.4), удовлетворяющей уравнению Шредингера

$$i\hbar\Psi_t=-\hbar^2/(2m_1)\,\Psi_{x_1^i x_1^j}-\hbar^2/(2m)\,\Psi_{x_2^j x_2^j} \qquad (7.7)$$

Ничто не мешает обобщить эти факты с системы 2-х частиц на систему произвольного числа их числа N, в том числе $N\to\infty$ — квантовые поля.

3. Полученная здесь модель квантовых явлений дает новый материал для обсуждения оснований квантовой механики. Общепринятой в современной физике является корпускулярно-вероятностная ее интерпретация, данная Борном [19]. Согласно ей физической реальностью является только локальный компонент нашей модели, частица, обладающая энергией, импульсом, моментом, включая собственный, и свойством поляризации.

Волновые свойства частицы проявляются в распределениях вероятности положения в пространстве и других характеристик частицы. Этим волнам приписывается онтологический статус «промежуточной реальности». Они удовлетворяют законам причинности, воплощенным в волновом уравнении, но не обладают такими атрибутами материи, как энергия и импульс.

Имеется также менее признанная и разработанная концепция Де-Бройля, согласно которой физическая реальность приписывается паре частица — сопровождающее поле (материальная волна — пилот). Полученную здесь модель можно, очевидно, рассматривать как развитие и обоснование концепции Де-Бройля. Носителем частицы и сопровождающей волны оказываются упругие деформации, описываемые комплексным волновым вектором. В литературе имеется целый ряд механических моделей генезиса волновой функции [19] разной степени корректности, но они не раскрывают связи последней с распределениями наблюдаемых величин, кроме положения частицы. Кроме того, они не описывают частиц со спином. Однако именно феномены спина и поляризации являются аргументами в пользу концепции Де-Бройля. Согласно корпускулярной концепции спин — это собственный момент импульса частицы. Но попытка приписать конечный механический момент объекту достаточно малых размеров не выдерживает анализа. Остаются констатации типа: «Это свойство элементарных частиц является специфически квантовым и принципиально не допускает классической интерпретации» [20]. Здесь спин находит естественное объяснение как момент сопровождающего поля деформаций. Так же, как и поляризация частицы, тоже не интерпретируемая с традиционных позиций. Тот факт, что сопровождающее поле не обладает импульсом и энергией, следует из конструкции их собственных состояний.

Законы квантовой механики формулируются единообразно не только для единственной квантовой частицы, но и для их системы, изображаемой точкой с n-мерным вектором обобщенных координат q. Этот факт считается аргументом против концепции материальных волн. Действительно, если можно как-то интерпретировать пространственную сопровождающую волну частицы, то как понять подобную же волну в абстрактном пространстве обобщенных координат? Здесь этот вопрос получает ответ.

Согласно современным физическим взглядам адекватны наблюдаемой реальности только квантовые поля. Остальные суть разные степени их приближения. Но именно их модель здесь оказывается наиболее далека от исходного объекта — упругого твердого тела. От его деформаций остались случайно взаимодействующие обрывки (7.5) в виде частиц и сопровождающих полей. Согласно одной из концепций квантовой механики [21], эту хаотизацию естественно считать привнесенной внешним воздействием наблюдателя. Такие внешние воздействия уже вошли в аксиоматику наблюдения одной частицы. Но — не в описание ее состояния, волновую функцию. Взаимодействие частица — сопровождающее поле можно обусловить внутренними параметрами деформаций среды. Волновая же функция квантовой системы описывает деформации упругого поля при наличии случайных внешних возмущений от наблюдателя.

8. Упругий пространственно-временной континуум. 1. Исследование п. п. 6, 7 показывает, что если физическому вакууму приписать свойства безынерционной среды (упругого поля), то он оказывается способен генерировать следующие физические явления: инерционные механические тела; феномены электродинамики, поле и заряд, с законами их взаимодействия; квантовые явления.

Упругий вакуум допускает различные интерпретации, от механистического эфира XIX века до абстрактного действительного векторного поля. Но из соображений минимального описания предпочтительно приписать его свойства физическому объекту, уже выполняющему в современной физике сходные функции. Такой объект имеется — мировой пространственно-временной континуум ОТО (ПВК). Это — континуум событий локализованных в пространстве-времени координатным вектором x, обеспеченный средствами наблюдения. Он обладает некоторыми геометрическими свойствами. Определены интервалы между близкими событиями, описываемые римановой метрикой ds, $ds^2=g_{ij}(x)dx^i dx^j$. Метрический тензор $g(x)=\{g_{ij}(x)\}$ может изменяться в связи с динамикой окружающих массивных тел и электромагнитного поля. Эти изменения являются постулируемым физическим свойством ПВК, которое можно проверить наблюдением либо непосредственно интервалов, либо — следствий их изменений. К последним относится гравитационное поле. Определено действие $J_g(g)$ и уравнение геометрического состояния ПВК $\delta J_g(g)=0$ [16].

Приписывание этому объекту свойства упругости является просто расширением класса его деформаций. Помимо изменений локальных интервалов допускается смещение $u(x)$ координат событий согласно описанной здесь феноменологии с поправкой на неевклидовость пространства x. Геометрическое состояние ПВК теперь уже описывается парой $z=(g, u)$ с действием $J(z)=J_g(g)+J_u(u, g)$. Для соответствующих классов упругих деформаций имеется готовая аналитическая запись действия $J_u(u, g)$ в римановом пространстве. Например, для частицы это (1.1) с римановой метрикой ds; для малых деформаций — действие электромагнитного поля при наличии гравитационного поля. Слагаемое $J_g(g)$ не зависит от векторных деформаций $u(x)$ в силу аксиоматики ОТО. Уравнение $\delta J(z)=0$ совпадает с уравнениями ОТО при отождествлении деформаций $u(x)$ с моделируемыми видами материи: макроскопическими телами и электромагнитным полем. Имеются и некоторые новые эффекты, следующие из геометрического смысла электромагнитного поля [8], [9]. Они достаточно малы, но не исключают возможной их проверки. Такой ПВК, очевидно, выполняет функции единых полей 4-мерных геометрических теорий 20—30 годов с добавлением к ним квантовых эффектов.

Возможны и другие геометрические описания упругого ПВК, не противоречащие экспериментальным основаниям ОТО. Так в [8, 9] тензор $g(x)$ рассматривается как локализация векторных деформаций.

В [22, 23] тензор $g(x)$ обусловливается распределенными упругими дислокациями. Эти идеи, однако, высказаны на нерелятивистском уровне, и не анализируется их связь с основаниями ОТО.

2. Упругие деформации ПВК определены с точностью до неизвестного модуля упругости G. Можно оценить последний, если предположить, что масса электрона имеет тот же порядок, что и масса его поля. Зная значения m и e, легко получить в силу (2.5), (3.10), (6.3), (6.5), полагая $\rho\approx 10^{-13}$ см (классический радиус электрона): $G=10^{25}\div 10^{27}$ кГ/см^2. 1 см/сек скорости деформаций u_i отвечает $10^6\div 10^7$ единиц напряженности электрического поля [17] стр. 31, 32. Т. е. модуль упругости ПВК в 10^{20} раз выше, чем у стали. Можно также оценить величину сопровождающего поля деформаций электрона, [9], стр. 101. В состоянии (7.1) $|u|\approx 10^{-17}$ см. Это — меньше минимальных расстояний, фигурирующих в современной физике (радиус сильных взаимодействий 10^{-13} см, слабых — 10^{-15} см).

3. В последние годы большой интерес физиков привлекают многомерные единые геометрические теории, восходящие к конструкции Калузы [24] 5-мерной единой теории гравитационного и электромагнитного поля. В основе их лежит геометризация параметров динамических симметрий частиц и добавление их к пространственно-временным координатам единого поля, с доопределением римановой метрики на это расширенное пространство. Однако, 4-мерный и многомерный принципы синтеза единых теорий не столь противоречивы, как это может показаться. Проиллюстрируем этот факт на динамике заряженной частицы.

Введем в рассмотрение семейство А деформаций типа частиц с полем (6.5), с функциональным параметром $\eta(t)$, вообще $\eta^{\cdot}(t)\neq\text{const}$. Действие $J[u(t)]$, $u(x)\in A$ согласно (6.2), в связанной системе координат

$$J=\int\limits_T(-mc^2+\alpha'\eta^2)\,dt$$

где $m=-\alpha_0/c^2$ — интеграл (6.3) в зоне больших деформаций $|x-y|<\rho$; $\alpha'\eta^2$, $\alpha'>0$ — тот же интеграл в зоне $|x-y|>\rho$, подсчитанный с учетом (2.5), (3.10), (6.5). Переходя к движущейся частице, и полагая достаточно малыми величины $y^{\cdot\cdot}(t)$, $\eta^{\cdot}(t)$, $y^{\cdot\cdot}(t)$, $\eta^{\cdot\cdot}(t)$, получим аналогично п. 6.3:

$$J\approx\int\limits_T(-mc+\alpha'\eta^{\cdot 2})\,(1-y^{\cdot 2}/(2c^2))\,dt\approx-\int\limits_{y_{0+}}^{y_{1+}}mc\,ds_+ \tag{8.1}$$

$$ds_+{}^2=c^2dt^2-dy^2-(dy^5)^2,\ y_+=(y,\ y^5),\ y^5=(2\alpha'/mc^2)^{1/2}\eta$$

Т. е. такое деформированное состояние определяется траекторией $y_+(\cdot)$ в 5-мерном эвклидовом пространстве E_+, удовлетворяющей в силу (6.2) равенству $\delta J[y_+(\cdot)]=0$. Это — прямая в этом пространстве. В частности, $\eta^{\cdot}=\text{const}=ec/8\pi$. Для этой траектории справедливы законы сохранения 5-вектора импульса-энергии и совокупности моментов.

Обобщим 5-мерное представление на состояние «заряженная частица в поле $u(x)$». При тех же допущениях для действия остается справедливым представление (6.6), которое при малых $y_+^{\cdot}$ можно записать в виде

$$J[y_+(\cdot)] \approx -\int\limits_{y_{+0}}^{y_{+1}} mc\, ds_+, \qquad ds_+{}^2 = g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

где под α, β подразумевается суммирование от 1 до 5; компоненты $g_{\alpha\beta}(x)$ при α, $\beta=1, \ldots, 4$ совпадают с компонентами метрического тензора пространства E, $g_{5\beta}(x)=(2/m\alpha' c^2)^{1/2} u^\beta$, $\beta=1{,}4$; $g_{55}=1$. Т. е. действие такого состояния определяется траекторией точки в 5-мерном римановом пространстве R_+ с указанной метрикой и совпадает с точностью до постоянного множителя с длиной этой траектории.

Тензор $g(x)$ совпадает с 5-мерным метрическим тензором Калузы [24] при отсутствии гравитационного поля. Вводя последнее, легко доопределить его до полного тензора Калузы. Т. е. 5-мерный мир Калузы можно рассматривать как способ описания 4-мерных деформаций ПВК. Пятое измерение x^5 обретает смысл соответствующей характеристики деформаций ПВК.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Synge J. L.* A theory of elasticity in general relativity // Math. Zeitshrift. 72. 1959. P. 82–87.
2. *Rayner C. B.* Elasticity in general relativity // Proc. of Royal Soc. Ser. A. Math. and Phys. 1963. V. 272. P. 44–53.
3. *Bennoun J. F.* Etude des milieux continus elastiques et thermodynamiques en relativity generale // Ann. Inst. Henri Poincare. 1965. V. 3. № 1. P. 41–110.
4. *Oldroyd J. G.* Equations of state of continuous matter in general relativity // Proc. of the Royal Society of London. Ser. A. Math. and Phys. 1970. V. 316. No. 1514. P. 1–28.
5. *Carter B., Quintana H.* Foundations of general relativistic highpressure elasticity theory // Proc. of Royl Soc. Ser. A. Math. and Phys. 1972. V. 331. P. 57–83.
6. *Sheefer A.* Nineteenth-Century Aether Theories. Perg. Press: N.– Y., 1972.
7. *Кротов В. Ф.* Пространственно-временные деформации упругой среды и уравнения электродинамики // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 1. С. 60–71.
8. *Krotov V. F.* Space-Time Elasticity and Fundmentals of Electrodynamics and Gravitational Theory // J. of Franklins Inst. 1987. V. 323. No. 3. P. 345–372.
9. *Кротов В. Ф.* Вариационный принцип упругого равновесия пространственно-временного континуума. Цикл лекций. Иркутск: Изд. Иркут. ун-та. 1987 г.
10. *Кротов В. Ф.* Наблюдение линейных систем и принципы квантовой механики/ ДАН. СССР. Т. 316. № 1. 1991. С. 57–62.
11. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
12. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976.
13. *Murnaghan E. D.* Finite deformations of an elastic solide // J. of Math., LIX, № 2. P. 1937. P. 197.
14. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4. М.: Наука, С. 292–295.
15. *Аллей Ч., Катлер Л.* Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 575.
16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Физматгиз, 1962.
17. *Боголюбов Н. Н., Широков Д. В.* Квантовые поля. М.: Наука, 1980.
18. *Джеммер М.* Эволюция понятий квантовой механики. М.: Наука, 1985.
19. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963.
20. *Фон-Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1985. 32 с.
21. *Дубовский В. А.* Упругая модель физического вакуума // ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 1. С. 83.
22. *Дмитриев В. И.* Стохастическая механика. М.: Высш. шк., 1990. 36 с.
23. *Kaluza Th.* Zum Nnitätsproblem der Phisik // Berl.: Berichte, 1921, B. 966.

Москва

Поступила в редакцию
4.VII.1990