

УДК 531.3

© 1992 г. Р. Ф. НАГАЕВ, Н. А. ХОЛОДИЛИН

К ТЕОРИИ СОУДАРЕНИЯ БИЛЬЯРДНЫХ ШАРОВ

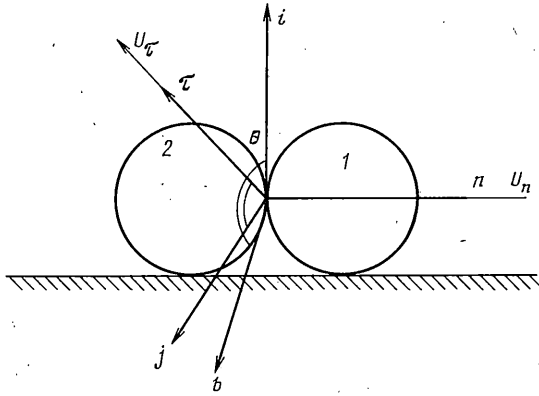
В рамках стереомеханической теории удара рассматривается косое пространственное соударение двух одинаковых тел, обладающих центральной симметрией. До соударения тела расположены на горизонтальной плоскости. Соударение осложнено наличием сил, препятствующих относительному проскальзыванию тел и проскальзыванию тел относительно плоскости. Определяются параметры движения тел после соударения и условия скользящего характера соударения в зависимости от параметров тел до соударения. Рассмотрены частные случаи задачи: соударение движущегося по плоскости тела о неподвижную преграду и остановка двигавшегося до удара тела, после соударения о тело неподвижно лежащее на плоскости.

В [1] при решении данной задачи рассматривался один частный случай скользящего соударения, и, кроме того, трение в контакте тел с плоскостью считалось равным нулю.

1. Постановка задачи. Пусть расположенные на плоскости тела в произвольный момент времени движутся со скоростями центра масс V_1 и V_2 и с угловыми скоростями $\vec{\Omega}_1$ и $\vec{\Omega}_2$. Здесь и далее подстрочные индексы 1 и 2 приписываются параметрам первого и второго тела соответственно. Вводятся в рассмотрение две системы ортов: n , τ , $b = n \times \tau$ и i , p , $j = n \times i$. Орт n лежит на прямой, соединяющей центры масс тел при соударении, и направлен к центру первого тела. В интервале времени соударения [2] пренебрегается изменением положения тел в пространстве и соответственно ориентация площадки контакта тел также неизменна. Тогда орт n будет неизменен по направлению. Относительная скорость точки контакта тел определяется соотношением $U = V_1 - V_2 + n \times (\vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2) a$, где a — радиус тела. Проекция скорости U на орт n — скорость U_n — и на плоскость площадки контакта тел — скорость U_τ (скорость проскальзывания) — определяются соотношениями

$$U_n = n \cdot (V_1 - V_2), \quad U_\tau = U - U_n n \quad (1.1)$$

Орт τ определяет направление скорости проскальзывания $\tau = U_\tau / U_\tau$. При рассмотрении соударения тел произвольной формы орт τ , вообще говоря, может изменять свое направление в интервале времени соударения. Однако, согласно анализу, проведенному в [5] для тел, обладающих центральной симметрией, направление скорости проскальзывания тел за время соударения не меняется. В [1] эта особенность для круглых тел принята как гипотеза. Далее, орт i направлен по нормали к плоскости, на которой расположены тела.



Введенные системы ортов изображены на фигуре. Системы ортов связаны соотношениями

$$\vec{\tau} = i \cos \theta + j \sin \theta, \quad \mathbf{b} = -i \sin \theta + j \cos \theta \quad (1.2)$$

где θ — угол между направлением скорости проскальзывания и ортом i . Принимается, что до соударения второе тело неподвижно

$$\mathbf{V}_2^- = 0, \quad \vec{\Omega}_2^- = 0 \quad (1.3)$$

Здесь и далее индексы минус и плюс означают, что соответствующая скорость вычисляется непосредственно до и после соударения. Первое тело до соударения движется по плоскости таким образом, что проекция скорости центра масс на орт i равна нулю и отсутствует проскальзывание в контакте тела и плоскости

$$\mathbf{V}_1^- \cdot i = 0, \quad \mathbf{V}_1^- + i \times \vec{\Omega}_1^- a = 0 \quad (1.4)$$

Соотношения (1.2) и (1.3) в аналогичном виде приняты в [1]. Предполагается, что площадь площадок контакта тел достаточно мала (хотя и переменна во времени). Тогда совокупность контактных усилий, передаваемых от одного тела другому, может быть сведена к силе ударного взаимодействия. Различают силы нормального контактного взаимодействия и препятствующие относительно проскальзыванию тел. Им соответствует нормальный ударный импульс I_n и касательный фрикционный I_τ . При рассмотрении первого тела импульс I_n действует по орту n , а импульс I_τ — по направлению, обратному орту τ . При рассмотрении второго тела направления действия импульсов противоположны. В точке контакта второго тела и плоскости возникают нормальный реактивный импульс J_n , обусловленный силой контактного взаимодействия тела и плоскости, и касательный фрикционный импульс J_τ , обусловленный силой, препятствующей проскальзыванию тела и плоскости. Первый из импульсов действует на второе тело по орту i , а второй — противоположно относительной скорости проскальзывания второго тела и плоскости

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_2 + i \times \vec{\Omega}_2 a \quad (1.5)$$

В [1] принято, что трение в контакте второго тела и плоскости равно нулю $J_\tau = 0$. Можно показать, что за счет наложения условия (1.4) на характер движения первого тела до соударения в контакте первого тела и плоскости в интервале времени соударения не возникает реактивных импульсов.

Между ортом \mathbf{n} и вектором скорости \mathbf{W} вводится угол θ :

$$\operatorname{tg} \theta = -(\mathbf{j} \cdot \mathbf{V}_2 - \mathbf{n} \cdot \vec{\Omega}_2 a) / (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_2 + \mathbf{j} \cdot \vec{\Omega}_2 a) \quad (1.6)$$

Угол θ имеет физический смысл лишь на интервале времени соударения, где $\mathbf{W} \neq 0$. Далее вводится гипотеза о коэффициенте восстановления [2]:

$$R = I_n^+ / I_n^- \quad (1.7)$$

где R — коэффициент восстановления, индекс минус здесь и далее означает, что соответствующий импульс вычисляется на первой фазе соударения, т. е. на интервале времени от начала соударения до максимальной контактной деформации тел, надстрочный индекс плюс означает, что соответствующий импульс вычисляется на второй фазе соударения, т. е. на интервале времени соударения от максимальной контактной деформации до окончания соударения. В [1] принята иная гипотеза о коэффициенте восстановления

$$R = 2\mathbf{V}_1^+ \cdot \mathbf{n} / (\mathbf{V}_1^- \cdot \mathbf{n}). \quad (1.8)$$

Следует отметить, что если трение в контакте второго тела и плоскости равно нулю, тогда соотношения (1.7) и (1.8) эквивалентны. Если же значение фрикционного импульса J_τ на интервале времени соударения не равно нулю, тогда соотношения (1.7) и (1.8) не эквивалентны.

Теперь можно перейти к записи уравнений импульсивного движения. Однако эта система будет динамически неопределимой. Для того чтобы замкнуть систему уравнений, вводится гипотеза об абсолютной жесткости плоскости. Считается, что $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{i} \geq 0$ и $\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{i} \geq 0$. В [1] принято, что проекции скоростей центра масс на орт \mathbf{i} равны нулю. С учетом введенной гипотезы из уравнений импульсивного движения следует

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{V}_2 = 0 \quad (1.9)$$

Система уравнений импульсивного движения существенно различна в зависимости от значений скоростей проскальзывания. Проведенный анализ показал, что возможны лишь три режима соударения и соответственно три различных варианта определения послеударного состояния шаров. Эти режимы в дальнейшем условно называются соударениями первого, второго и третьего типов. В зависимости от параметров системы и доударного состояния первого тела реализуется тот или иной режим.

2. Соударение первого типа. Это соударение характеризуется тем, что в интервале времени соударения скорости проскальзывания тел и скорость проскальзывания второго тела и плоскости не обращаются в нуль. В соответствии со стереомеханической теорией удара уравнения импульсивного движения для первой и второй фаз соударения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m(\mathbf{V}_1^* - \mathbf{V}_1^-) &= I_n^- \mathbf{n} - I_\tau^- \vec{\tau}, & m(\mathbf{V}_1^+ - \mathbf{V}_1^*) &= I_n^+ \mathbf{n} - I_\tau^+ \vec{\tau} \\ m\rho^2(\vec{\Omega}_1^* - \vec{\Omega}_1^-) &= aI_\tau^- \mathbf{b}, & m\rho^2(\vec{\Omega}_1^+ - \vec{\Omega}_1^*) &= aI_\tau^+ \mathbf{b} \\ m\mathbf{V}_2^* &= -I_n^- \mathbf{n} + I_\tau^- \vec{\tau} + J_n^- \mathbf{i} + J_\tau^- (\mathbf{n} \cos \theta - \mathbf{j} \sin \theta) \\ m(\mathbf{V}_2^+ - \mathbf{V}_2^*) &= -I_n^+ \mathbf{n} + I_\tau^+ \vec{\tau} + J_n^+ \mathbf{i} + I_\tau^+ (\mathbf{n} \cos \theta - \mathbf{j} \sin \theta) \\ m\rho^2 \vec{\Omega}_2^* &= a(I_\tau^- \mathbf{b} + J_\tau^- (\mathbf{j} \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta)) \\ m\rho^2(\vec{\Omega}_2^+ - \vec{\Omega}_2^*) &= a(I_\tau^+ \mathbf{b} + J_\tau^+ (\mathbf{j} \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ρ — радиус инерции тела, m — масса тела, звездочка означает, что соответствующие скорости вычисляются в моменты максимальной контактной деформации, т. е.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_2^* = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_1^* \quad (2.2)$$

Между импульсами выполнены соотношения [4]:

$$J_i^- = fI_n^-, \quad J_i^+ = fI_n^+, \quad J_i^- = \lambda J_n^-, \quad J_i^+ = \lambda J_n^+ \quad (2.3)$$

где f, λ — коэффициенты ударного трения в точке контакта тел и в точке контакта второго тела и плоскости. В момент времени максимальной контактной деформации и в момент времени окончания соударения выполнено соотношение (1.9). Соотношение для определения реактивных импульсов с учетом (2.1), (2.2) и (1.7) имеют следующий вид:

$$J_n^- = -I_n^- f \cos \theta, \quad J_n^+ = -I_n^- R f \cos \theta \quad (2.4)$$

$$I_n^- = -m\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_i^- / (2 + \lambda f \cos \theta \cos \vartheta)$$

В эти соотношения входят углы θ и ϑ . Первый из них определяется из (1.2) и после необходимых подстановок имеет вид

$$\operatorname{tg} \theta = -(\mathbf{j} \cdot \mathbf{V}_i^- + \mathbf{i} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_i^- a) / (\mathbf{j} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_i^- a) \quad (2.5)$$

Подстановка пятого и седьмого из соотношений (2.1) в соотношение (1.6) дает выражение для угла ϑ :

$$\operatorname{tg} \vartheta = f\rho^2 \sin \theta / (\rho^2 - a^2 \cos \theta) \quad (2.6)$$

Следует отметить, что последнее соотношение можно получить и для произвольного момента времени из интервала времени соударения. Для этого в соотношениях (2.1) следует опустить звездочку при скоростях и минус при импульсах. При этом импульсы вычисляются на интервале времени от начала соударения до произвольно выбранного момента времени. Выражение для угла будет иметь вид (2.6). Это означает, что в интервале времени соударения скорость \mathbf{W} (так же как и \mathbf{U}_i) не меняет своего направления.

После необходимых преобразований можно записать соотношения для определения скоростей движения тел непосредственно после соударения:

$$\mathbf{V}_i^+ = \mathbf{V}_i^- + (1+R)(\mathbf{n} - \bar{\mathbf{f}}\boldsymbol{\tau})I_n^- / m$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_i^+ = \bar{\mathbf{Q}}_i^- + a(1+R)f\mathbf{b}I_n^- / (m\rho^2)$$

$$\mathbf{V}_2^+ = (1+R)(\bar{\mathbf{f}}\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n} - \mathbf{i}f \cos \theta - \bar{\mathbf{f}}\lambda \cos \theta (\mathbf{n} \cos \vartheta - \mathbf{j} \sin \vartheta))I_n^- / m$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_2^+ = a(1+R)f(\mathbf{b} - \lambda \cos \theta (\mathbf{j} \cos \vartheta + \mathbf{n} \sin \vartheta))I_n^- / (m\rho^2) \quad (2.7)$$

где I_n^- определяется из соотношения (2.4). Как следует из соотношений (2.7), проекция скорости \mathbf{V}_i^+ на орт \mathbf{i} имеет вид

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{V}_i^+ = (1+R)fI_n^- \cos \theta / m$$

Это соотношение означает, что после соударения первое тело всегда имеет ненулевую составляющую скорости центра масс по орту \mathbf{i} . Этот факт подтверждает высказанное ранее предположение об отсутствии реактивных импульсов в константе первого тела и плоскости. В [1] как гипотеза принимается, что упомянутая проекция скорости тождественно равна нулю.

Условия реализации настоящего режима определяются из условия постоянства скорости проскальзывания тел и неравенства нулю скорости проскальзывания второго тела и плоскости: $\mathbf{U}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \geq 0, \mathbf{W} \neq 0$. После подстановки в эти соотношения выражений (1.2), (1.5) и (2.7) можно

получить окончательные условия реализации скользящего соударения:

$$\mathbf{V}_1^- \cdot \vec{\tau} - a \vec{\Omega}_1^- \cdot \mathbf{b} + f(1+R) \{ \cos^2 \theta - 2(1+a^2/\rho^2) - \lambda \cos \theta (\sin \vartheta \sin \theta - a^2 \cos \vartheta \cos \theta / \rho^2) \} I_n^- / m > 0 \quad (2.8)$$

$$\sin \theta + \lambda \sin \vartheta \cos \theta (1+a^2/\rho^2) \neq 0 \quad (2.9)$$

Для решения задачи о соударении движущегося по плоскости тела о неподвижную преграду следует, отказавшись от допущения об одинаковости тел, массу и радиус инерции второго тела устремить к бесконечности. Тогда выражение для нормального ударного импульса примет вид $I_n^- = -m\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_1^-$. Импульсы I_n^+ , I_τ^- , I_τ^+ связаны соотношениями (2.3), (1.9). Значения скоростей тела после соударения при этом примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1^+ &= \mathbf{V}_1^- - (1+R) (\mathbf{n} - f\vec{\tau}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_1^- \\ \vec{\Omega}_1^+ &= \vec{\Omega}_1^- - af(1+R) \mathbf{b} \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_1^- / \rho^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Условие реализации соударения этого типа примет вид

$$\vec{\tau} \cdot \mathbf{V}_1^- - \mathbf{b} \cdot \vec{\Omega}_1^- - a + (1+R) (1+a^2/\rho^2) f \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_1^- > 0 \quad (2.11)$$

Соотношения (2.10) соответствуют аналогичным в задаче о соударении тела о неподвижную преграду [5].

3. Соударение второго типа. При этом типе в интервале времени соударения скорость проскальзывания шаров друг относительно друга превращается в нуль. При этом на всем интервале времени соударения имеет место проскальзывание второго тела относительно плоскости. Принято различать несскользящее соударение первого и второго рода [5]. Первое характеризуется тем, что скорость проскальзывания превращается в нуль на первой фазе соударения, второе — на второй фазе соударения. Вначале рассматривается первое. Первая фаза соударения разбивается на два этапа: от начала соударения до момента прекращения проскальзывания и от момента прекращения проскальзывания до окончания первой фазы соударения. Уравнения импульсивного движения для двух этапов и второй фазы соударения записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} m(\mathbf{V}_1^0 - \mathbf{V}_1^-) &= I_{n1} \mathbf{n} - I_{\tau 1} \vec{\tau} \\ m(\mathbf{V}_1^* - \mathbf{V}_1^0) &= I_{n2} \mathbf{n} - I_{\tau 2} \vec{\tau} \\ m(\mathbf{V}_1^+ - \mathbf{V}_1^*) &= I_n^+ \mathbf{n} - I_\tau^+ \vec{\tau}, \quad m\rho^2(\vec{\Omega}_1^0 - \vec{\Omega}_1^-) = aI_{\tau 1} \mathbf{b} \\ m\rho^2(\vec{\Omega}_1^* - \vec{\Omega}_1^0) &= aI_{\tau 2} \mathbf{b}, \quad m\rho^2(\vec{\Omega}_1^+ - \vec{\Omega}_1^*) = aI_\tau^+ \mathbf{b} \\ m\mathbf{V}_2^0 &= -I_{n1} \mathbf{n} + I_{\tau 1} \vec{\tau} + J_{n1} \mathbf{i} + J_{\tau 1} (\mathbf{n} \cos \vartheta - \mathbf{j} \sin \vartheta) \\ m(\mathbf{V}_2^* - \mathbf{V}_2^0) &= -I_{n2} \mathbf{n} + I_{\tau 2} \vec{\tau} + J_{n2} \mathbf{i} + J_{\tau 2} (\mathbf{n} \cos \vartheta - \mathbf{j} \sin \vartheta) \\ m(\mathbf{V}_2^+ - \mathbf{V}_2^*) &= -I_n^+ \mathbf{n} + I_\tau^+ \vec{\tau} + J_n^+ \mathbf{i} + J_\tau^+ (\mathbf{n} \cos \vartheta - \mathbf{j} \sin \vartheta) \\ m\rho^2 \vec{\Omega}_2^0 &= a(I_{\tau 1} \mathbf{b} + J_{\tau 1} (\mathbf{j} \cos \vartheta - \mathbf{n} \sin \vartheta)) \\ m\rho^2 (\vec{\Omega}_2^* - \vec{\Omega}_2^0) &= a(I_{\tau 2} \mathbf{b} + J_{\tau 2} (\mathbf{j} \cos \vartheta + \mathbf{n} \sin \vartheta)) \\ m\rho^2 (\vec{\Omega}_2^+ - \vec{\Omega}_2^*) &= a(I_\tau^+ \mathbf{b} + J_\tau^+ (\mathbf{j} \cos \vartheta + \mathbf{n} \sin \vartheta)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где индекс нуль означает, что соответствующая скорость вычисляется в момент прекращения проскальзывания, второй подстрочный индекс при реактивных импульсах означает, что соответствующий импульс вычисляется на первом или втором этапе соударения. Скорости второго тела удовлетворяют соотношениям (1.9) и (2.2). Реактивные импульсы

трех этапов соударения связаны соотношениями:

$$I_n^- = I_{n1} + I_{n2}, \quad I_{\tau 1} = f I_{n1}, \quad J_{\tau 1} = \lambda J_{n1} \quad (3.2)$$

Скорость проскальзывания тел по окончании каждого из этапов равна нулю:

$$U_{\tau}^0 = U_{\tau}^* = U_{\tau}^+ = 0 \quad (3.3)$$

Реактивные импульсы на трех этапах соударения, согласно (3.1)–(3.3), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} J_{\tau}^- &= -I_{n1} f \lambda \cos \theta, \quad I_n^- = -(m V_1^- \cdot n + I_{n1} \lambda f \cos \theta \sin \theta) / 2, \\ J_{n1} &= -I_{n1} f \cos \theta, \\ J_n^+ &= 0, \quad J_{n2} = 0, \quad J_{\tau 2} = 0, \quad J_{\tau}^+ = 0 \\ I_{\tau}^+ &= 0, \quad I_{\tau 2} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$I_{n1} = (m V_1^- \cdot \tau - m \bar{\Omega}_1 \cdot b) / \{2f(1+a^2/\rho^2) - f \cos^2 \theta + + f \lambda \cos \theta (\sin \theta \sin \theta - a^2 \cos \theta \cos \theta / \rho^2)\}$$

Анализ этих соотношений позволяет сделать вывод о том, что с прекращением проскальзывания силы контактного взаимодействия в точке контакта второго тела и плоскости обращаются в нуль. Поэтому в (3.2) была принята гипотеза о взаимодействии фрикционного и нормального импульсов только для первого этапа соударения. На втором этапе и второй фазе соударения не имеет значение наличие или отсутствие проскальзывания в точке контакта второго тела и плоскости, так как значения упомянутых импульсов определяются однозначно при любом характере движения второго тела относительно плоскости.

В силу сказанного соотношения для определения параметров движения тел после окончания соударения в зависимости от параметров тел до соударения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} V_1^+ &= V_1^- + (1+R)nI_n^-/m - f\tau I_{n1}/m \\ \bar{\Omega}_1^+ &= \bar{\Omega}_1^- + afbI_{n1}/(m\rho^2) \\ V_2^+ &= -(1+R)nI_n^-/m + f(\tau - i \cos \theta - \lambda(n \cos \theta - j \sin \theta))I_{n1}/m \\ \bar{\Omega}_2^+ &= af(b - \lambda \cos \theta (i \cos \theta + n \sin \theta))I_{n1}/(m\rho^2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

где импульсы определяются из соотношений (3.4), а параметры θ и θ из (2.5) и (2.6) соответственно.

Для нескользящего соударения второго рода уравнения импульсивного движения будут иметь отличный от (3.1) вид. Однако соотношения для определения послесударного состояния тел будут иметь вид (3.5), где ударные импульсы I_{n1} , I_n^- имеют иной физический смысл. Импульс I_n^- вычисляется на интервале времени от начала соударения до момента прекращения проскальзывания тел и вычисляется по соотношению (3.4), а импульс I_{n1} вычисляется по соотношению (2.5). Условие реализации соударения первого рода имеет вид $I_{n1} < I_n^-$. Условие реализации соударения второго рода имеет обратный знак.

Первое условие реализации соударения второго типа имеет вид (2.9). Второе условие реализации – вид (2.8) с противоположным знаком.

Различают режим чистого качения [3]. Он характеризуется тем, что сначала соударения отсутствует проскальзывание между телами. Этот режим является частным случаем рассмотренного выше соударения второго типа (реализуется при выполнении (2.8) как равенства).

По аналогии с п. 2 можно записать решение задачи о нескользящем

соударении о неподвижную преграду для тела, двигавшегося до соударения по плоскости. Решение имеет вид

$$\begin{aligned} V_1^+ &= V_1^- - (1+R) V_1^- \cdot nn - U_1^- \rho^2 / (a^2 + \rho^2) \\ \bar{\Omega}_1^+ &= \bar{\Omega}_1^- + U_1^- ba / (a^2 + \rho^2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Условие реализации данного типа соударения имеет вид (2.11) с противоположным знаком. Соотношения (3.6) имеют тот же вид, что и аналогичные в задаче об ударе тела о неподвижную преграду [3].

4. Соударение третьего типа. Этот режим характеризуется тем, что скорость проскальзывания второго тела и плоскости обращается в нуль в интервале времени соударения. При этом скорость проскальзывания тел может не обращаться в нуль либо обращаться в нуль на первой либо на второй фазе соударения. Привнимается вначале первое. Одно из условий реализации режима имеет вид (2.9) с противоположным знаком. Если теперь записать уравнения импульсивного движения, они будут иметь вид (2.1). Между скоростями тел в различные моменты времени будут выполнены соотношения (1.9) и (2.2). Между реактивными и ударными импульсами выполнены соотношения (1.7) и первые два из соотношений (2.3). Из условия равенства нулю скорости проскальзывания второго тела и плоскости после окончания первой и второй фаз соударения можно получить соотношения для определения импульсов:

$$\begin{aligned} I_n^- &= m V_1^- \cdot n (1 + a^2 / \rho^2) / (f \operatorname{ctg} \vartheta \sin \theta - 2(1 - a^2 / \rho^2)) \\ J_x^- &= f I_{n1} \sin \theta / (\sin \vartheta (1 + a^2 / \rho^2)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Соотношения для определения скоростей движения после окончания соударения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} V_1^+ &= V_1^- + (1+R) (n - f\bar{\tau}) I_n^- / m \\ \bar{\Omega}_1^+ &= \bar{\Omega}_1^- + (1+R) ba f I_n^- / (m \rho^2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} V_2^+ &= (1+R) \{ f\bar{\tau} - n - fi \cos \theta + (n \cos \vartheta - j \sin \vartheta) f \rho^2 \sin \theta / ((\rho^2 + a^2) \sin \vartheta) \} I_{n1} / m \\ \bar{\Omega}_2^+ &= (1+R) fa \{ b + (j \cos \vartheta + n \sin \vartheta) \sin \theta / (\rho^2 + a^2) \sin \vartheta \} I_n^- / m \end{aligned}$$

где импульс I_n^- определяется из соотношения (4.1), параметр θ — из соотношения (2.5).

Пусть теперь на второй фазе соударения скорость проскальзывания тел обращается в нуль. Тогда уравнения импульсивного движения следует записывать для трех этапов соударения. Первый этап — первая фаза соударения. Второй этап — от начала второй фазы соударения до прекращения проскальзывания тел. Третий этап — до окончания соударения. По аналогии с тем, как это делалось ранее, можно записать соотношения для импульсов. Из этих соотношений следует, что на третьем этапе соударения все импульсы тождественно равны нулю. Это означает, что третий этап соударения является вырожденным и задача сводится к рассмотрению двух этапов соударения. Этот случай уже был рассмотрен выше. Следовательно, скорости тел по окончании соударения определяются из соотношений (4.2). Такие же выводы можно сделать, если скорость проскальзывания тел обращается в нуль на первой фазе соударения.

Условие реализации соударения третьего типа получается из условия обращения в нуль скорости проскальзывания второго тела и плоскости. Условие имеет вид (2.9) с противоположным знаком. Как было показано, для реализации соударения третьего типа не имеет значения выполняемость условия (2.8).

5. Остановка движущегося тела. Рассматривается частный случай. Необходимо найти условия, при которых первое тело после соударения оста-

является. Как отмечалось ранее, первое тело после соударения всегда имеет ненулевую вертикальную составляющую скорости центра масс, поэтому остановка является условной в смысле выполнения условия:

$$V_1^+ - iV_1^+ \cdot i = 0 \quad (5.1)$$

При реализации соударения первого типа после необходимых преобразований соотношение (5.1) преобразуется к виду

$$1 + f\lambda \cos \vartheta \cos \theta = R, \quad j \cdot V_1^- + n \cdot V_1^- \sin \theta = 0 \quad (5.2)$$

Согласно Кориолису [1], трение в контакте второго тела и плоскости тождественно равно нулю. Тогда необходимым условием остановки первого тела после соударения является $R=1$. Второе из соотношений (5.2) накладывает некоторое условие на скорость первого тела до соударения. Если реализуется соударение второго или третьего типов, тогда условие (5.1) преобразуется соответственно к следующим соотношениям:

$$V_1^- = (fj \sin \theta - (1+R)n) I_n^- / m$$

$$V_1^- = (1+R) (fj \sin \theta - n) I_n^- / m$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кориолис Г. Г. Математическая теория явлений бильярдной игры. М.: Гостехиздат, 1956. 235 с.
2. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
3. Плявниекс В. Ю. Косое соударение двух шарообразных тел // Вопросы динамики и прочности. Вып. 19. Рига: Зинатне, 1969. С. 83–88.
4. Нагаев Р. Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985. 200 с.
5. Плявниекс В. Ю. Пространственное соударение с переменным направлением скольжения // Вопросы динамики и прочности. Вып. 21. Рига: Зинатне, 1971. С. 37–46.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
20.XII.1990