

УДК 531.43

© 1992 г. Ю. А. ЗАХАРОВ, П. К. ПЛОТНИКОВ

МОДЕЛЬ СИЛЫ ТРЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

На основе частных моделей силы трения синтезирована более общая математическая модель в виде системы трех дифференциальных уравнений и одного алгебраического. Модель эффективно использована при анализе свойств двух гиросприборов и ползуна с упругой связью.

1. Частные модели силы трения. Для решения многих задач механики гироскопов и систем твердых тел требуется знание математической модели силы (момента силы) трения. Ряд математических моделей описан в [1–16]. Наиболее распространенной моделью трения является зависимость [1]:

$$F = -F_1 \operatorname{sgn}^* \dot{x}_0, \quad \operatorname{sgn}^* \dot{x}_0 = \begin{cases} 1 & (\dot{x}_0 > 0) \\ 0 & (\dot{x}_0 = 0) \\ -1 & (\dot{x}_0 < 0) \end{cases}$$

где F_1 — модуль силы трения, x_0 — перемещение одного тела относительно другого. Модуль силы трения определяется законом Амонтона — Кулона [2] $F_1 = fN$, где f — коэффициент трения, N — сила нормального давления. Переход к выражению для момента сил трения осуществляют обычным путем

$$M = rF = -M_1 \operatorname{sgn}^* \omega_0, \quad \omega_0 = \dot{x}_0/r \quad (1.1)$$

где r — радиус приложения силы трения, ω_0 — угловая скорость, M_1 — модуль момента силы трения.

Рассмотренная модель была использована во многих исследованиях по механике твердых тел с учетом трения. Данная модель не дает возможности объяснить ряд важных явлений, возникающих при трении. В частности, она не объясняет явление скачков при трении, не дает возможности решать задачи статики и т. д. [3].

Более совершенной является модель, характеристика которой изображена на фиг. 1, а. Эта модель использована в [4] для объяснения закономерностей возникновения механических релаксационных колебаний трущихся тел. Зависимость силы трения от скорости скольжения представлена в [5] формулой (a, b, c, d — константы):

$$F = d + (a + b\dot{x}_0) \exp(-c|\dot{x}_0|) \quad (1.2)$$

В [6–8] использована модель силы трения, которая объясняет возникновение срывов при движении одного тела по поверхности другого изменением силы трения в зависимости от продолжительности неподвижного

контакта. Известно, что данное явление было открыто Кулоном. В [7] дано аналитическое описание силы трения для этого случая в виде соотношения

$$F = F_{\infty} - (F_{\infty} - F_0) \exp(-\kappa t) \quad (1.3)$$

где F_0 , F_{∞} — начальное и установившееся значения силы трения; κ — показатель скорости восстановления силы трения. Решению (1.3) соответствует следующее дифференциальное уравнение Ишлянского — Крагельского

$$dF/dt + \kappa F = \kappa F_{\infty}, \quad t=0, \quad F(0) = F_0 \quad (1.4)$$

где $T = 1/\kappa$ — постоянная времени восстановления силы трения.

В [4, 7] показано, что статическое трение превосходит кинетическое, следствием чего являются фрикционные колебания первого рода в трибосопряжении (трущееся тело имеет остановки). Переход от статического трения к кинетическому («срыв» силы трения) здесь предложено описывать экспоненциальной зависимостью вида (1.3), (1.4) с показателем $\kappa \gg \kappa$:

$$dF/dt + \chi F = \chi F_0, \quad t=0, \quad F(0) = F_{\infty} \quad (1.5)$$

Возможное усложнение предлагаемой модели до уравнения второго порядка или выше не носит принципиального характера и может быть применено в некоторых частных задачах, где требуется учет тонких эффектов. Экспериментальные исследования авторов показали, что в шарикоподшипниковых опорах некоторых гироскопов постоянная времени $\tau = 1/\chi$ лежит в пределах от сотых до тысячных долей секунды.

Кулон [2], а затем другие ученые установили, что сила трения зависит от величины шероховатостей поверхностей трения.

В 1899 г. Стивенсом было открыто явление предварительного смещения в трении, суть которого состоит в том, что перед скольжением одного тела по другому наблюдается предварительное упругое его перемещение порядка нескольких микрометров [5]. Затем в [9] и др. это явление было всесторонне исследовано и предложена следующая модель силы трения в зоне предварительного смещения λ_c :

$$F = -(k\lambda - \gamma\lambda^2) \quad (1.6)$$

где k , γ — коэффициенты, зависящие от нормальной нагрузки, материала, температуры и состояния поверхностей взаимодействующих элементов. Зависимость (1.5) справедлива в пределах зоны $|\lambda| \leq \lambda_c$, после которой наблюдается срыв величины трения до кинетического, о котором сказано выше. Величина λ_c предварительного смещения, как показано в [9], тем больше, чем больше нормальная нагрузка. Установлена также зависимость силы трения от температуры [2], показывающая, что наблюдается возрастание ее при температуре 500–800°С в 3–4 раза. При меньших температурах характеристика силы трения линейная и практически параллельна оси температур. В [1–11] показан гистерезисный характер силы трения в окрестности зоны предварительного смещения. В [13] приведена динамическая модель силы трения трибосопряжения, работающего без смазки. Она объединяет частные модели, описанные выше, и представляет собой совокупность уравнений, описывающих силу трения на каждом участке движения элементов трибосопряжения. Особенностью этой модели является необходимость учета краевых и начальных условий для каждого элемента трибосопряжения на каждом участке движения, необходимость решения уравнений теплового баланса. Такой подход чрезвычайно усложняет процедуру исследования законов движения приборов и машин при решении задач теоретической и прикладной механики. В частности, при изучении свойств гироскопика или ползуна с упругой связью желательнее иметь достаточно простые уравнения, опирающиеся при описании сил

трения на закон Амонтона — Кулона, решение которых давало бы приемлемое по точности совпадение с экспериментальными данными. Применение реологической модели Кельвина — Фойгта в такого рода задачах, особенно в устройствах с шарикоподшипниками, где элементов трибосопряжений много, не всегда оправдано.

Отметим, что приведенные выше модели силы трения справедливы не только для трения скольжения, но и для трения качения и верчения [13, 14, 15]. Описанные выше математические модели для силы трения являются частными (за исключением, пожалуй, модели, данной в [13]) и описывают отдельные составляющие силы трения. В [2] дается сравнение применений некоторых моделей сил трения при анализе динамики маятника Фруда и аналогичных им устройств. Очевидно, что различие результатов аналитических исследований определяется различием упомянутых моделей.

2. Модель силы трения. Ниже предлагается математическая модель силы (момента силы) трения, являющаяся обобщением описанных выше. При ее выводе будем предполагать, что силы скольжения, качения и верчения имеют аналогичное математическое описание, т. е. все приведенные выше результаты для сил трения имеют такой же качественный характер и для сил качения и верчения; отличие состоит в разных количественных значениях коэффициентов и параметров. Будем также предполагать, что силы трения не зависят от модуля скорости трущихся тел за зоной предварительного смещения. Не будем учитывать в явном виде зависимость сил трения от шероховатости и температуры окружающей среды.

Модель не носит всеохватывающий характер, она может быть изменена в сторону усложнения или упрощения и может быть применена при решении задач теоретической и прикладной механики. Предложенная математическая модель представляется следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \dot{x}_0 [1 - (1 + \operatorname{sgn}(\dot{x}_0 \lambda)) (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda| - \rho)) / 4] - \\ &\quad - (1/2) (\lambda - \lambda_0 \operatorname{sgn} \lambda) \tau^{-1} (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda| - \rho)) \quad (2.1) \\ \dot{\rho} &= -(\rho - \lambda_0) \tau^{-1} (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda| - \rho)) - (\rho - \nu) \tau^{-1} (1 - \operatorname{sgn}(|\lambda| - \rho)) \\ \dot{\nu} &= -(\nu - \lambda_0) \tau^{-1} (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda| - \rho)) - (1/2) (\nu - \lambda_\infty) T^{-1} (1 - \operatorname{sgn}(|\lambda| - \rho)) \\ \operatorname{sgn} x &= \begin{cases} 1 & (x > 0), \quad F = -(k\lambda - \gamma\lambda^3) \\ -1 & (x \leq 0), \quad \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn}^* x - (1 - (\operatorname{sgn}^* x)^2) \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь ρ — вспомогательная знакоположительная координата, определяющая границы срыва и входа пары трения в зону предварительного смещения; ν — вспомогательная знакоположительная координата, определяющая амплитуду скачка трения при срыве; λ_0 — величина предварительного смещения, соответствующая трению движения F_0 ; λ_∞ — максимальная величина предварительного смещения, соответствующая трению покоя F_∞ при первом срыве. Перемещение вне зоны предварительного смещения, т. е. невозвратное перемещение одного тела относительно другого, будет называться скольжением или качением в зависимости от вида трибосопряжения.

Для углового движения переменные λ , ρ , ν и коэффициенты k , γ заменяются на λ^\times , ρ^\times , ν^\times , k^\times , γ^\times соответственно. Момент трения связан с λ^\times зависимостью, аналогичной (1.6):

$$M = -(k^\times \lambda^\times - \gamma^\times (\lambda^\times)^3) \quad (2.2)$$

В системе (2.1) ρ выступает как функция памяти о факте срыва и входа пары трения в зону предварительного смещения и определяет их в со-

ответствии с условиями $\lim \rho(t) = v$ при $|\lambda| \leq \rho$, $\lim \rho(t) = \lambda_0$ при $|\lambda| > \rho$.

Координата v эквивалентна λ_0 и определяет амплитуду повторных скачков трения при срыве после остановки или смены знака \dot{x}_0 . Поясним зависимости, изображенные на фиг. 16. Для определенности положим, что движение начинается из точки 0. При возрастании x_0 ($\dot{x}_0 > 0$) координата λ также растет по закону $\dot{\lambda} = \dot{x}_0$; $\lambda(0) = 0$; $\text{sgn}(|\lambda| - \rho) < 0$; $\text{sgn}(\dot{x}_0 \lambda) > 0$ до значения $\lambda = \lambda_\infty$ в точке 1. В этой точке происходит срыв координаты λ от λ_∞ до λ_0 по экспоненциальному закону, определяемому уравнением

$$\tau \dot{\lambda} + \lambda = \lambda_0, \quad \lambda(t_1) = \lambda_\infty \quad (2.3)$$

Здесь t_1 — значение времени в точке 1 срыва. В точке 1 произойдут также скачкообразные изменения координат ρ и v от значений λ_∞ до λ_0 в соответствии с уравнениями, аналогичными (2.3), но с постоянной времени, вдвое меньшей, чем в (2.3):

$$(\frac{1}{2}) \tau \dot{\rho} + \rho = \lambda_0; \quad (\frac{1}{2}) \tau \dot{v} + v = \lambda_0; \quad \lambda(t_1) = \lambda_\infty; \quad \text{sgn}(|\lambda| - \rho) > 0 \quad (2.4)$$

Такое соотношение постоянных времени в (2.3) и (2.4) выбрано искусственно, из соображений обеспечения условий опережения процессов по ρ и v при срыве координат по сравнению с λ . При дальнейшем увеличении x_0 ($\dot{x}_0 > 0$) до точки 2 все три координаты будут совпадать. В точке 2 может наблюдаться один из двух случаев: а) остановка, а затем движение в прежнем направлении $\dot{x}_0 > 0$; б) смена знака скорости $\dot{x}_0 < 0$ и, следовательно, движение в противоположном первоначальному направлении.

В случае а) будет наблюдаться нарастание параметра v , а вслед за ним и ρ в соответствии с уравнениями

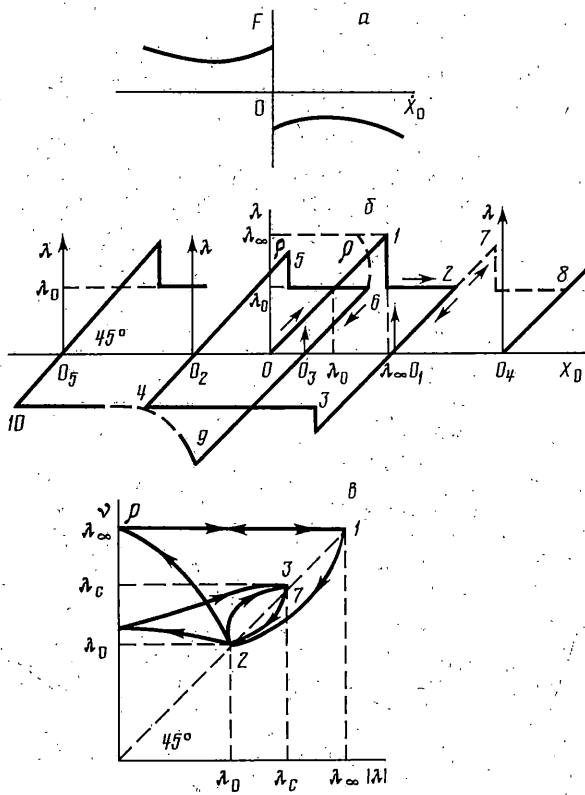
$$T \dot{v} + v = \lambda_\infty; \quad \tau \dot{\rho} + \rho = v; \quad \lambda(t_2) = \lambda_0 \quad (2.5)$$

Нарастание будет происходить до некоторого значения $\lambda_0 E(\lambda_0, \lambda_\infty)$ в зависимости от продолжительности остановки (отрезок 2—2' на фиг. 1, в). При дальнейшем увеличении координаты x_0 ($\dot{x}_0 > 0$) будет наблюдаться нарастание λ до точки 7 (фиг. 1, б) (отрезок 2'—7, фиг. 1, в) в соответствии с уравнениями $\dot{\lambda} = \dot{x}_0$, поскольку здесь $\lambda E(0, \lambda_0)$. В точке 7 происходит срыв, аналогичный срыву в точке 1, и процесс идет аналогично по линии 7—8 (фиг. 1, б, фиг. 1, в).

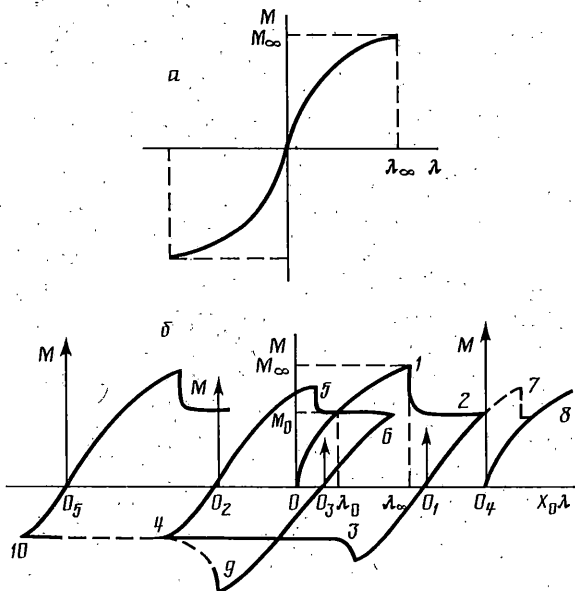
В случае б) также происходит нарастание координат v и ρ по уравнениям (2.5) и изменение координаты λ согласно уравнению $\dot{\lambda} = \dot{x}_0$; $\lambda(t_2) = \lambda_0$ до точки 3 (фиг. 1, в), из фиг. 1, в следует, что точка 3 эквивалентна точке 7. После срыва координаты λ в точке 3 движение по λ , ρ , v происходит к точке 4 аналогично участку 1—2 в соответствии с уравнениями (2.3), (2.4).

Уравнения (2.1) в первую очередь целесообразно применять при моделировании работы устройств механики, т. к. они в связанном виде отражают переходы силы трения от одного состояния (вида) к другому. Величина T определяется на основе данных работ [8, 10, 11, 14] и составляет 1—100 с, величину τ следует определять экспериментально или, если это невозможно, выбирать в 10—30 раз меньше постоянных времени процессов, имеющих место в исследуемой системе, с тем, чтобы наличие τ не вносило существенных искажений в ход изучаемого процесса. Коэффициенты k и γ по (2.2) определяют на основе опытных данных. Величины λ_0 и λ_∞ определяются на основе (2.2) из условия соответствия выражений (фиг. 2, а, 2, б): $F_\infty = F(\lambda_\infty)$; $F_0 = F(\lambda_0)$; $M_\infty = M(\lambda_\infty^x)$; $M_0 = M(\lambda_0^x)$.

Для более полного учета динамических эффектов, вносимых трением, может быть использована известная зависимость величины коэффициента трения f_0 движения от скорости относительного перемещения [2], одна из



Фиг. 1



Фиг. 2

которых представлена соотношением (1.2); можно также пользоваться более простой формулой, взятой также из [2]:

$$f_0 = f_1 [1 - \delta |\dot{x}_0| / (a + |\dot{x}_0|)] \quad (2.6)$$

где f_1 — коэффициент трения трогания, δ — относительный коэффициент изменения трения движения, a — параметр в виде характерной скорости, при которой изменение трения составляет половину от максимального значения вариации силы трения. Выражение (2.6) применительно к обозначениям системы (2.1) при линеаризации примет аналогичный вид для нижней границы предварительного смещения λ_0 , входящего в систему (2.1):

$$\lambda_0 = \lambda_1 [1 - \delta |\dot{x}_0| / (a + |\dot{x}_0|)] \quad (2.7)$$

где λ_1 определяется, например, аналогично λ_0 из линеаризованной характеристики (2.2). Выражение (2.7) справедливо для движения за пределом зоны предварительного смещения λ_0 после срыва, поскольку в этом случае в системе (2.1) проявляется влияние члена с λ_0 .

3. Анализ динамики ползуна с упругой связью. Рассмотрим приложение полученной аналитической модели трения к исследованию движения ползуна с упругой связью по подвижной платформе [8]. Задачи такого типа неоднократно решались аналитически. Применительно к случаю, проиллюстрированному в [8], с учетом предлагаемой аналитической модели трения можно записать следующую систему уравнений, сохраняя частично обозначения, принятые в [8]:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + n\dot{x} + cx &= F; \quad F = -(k\lambda - \gamma\lambda^3) \\ \lambda &= \dot{x}_0 [1 - (1 + \operatorname{sgn}(\lambda\dot{x}_0)) (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda| - \rho)) / 4] - \\ &\quad - (t/2) (\lambda - \lambda_0 \operatorname{sgn} \lambda) \tau^{-1} (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda| - \rho)) \\ \dot{x}_0 &= \dot{x} - V; \quad \dot{\rho} = (\rho - \lambda_0) \tau^{-1} (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda| - \rho)) - \\ &\quad - (\rho - v) \tau^{-1} (1 - \operatorname{sgn}|\lambda| - \rho); \quad \dot{v} = -(v - \lambda_0) \tau^{-1} \times \\ &\quad \times (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda| - \rho)) - (t/2) (v - \lambda_\infty) T^{-1} (1 - \operatorname{sgn}(|\lambda| - \rho)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

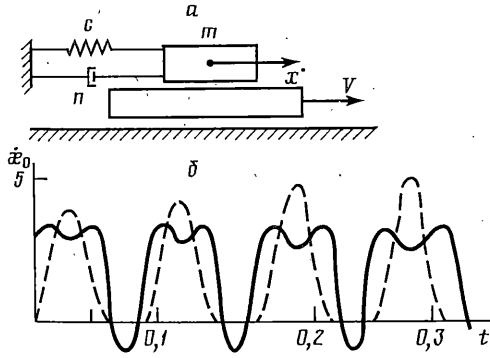
Здесь обозначено: m — масса ползуна, n — коэффициент демпфирования, c — жесткость упругой связи, x — перемещение ползуна относительно корпуса, V — скорость подвижной платформы относительно корпуса.

Схема устройства представлена на фиг. 3, а. Для устройства по фиг. 3, а и модели трения принята следующая совокупность параметров: $m = 0,01$ кг, $n = 0,2$ Н·м·с, $c = 100$ Н·м⁻¹, $F_\infty = 5$ Н, $F_0 = 2$ Н, $V = 1,4$ м/с, $k = 10^4$ м⁻¹, $\lambda_\infty = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $\lambda_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ м, $\tau = 10^{-4}$ с, $T = 1$ с, $\gamma = 0$.

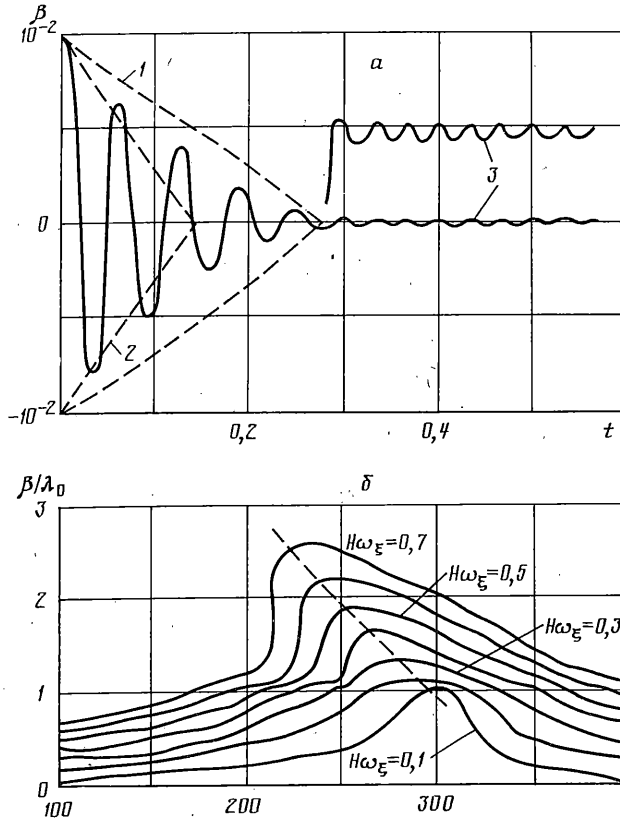
Решив на ЭВМ систему (3.1), получим график изменения скорости скольжения, показанный на фиг. 3, б в виде сплошной кривой. Штриховой кривой показан график, полученный в [8] и перенесенный на фиг. 3, б для сравнения.

Сравнение графиков свидетельствует о сходном в целом характере движения по результатам данного моделирования и результата, полученного в [8]. Это говорит о правомерности использования предлагаемой аналитической модели. В то же время обнаружены различия, которые касаются того, что в [8] описаны полные остановки в относительном движении на некоторые промежутки времени, здесь же с учетом зоны предварительного смещения остановки не наблюдается. Имеются также некоторые искажения в форме вершин импульсов скорости, обусловленные более резкой характеристикой срыва.

4. Анализ свойств датчика угловых скоростей. Рассмотрим применение полученной математической модели к исследованию датчика угловых



Фиг. 3



Фиг. 4

скоростей. Система уравнений, описывающих его движение, имеет вид

$$I\ddot{\beta} + b\dot{\beta} + c\beta = H\omega_\xi - (k^\times \lambda^\times - \gamma^\times (\lambda^\times)^2)$$

$$\lambda^\times = \beta \left[1 - (1 + \operatorname{sgn}(\beta \lambda^\times)) (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda^\times| - \rho^\times)) / 4 \right] -$$

$$- (1/2) (\lambda^\times - \lambda_0^\times \operatorname{sgn} \lambda^\times) \tau^{-1} (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda^\times| - \rho^\times))$$

$$\rho^\times = -(\rho^\times - \lambda_0^\times) \tau^{-1} (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda^\times| - \rho^\times)) - (\rho^\times - v^\times) \tau^{-1} (1 - \operatorname{sgn}(|\lambda^\times| - \rho^\times)) \quad (4.1)$$

$$v^\times = -(v^\times - \lambda_0^\times) \tau^{-1} (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda^\times| - \rho^\times)) - (1/2) (\lambda^\times - \lambda_0^\times) T^{-1} (1 - \operatorname{sgn}(|\lambda^\times| - \rho^\times))$$

Здесь I — момент инерции гироскопа, c — жесткость пружины, b — коэффициент демпфирования гироскопа, β — угол поворота гироскопа, H — кинетический момент, ω_z — угловая скорость движения основания вокруг входной оси. Наиболее характерно трение проявляется в данном случае в качестве нелинейного демпфера. Задав значения параметров $I=1$ сН·см·с², $b=0$, $c=10^4$ сН·см/рад, $k=10^5$ сН·см/рад, $\lambda_\infty^x=2 \cdot 10^{-5}$ рад, $\lambda_0^x=10^{-5}$ рад, $\tau=10^{-4}$ с, $T=1$ с, $H\omega_z=100$ сН·см, в результате решения на ЭВМ уравнений (4.1) получим графики переходного процесса для скачка гироскопического момента от значения $H\omega_z=100$ сН·см до значения $H\omega_z=0$, этому случаю соответствует начальное условие $\beta(0)=10^{-2}$ рад. График переходного процесса для угла β изображен на фиг. 4, а. Штриховыми линиями 1 и 2 показаны для сравнения огибающие переходного процесса для момента трения в виде простой сигнатурной модели (1.1), причем линия 1 соответствует $M=M_0$, а линия 2 соответствует $M=M_\infty$. Таким образом, учет предварительного смещения дает уточнение картины нелинейного переходного процесса и характера огибающей. Кривая 3 изображает в увеличенном масштабе движение гироскопа в зоне предварительного смещения, где действует суммарная жесткость $c+k^x$, за счет которой частота колебаний возрастает, а темп их затухания падает. Данное явление наблюдалось в опытах для упругой системы [4, 11], строгого теоретического описания его не было.

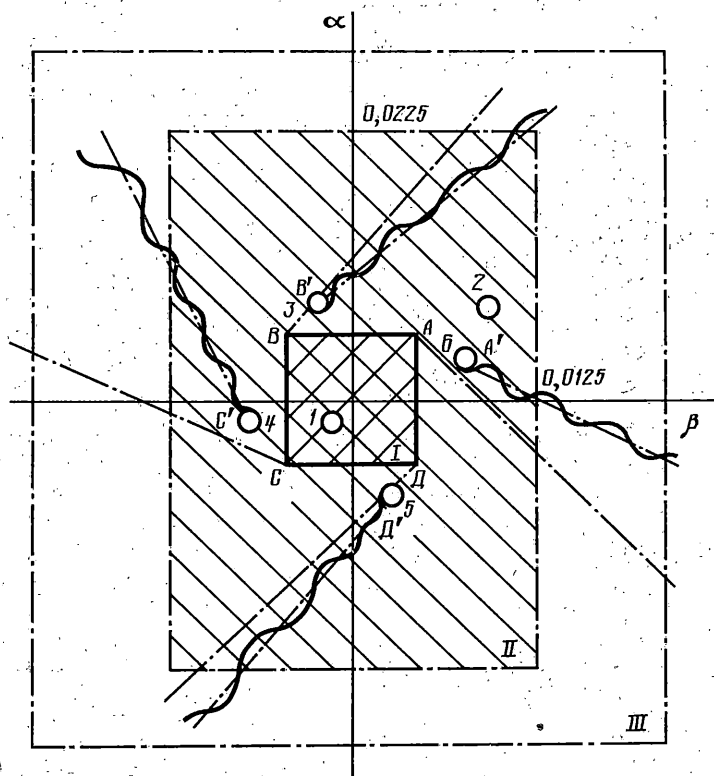
При решении (4.1) на ЭВМ путем изменения $H\omega_z$ по синусоидальному закону с вариацией частоты в области резонансной получено семейство амплитудно-частотных характеристик нелинейного резонанса в виде, изображенном на фиг. 4, б. При амплитудах гироскопического момента $H\omega_z < 0,1$ сН·см и $H\omega_z > 1$ сН·см нелинейных явлений практически не наблюдается.

Рассмотрим вопрос о пороге чувствительности датчика. Как известно, он определяется формулой $\omega_z^0 = M/H$ и характеризует минимальную измеряемую датчиком угловую скорость, начиная с которой изменяется его выходной сигнал. При учете предварительного смещения для зоны 0—I фиг. 2, б имеем $\lambda^x = \beta$; $\lambda^x = \beta$ в силу чего уравнение движения датчика угловой скорости принимает вид $I\ddot{\beta} + b\dot{\beta} + c\beta + k^x\beta - \gamma^x\beta^3 = H\omega_z$.

Из данного уравнения следует, что любому значению угловой скорости ω_z соответствует определенное значение угла поворота оси фигуры датчика, т. е. порог чувствительности отсутствует.

5. Уточнение зон застоя в гировертикали. Рассмотрим применение полученной аналитической модели трения к исследованию работы гировертикали с радиальной коррекцией на неподвижном основании. В данном случае имеем две подсистемы с трением, взаимодействующие по перекрестным связям через гироскопический момент. Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
 I_a \ddot{\alpha} + n_a \dot{\alpha} + H\beta + k_\beta \beta &= -k^1 \lambda^1 \\
 \lambda^1 &= \dot{\alpha} [1 - (1 - \operatorname{sgn}(\dot{\alpha} \lambda^1)) (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda^1| - \rho_1)) / 4] - \\
 &\quad - (1/2) (\lambda^1 - \lambda_0^1 \operatorname{sgn} \lambda^1) \tau^{-1} (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda^1| - \rho_1)) \\
 \dot{\rho}_1 &= -(\rho_1 - \lambda_0^1) \tau^{-1} (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda^1| - \rho_1)) - (\rho_1 - v_1) \tau^{-1} (1 - \operatorname{sgn}(|\lambda^1| - \rho_1)); \\
 \dot{v}_1 &= -(v_1 - \lambda_0^1) \tau^{-1} (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda^1| - \rho_1)) - (1/2) (v_1 - \lambda_\infty^1) T^{-1} (1 - \operatorname{sgn}(|\lambda^1| - \rho_1)) \\
 I_\beta \ddot{\beta} + n_\beta \dot{\beta} - H\dot{\alpha} - k_\alpha \alpha &= -k^2 \lambda^2 \quad (5.1) \\
 \lambda^2 &= \dot{\beta} [1 - (1 + \operatorname{sgn}(\dot{\beta} \lambda^2)) (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda^2| - \rho_2)) / 4] - \\
 &\quad - (1/2) (\lambda^2 - \lambda_0^2 \operatorname{sgn} \lambda^2) \tau^{-1} (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda^2| - \rho_2)) \\
 \dot{\rho}_2 &= -(1/2) (\rho_2 - \lambda_0^2) \tau^{-1} (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda^2| - \rho_2)) - (\rho_2 - v_2) \tau^{-1} (1 - \operatorname{sgn}(|\lambda^2| - \rho_2)); \\
 \dot{v}_2 &= -(v_2 - \lambda_0^2) \tau^{-1} (1 + \operatorname{sgn}(|\lambda^2| - \rho_2)) - (1/2) (v_2 - \lambda_\infty^2) T^{-1} (1 - \operatorname{sgn}(|\lambda^2| - \rho_2)).
 \end{aligned}$$



Фиг. 5

Здесь I_α, I_β — моменты инерции, n_α, n_β — коэффициенты демпфирования, k_α, k_β — коэффициенты усиления радиальной коррекции, H — кинетический момент, α — угол поворота наружной рамы, β — угол поворота внутренней рамы. Трение в данном случае наиболее характерно проявляется в образовании зоны застоя на плоскости координат α, β . Заданы значения параметров $I_\alpha = 20$ сН·см·с, $I_\beta = 15$ сН·см·с, $n_\alpha = 5$ сН·см·с, $n_\beta = 3$ сН·см·с, $k_\alpha = k_\beta = 200$ сН·см/рад, $H = 5000$ сН·см·с, $k^1 = 10^4$ сН·см/рад, $k^2 = 1,5 \cdot 10^4$ сН·см/рад, $\lambda_0^1 = \lambda_0^2 = 10^{-4}$ рад, $\lambda_\infty^1 = 2,5 \cdot 10^{-4}$ рад, $\lambda_\infty^2 = 3 \cdot 10^{-4}$ рад, $\tau = 10^{-4}$ с, $T = 1$ с.

В результате решения на ЭВМ системы (5.1) получена уточненная картина движения изображающей точки приборной вертикали к нулевому положению при начальном отклонении в пределах зоны пропорциональности характеристики коррекции. На фиг. 5 изображены характерные зоны плоскости, определяющие поведение оси фигуры гировертикали. Граница I определяет зону углов через кинетическое трение, а граница II определяет зону углов через статическое трение. Граница III характеризует зону линейности характеристики коррекции.

В отличие от известных результатов, здесь введена граница II, в силу которой следует различать две зоны застоя: первую, определяемую двойной штриховкой внутри прямоугольника I (описанную в литературе), и вторую, заключенную между прямоугольниками I, II. В [16] показано, что имеются только 4 узловые точки застоя A, B, C, D, к которым стягиваются линейные траектории оси фигуры, показанные пунктиром. По результатам данного исследования можно сделать следующие выводы.

Если в начальные моменты времени ось фигуры находится внутри

зоны II, например, в точках 1, 2, или им аналогичных, то она и остается в этих точках. Данный результат следует из того, что этому положению соответствует зона предварительного смещения, что видно из уравнений движения в зонах λ_c^1, λ_c^2 :

$$\begin{aligned} I_\alpha \ddot{\alpha} + n_\alpha \dot{\alpha} + k^1 (\alpha - \alpha_0) + H\beta + k_\beta \beta &= 0 \\ I_\beta \ddot{\beta} + n_\beta \dot{\beta} + k^2 (\beta - \beta_0) - H\dot{\alpha} - k_\alpha \alpha &= 0 \\ \alpha(0) = \alpha_0; \beta(0) = \beta_0; \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Если в начальный момент времени ось фигуры находилась вне границы II, то движение происходит по кривым вида 3, 4; движение прекращается в точках A', B', C', D' , которые в общем случае не совпадают с точками A, B, C, D на 5–10%. Данное явление объясняется неравномерностью движения из-за скачков трения, приводящего вблизи точек A, B, C, D к остановкам и «нарастанию» момента трения в пределах статического трения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
2. Крагельский И. В., Щедров В. С. Развитие науки о трении. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 235 с.
3. Панлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехтеориздат, 1954. 316 с.
4. Хайкин С. Э., Лисовский Л. П., Саломонович А. Е. О силах сухого трения // Трение и износ в машинах. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1939. Т. 1. С. 468–479.
5. Кузнецов В. Д. Физика твердого тела. Т. 4. Томск: Полиграфиздат, 1947. 542 с.
6. Ишлинский А. Ю., Крагельский И. В. О скачках при трении // Ж. техн. физики. 1944. Т. 14. Вып. 4–5. С. 276–282.
7. Крагельский И. В. Влияние продолжительности неподвижного контакта на величину силы трения // Ж. техн. физики. 1944. Т. 14. Вып. 4–5. С. 272–275.
8. Дерягин Б. В., Пуш В. Э., Толстой Л. М. Теория фрикционных автоколебаний с периодическими остановками // Тр. 3-ей Всесоюз. конф. по трению и износу в машинах. М.: Изд-во АН СССР, 1960. Т. 2. С. 132–152.
9. Верховский А. В. Явление предварительного смещения при трогании несмазанных поверхностей с места // Ж. прикл. физики. 1926. Т. 3. Вып. 3–4. С. 311.
10. Куликов М. И. Теория роликовых механизмов свободного хода // Вестн. машиностроения. 1947. № 2. С. 13–17.
11. Максак В. И. Предварительное смещение и жесткость механического контакта. М.: Наука, 1975. 59 с.
12. Стрелков С. П. Маятник Фроуда // Ж. техн. физики. 1933. Т. 3. Вып. 4. С. 563.
13. Геккер Ф. Р. Динамическая модель узлов трения, работающих без смазочных материалов // Трение и износ. 1983. Т. 4. Вып. 6. С. 1051–1058.
14. Матвеев В. А., Маслов Н. П., Чистяков В. А. Исследование угловых колебаний вала, установленного в шарикоподшипниках // Изв. Вузov. Приборостроение. 1978. Т. 21. № 5. С. 81–85.
15. Бальмонт В. Б., Матвеев В. А. Опоры качения приборов. М.: Машиностроение, 1984. 239 с.
16. Ред. Пельпор Д. С. Гироскопические системы. Ч. 2. М.: Высш. шк. 1971. 488 с.

Саратов, Энгельс

Поступила в редакцию
27.V.1990