

УДК 539.374

© 1992 г. Е. П. КУБЫШКИН

АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ СПОСОБ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН В КОЛЬЦЕВЫХ РЕЗОНАТОРАХ

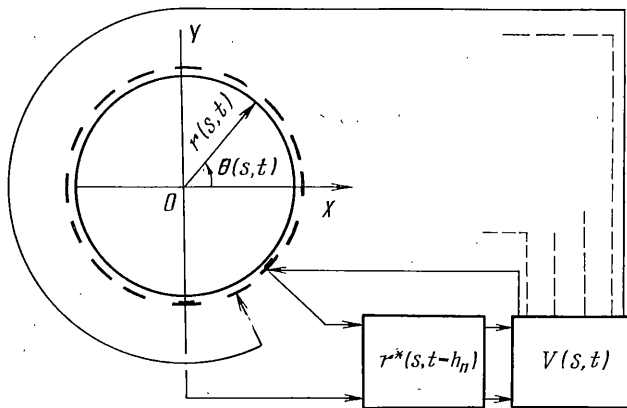
Предложена схема возбуждения колебаний кольцевого резонатора использующая идею автоколебаний и сохраняющая интегрирующий эффект. Автоколебания обеспечиваются внешней нелинейной запаздывающей обратной связью, связывающей колебания резонатора в некоторых точках с величиной напряжения на электродах в системе возбуждения колебаний. На основе нелинейной модели резонатора [1] выявлены условия существования автоколебаний, исследована их устойчивость и получены асимптотические формулы. Показано отсутствие зависимости калибровочного коэффициента резонатора от коэффициентов усиления в цепи внешней запаздывающей обратной связи.

1. Постановка задачи. Рассматривается идеальный кольцевой резонатор, представляющий собой тонкое нерастяжимое круговое кольцо радиуса R постоянного сечения, совершающее незатухающие колебания в плоскости кольца. Материал кольца считается вязкоупругим. Реологическая

модель материала $\sigma^\sim(t) \equiv E(I^* - \Gamma^*) \varepsilon^\sim(t) \equiv E(\varepsilon^\sim(t) - \int_{-\infty}^0 R^\sim(\tau) \varepsilon^\sim(t+\tau) d\tau)$,

где $\sigma^\sim(t)$, $\varepsilon^\sim(t)$, E , $R^\sim(\tau) > 0$ ($-\infty < \tau < \infty$) соответственно напряжение, относительная деформация, модуль Юнга и функция релаксации. Кольцо вращается в своей плоскости с постоянной угловой скоростью Ω относительно инерциального пространства. Положение точек осевой линии кольца в плоскости XU (фигура) будем характеризовать полярными координатами $r=r(s, t)$, $\theta=\theta(s, t)$ ($x=r \cos \theta$, $y=r \sin \theta$). Независимая переменная s представляет собой длину дуги между рассматриваемой точкой и некоторой начальной точкой, t — время.

В дальнейшем производные по s и t обозначаются соответственно штрихом и точкой. Для поддержания незатухающих колебаний кольца используется емкостный способ возбуждения колебаний, при котором величина нормальной распределенной нагрузки, приложенной к кольцу со стороны внешних электродов, замкнута внешней нелинейной запаздывающей обратной связью с величиной радиальных перемещений кольца в некоторых точках. Плотность нормальной распределенной нагрузки, приложенной к кольцу со стороны внешних электродов, представляет собой некоторый нелинейный функционал $Q=Q(V, r)$, являющийся решением электростатической задачи для кольцевой области между резонатором и внешними электродами. Здесь V — величина напряжения между резонатором и электродами системы возбуждения колебаний. Рассматри-



вается следующий вид нелинейной запаздывающей связи, при которой:

$$V(s, t, t-h_n) = v_0 + [k_1 - k_2(r_c^2(t) + r_s^2(t))] r^2(s, t-h_n) \quad (1.1)$$

$$r^2(s, t) = r_c(t) \cos(ns/R) + r_s(t) \sin(ns/R)$$

$$r_{(c, s)}(t) = (\pi R)^{-1} \int_0^{2\pi R} r(s_1, t) (\cos(ns_1/R), \sin(ns_1/R)) ds_1$$

Здесь k_1, k_2 — положительные коэффициенты, характеризующие линейную и нелинейную составляющие усилителя, на вход которого подаются величины $r_c(t)$ и $r_s(t)$, h_n — величина запаздывания в цепи внешней обратной связи, v_0 — некоторое постоянное напряжение, n — номер рабочей формы.

С большой степенью точности можно считать $r_c(t) = r(0, t) - r(0, 0)$, $r_s(t) = r(\pi R/(2n), t) - r(\pi R/(2n), 0)$. Принципиальная схема работы прибора представлена на фигуре.

Нелинейные динамические уравнения тонкого нерастяжимого кольца в рассматриваемом случае будут иметь вид [1]:

$$\rho S \frac{d}{dt} [r^2(\theta' + \Omega)] - EI(I^* - G^*) \{ (\Phi'' - \Phi_0'') - [r r' (\Phi'' - \Phi_0'')] \} - (\lambda r^2 \theta') = -Qr \sin \alpha \quad (1.2)$$

$$\rho S [r'' - r(\theta' + \Omega)^2] - EI(I^* - G^*) \{ [r\theta(\Phi'' - \Phi_0'')] \}' + r' \theta' (\Phi'' - \Phi_0'') + \lambda r \theta'^2 - (\lambda r')' = Q \cos \alpha \quad (1.3)$$

$$(r')^2 + (r\theta')^2 - 1 = 0 \quad (1.4)$$

$$\Phi - \Phi_0 = \theta - \alpha - s/R, \quad \alpha = \arctg(r'/(r\theta')),$$

Здесь $\lambda(s, t)$ — неопределенный множитель Лагранжа, ρ — плотность материала кольца, S — площадь поперечного сечения кольца, I — момент инерции сечения кольца относительно осевой линии.

Отметим, что в случае (1.1) для произвольного s при замене $r(s, t)$ на $r(s+c, t)$ $Q(s, r(s, t)) = Q(V(s, t, t-h_n), r(s, t))$ изменится на $Q(s+c, r(s+c, t))$, т. е. распределенная нагрузка, приложенная к кольцу со стороны внешних электродов, инвариантна относительно группы сдвига по переменной s .

В дальнейшем будем интересоваться условиями существования в системе (1.2)–(1.4) прецессирующих волн, переходящих при $\Omega=0$ в стоячие и их устойчивостью. Это дает возможность использовать кольцевой

резонатор с указанной схемой возбуждения колебаний в качестве датчика угла.

2. Метод исследования. Предварительно отметим следующее. Условия существования и устойчивости прецессирующих волн в системе (1.2)–(1.4), а также их асимптотические формулы будут получены в «главном» приближении. При этом используется лишь главная часть функционала $Q(V, r)$, которая имеет вид

$$Q(V, r) = \varepsilon_0 L / 2 [V / (d_0 + R - r)]^2 \quad (2.1)$$

и является формулой «плоского конденсатора», где ε_0 — абсолютная электрическая постоянная вакуума, L — ширина электродов, d_0 — расстояние между недеформированным кольцом и электродами.

В дальнейшем считаем плотность распределенной нагрузки, приложенной к кольцу, заданной формулой (2.1). Перейдем в (1.2)–(1.4) к безразмерным переменным, положив

$$s = R\varphi, \quad t_* = t\kappa, \quad \kappa = [EI / (\rho S R^4)]^{1/4}, \quad r = R(1 + r_1)$$

$$\theta = \varphi + \theta_1, \quad \lambda = EI / R^2 \lambda_*, \quad \Omega = \Omega_* \kappa, \quad d_0 = R d_{0*}$$

$$k_{1*} = k_1 R / v_0, \quad k_{2*} = k_2 R^3 / v_0, \quad h_{n*} = h_n \kappa$$

$$R_*^\vee(\tau) = R^\vee(\tau_* / \kappa) / \kappa, \quad a_{0*} = \varepsilon_0 L v_0^2 R / (2EI)$$

(в дальнейшем звездочку опустим). Кроме того, наложим на функцию $R^\vee(\tau)$ следующие ограничения:

$$\begin{aligned} d^2 R^\vee(\tau) / d\tau^2 > 0, \quad R^\vee(\tau) = O(\exp(\gamma_0 \tau)) \quad (\gamma_0 > 0, \tau \rightarrow -\infty) \\ R^\vee(\tau) = O(|\tau|^{\beta_0}) \quad (-1 < \beta_0 \leq 0, \tau \rightarrow 0), \quad \int_{-\infty}^0 R^\vee(\tau) d\tau \leq 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Введем малый параметр $\varepsilon = \int_{-\infty}^0 R^\vee(\tau) d\tau \ll 1$ и нормируем $\Gamma^* \rightarrow \varepsilon \Gamma^*$, $k_1 \rightarrow \varepsilon k_1$. Считая θ_1, r_1 ($|r_1| < d_0$) малыми, разрешим уравнение (1.2) относительно θ_1 . Результатом будет система уравнений вида

$$\begin{aligned} \theta_1^{**} + 2\Omega l_{\theta_1}(r_1, r_1') + \Theta_1(\theta_{1\tau}, r_{1\tau}, \theta_1, r_1, \lambda; \varepsilon) = \\ = a_0 V_1^2(\varphi, t, t - h_n) p_\theta(\theta_1, r_1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} r_1^{**} + 2\Omega l_{r_1}(r_1, \theta_1') + \Omega^2 l_{r_2}(r_1) + \\ + R_1(\theta_{1\tau}, r_{1\tau}, \theta_1', r_1', \lambda; \varepsilon) = a_0 V_1^2(\varphi, t, t - R_n) p_r(\theta_1, r_1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$0 = \Lambda(\theta_1, r_1) \quad (2.5)$$

$$V_1(\varphi, t, t - h_n) = 1 + [\varepsilon k_1 - k_2(r_c^2(t) + r_s^2(t))] r^*(\varphi, t - h_n)$$

Здесь $l_*(\dots)$, $p_*(\dots)$, $\Theta_1(\dots)$, $R_1(\dots)$, $\Lambda(\dots)$ некоторые нелинейные операторы, выписываемые в явном виде по системе (1.2)–(1.4) и которые ввиду громоздкости не приведены. Функции $r_c(\dots)$, $r_s(\dots)$, $r^*(\dots)$ строятся по $r_1(\varphi, t)$ по аналогии с (1.1). Индекс τ в операторах $\Theta_1(\dots)$, $R_1(\dots)$ подчеркивает наличие функциональной (интегральной) зависимости.

Отметим, что уравнения (2.3), (2.4) имеют по переменным θ_1 и r_1 бесконечное запаздывание. Для анализа колебательных решений системы уравнений (2.3)–(2.5) воспользуемся методом бесконечномерной нормализации [2, 3]. Запишем для этого сначала систему (2.3)–(2.5) в виде одного операторного уравнения первого порядка. Положим $u = \text{col}(\theta_1, r_1, \theta_1', r_1', \lambda)$ ($u = u(\varphi, t) = u(\varphi + 2\pi, t)$, $\int u(\varphi, t) d\varphi = 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). В результа-

то будем иметь

$$Au^* = 2\Omega L_1(u) + \Omega^2 L_2(u) + F(u; \varepsilon) + a_0 V_1^2(\varphi, t, t-h_n) P(u) \quad (2.6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

где нелинейные операторы $L_*(\dots)$, $F(\dots)$, $P(\dots)$ строятся по (2.3)–(2.5). Рассмотрим сначала линейное уравнение

$$Au^* = F_1(u; 0) \quad (2.7)$$

где $F_1(\cdot)$ ($F_1(0; 0) = 0$) — линейная часть оператора $F(\cdot)$. Определяя $u(\varphi, t) = e(\varphi) \exp(pt)$ ($e = \text{col}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$), $e(\varphi) = e(\varphi + 2\pi)$, замечаем, что спектр устойчивости уравнения (2.7) определяется спектром пучка операторов

$$L(p)e \equiv \begin{pmatrix} pe_1 - e_3 \\ pe_2 - e_4 \\ -e_1'' + e_2''' + \lambda^*(e_1' + 2e_2') + pe_3 + e_5' \\ -e_1''' + e_2^{IV} - \lambda^*(2e_1' - e_2'' + e_2) + pe_4 - e_5 \\ -e_1'' - e_2 \end{pmatrix} \quad (\lambda^* = a_0 |d_0^2)$$

который состоит из точек

$$p_{\pm k} = \pm i\sigma_k = i\sigma_{\pm k} = k[(k^2 - 1) + \lambda^*(k^2 - 2)]^{1/2} / (k^2 + 1) \quad (k=2, 3, \dots) \quad (2.8)$$

Собственные функции оператора $L(p_{\pm k})$ имеют вид

$$e_{\pm kj}(\varphi) = g_{\pm kj}(\pm i\sigma_k, (-1)^{j-1}(\pm k)) \exp(\pm ik\varphi) \quad (2.9)$$

$$\bar{e}_{kj}(\varphi) = e_{-kj}(\varphi) \quad (j=1, 2)$$

$$g(i\sigma_k, k) = \text{col}((k\sigma_k)^{-1}, -i\sigma_k^{-1}, ik^{-1}, 1, i2\sigma_k x^{\sim})$$

$$x^{\sim} = [2k^2(k^2 - 1) + \lambda^*(2k^2 - 1)] / \{k^2[(k^2 - 1)^2 + \lambda^*(k^2 - 2)]\}$$

Пусть сначала $\Omega = 0$. Выберем $h_n = 3\pi / (2\sigma_n)$. Согласно метода бесконечномерной нормализации [2, 3], учитывая (2.2), (2.8)–(2.9) и вид нелинейной запаздывающей связи (1.1), замечаем, что поведение решений уравнения (2.6) в главном приближении определяется поведением решений следующей системы уравнений:

$$z_{n1}^* = z_{n1} [i\sigma_n + \varepsilon \lambda_n^4 - k_2 c_n |z_{n1}|^2 + i(d_{n1} |z_{n1}|^2 + d_{n2} |z_{n2}|^2)] = Z_{n1}(z_n; \varepsilon) \quad (2.10)$$

$$z_{n2}^* = z_{n2} [i\sigma_n + \varepsilon \lambda_n^4 - k_2 c_n |z_{n2}|^2 + i(d_{n2} |z_{n1}|^2 + d_{n1} |z_{n2}|^2)] = Z_{n2}(z_n; \varepsilon) \quad (2.11)$$

в четырехмерном комплексном пространстве вида $z_n = (z_{n1}, \bar{z}_{n1}, z_{n2}, \bar{z}_{n2})$ которую назовем нормальной формой уравнения (2.5).

Построение (2.10), (2.11) осуществляется по следующей схеме. Введем в рассмотрение выражение

$$U(\varphi, z_n; \varepsilon) = u_0 + \sum_{(k_1, j_1), (k_2, j_2), (k_3, j_3) \in \omega} [z_{k_1 j_1} (e_{k_1 j_1}(\varphi) + \varepsilon u_{k_1 j_1}(\varphi)) + z_{k_1 j_1} z_{k_2 j_2} u_{k_1 j_1 k_2 j_2}(\varphi) + z_{k_1 j_1} z_{k_2 j_2} z_{k_3 j_3} u_{k_1 j_1 k_2 j_2 k_3 j_3}(\varphi)] \quad (2.12)$$

$$\omega = \{(k, j) : k = \pm n, j = 1, 2\}, \quad z_{-nj} = z_{nj}$$

Коэффициенты (2.10), (2.11) и функции (2.12) определяются из соотношения

$$A \sum_{(k, j) \in \omega} \frac{\partial U(\cdot)}{\partial z_{kj}} Z_{kj}(z_n; \varepsilon) = F(U(\varphi, z_{n\tau}; \varepsilon); \varepsilon) + a_0 V_1^2(\varphi, t, t - h_n) P(U(\varphi, z_n; \varepsilon); \varepsilon) \quad (2.13)$$

являющегося условием принадлежности траекторией системы (2.10), (2.11) вдоль (2.12) уравнению (2.6). Приравниваем последовательно в (2.13) коэффициенты при нулевой степени z_{kj} , а также при εz_{kj} , $z_{k_1 j_1} z_{k_2 j_2}$, $z_{k_1 j_1} z_{k_2 j_2} z_{k_3 j_3}$. В результате получим рекуррентную последовательность операторных уравнений вида

$$L(\pm li\sigma_n) u_* (\varphi) = f(\varphi) \quad (l=0, 1, 2, 3) \quad (2.14)$$

где $f(\varphi)$ — некоторая известная функция. Условия разрешимости (2.14) позволяют однозначно определить коэффициенты в (2.10), (2.11). Решая (2.14), находим $u_*(\varphi)$. При этом имеем в

$$u_0 = \text{col}(0, 0, 0, 0, \lambda^*), \quad \lambda_n^1 = \tau_n^1 + k_1 \lambda_n^1 + i\sigma_n^1$$

$$\tau_n^1 = -R_s(\sigma_n) \sigma_n / 2, \quad \sigma_n^1 = -R_c(\sigma_n) \sigma_n / 2$$

$$\lambda_n^1 = n^2 \lambda^* / [(n^2 + 1) \sigma_n]$$

$$R_c(\sigma) = \int_0^\infty R^\sim(-\tau) \cos(\sigma\tau) d\tau, \quad R_s(\sigma) = \int_0^\infty R^\sim(-\tau) \sin(\sigma\tau) d\tau$$

где R_c, R_s — составляющие нормированного комплексного модуля упругости $E^*(\sigma; \varepsilon) = 1 - \varepsilon R_c(\sigma) + i\varepsilon R_s(\sigma)$ материала кольца, который определяется экспериментально. Согласно условий (2.1) $R_c(\sigma) > 0$. $c_n = 4n\lambda^* / [(n^2 + 1)\sigma_n]$. Коэффициенты d_{nj} вычисляются на ЭВМ. Их конкретные значения использовать не будем.

3. Анализ системы уравнений (2.10)–(2.11). Положим $z_{nj} = \rho_{nj} \times \exp(i\tau_{nj})$ ($\rho_{nj} \geq 0, j=1, 2$) и перейдем в (2.10)–(2.11) к «медленным» переменным $\rho_{nj} \geq 0$, $\omega_{n2} = (\tau_{n1} - \tau_{n2})/2$ и одной быстрой переменной $\omega_{n1} = (\tau_{n1} + \tau_{n2})/2$. В результате имеем систему уравнений

$$\rho_{nj}^* = [\varepsilon(\tau_n^1 + k_1 \lambda_n^1) - k_2 c_n \rho_{nj}^2] \rho_{nj} \quad (j=1, 2) \quad (3.1)$$

$$\omega_{n2}^* = 0 \quad (3.2)$$

$$\omega_{n1}^* = \sigma_n + \varepsilon \sigma_n^1 + (d_{n1} + d_{n2}) (\rho_{n1}^2 + \rho_{n2}^2) / 2$$

Из (3.1) следует, что при

$$k_1 > R_s(\sigma_n) \sigma_n^2 (n^2 + 1) / (2n^2 \lambda^*) \quad (3.3)$$

уравнения (3.1) имеют асимптотически устойчивые состояния равновесия, возникающие «мягко» из нулевого решения при увеличении k_1 . $\varepsilon^{1/2} \rho_n^* = \rho_{n1}^* = \rho_{n2}^* = \varepsilon^{1/2} [(\tau_n^1 + k_1 \lambda_n^1) / (k_2 c_n)]^{1/2}$, что соответствует с учетом (3.2) однопараметрическому семейству (инвариантному тору) периодических решений одного и того же периода системы уравнений (2.10) (2.11) вида

$$z_{nj}^*(t) = \varepsilon^{1/2} \rho_n^* \exp(i\sigma_n^*(\varepsilon)t + \Omega_0) \quad (3.4)$$

$$\sigma_n^*(\varepsilon) = \sigma_n + \varepsilon \sigma_n^1 + \varepsilon (d_{n1} + d_{n2}) \rho_n^{*2}$$

где Ω_0 — произвольная постоянная. Решениям (3.4) в уравнении (2.6)

соответствует с учетом (2.12) семейство периодических решений одного и того же периода вида

$$u^*(t, \Omega_0; \varepsilon) = u_0 + \varepsilon^{1/2} \rho_n^* [e_{n_1}(\varphi) \exp(i\Omega_0 t) + e_{-n_2}(\varphi) \exp(-i\Omega_0 t)] \exp(i\sigma_n^*(\varepsilon)t) + (e_{-n_1}(\varphi) \exp(-i\Omega_0 t) + e_{n_2}(\varphi) \exp(i\Omega_0 t)) \exp(-i\sigma_n^*(\varepsilon)t) + O(\varepsilon) \quad (3.5)$$

которые являются стоячими волнами.

Пусть теперь $\Omega \neq 0$. Нормируем $\Omega \rightarrow \varepsilon\Omega$ и нормализуем уравнение (2.6). В итоге имеем следующую систему уравнений:

$$z_{n_1}^* = \varepsilon i k_n \Omega z_{n_1} + Z_{n_1}(z_n; \varepsilon) \\ z_{n_2}^* = -\varepsilon i k_n \Omega z_{n_2} + Z_{n_2}(z_n; \varepsilon), \quad k_n = 2n/(n^2+1)$$

которая анализируется аналогично (2.10), (2.11). В результате уравнение (2.6) имеет однопараметрическое семейство прецессирующих волн, асимптотическая формула которых определяется (3.5), где φ следует заменить на $\varphi + \varepsilon k_n \Omega t/n$.

Отметим следующее. При вычислении калибровочного коэффициента с большей точностью имеем следующую формулу [1, 4]:

$$k_n = 2n(n^2+1)^{-1} [1 + \varepsilon (-R_c'(\sigma_n) \sigma_n / 2 + \varphi_n \rho_n^*)]$$

где коэффициент φ_n определяется нелинейными слагаемыми уравнения (2.6). Как оказывается, в случае нелинейной запаздывающей связи вида (1.1) коэффициент φ_n не зависит от k_2 . Он определяется лишь «консервативными» нелинейными слагаемыми системы (1.2)–(1.4). Формулы для вычисления φ_n получены в [1].

Приведем в размерных величинах условие генерации автоколебаний (3.3) и формулу амплитуды колебаний рабочей формы резонатора r_{1n}^* , используя соотношения $-\varepsilon \tau_n^1 = \sigma_n / (2Q)$, $\omega_n^* = \kappa \sigma_n = [EI / (\rho S R^4)]^{1/2} \sigma_n$:

$$k_1 > \Delta, \quad r_{1n}^* = 2[n(n^2+1)(k_1 - \Delta)k_2^{-1}]^{1/2} [n(n^2-1)]^{-1} \\ \Delta = \omega_n^{*2} (n^2+1) d_0^2 \rho h (2Qn^2 \varepsilon_0 v_0)^{-1}$$

Здесь Q , ω_n^* и h соответственно добротность, частота колебаний и толщина резонатора.

Пример. Выберем следующие параметры резонатора: $n=2$, $h=2 \cdot 10^{-3}$ м, $d_0=10^{-4}$ м, $\rho=2,2 \cdot 10^3$ Н/(с²м³), $\varepsilon_0=8,84 \cdot 10^{-12}$ Кл/(Нм²), $v_0=50$ В, $\omega_n^* = 2\pi f_n c^{-1}$ ($f_n=2,5 \cdot 10^3$ Гц), $Q=10^6$. Выберем $k_1=1,536 \cdot 10^4$ В/м. Для установления амплитуды колебаний резонатора $r_{1n}^*=5 \cdot 10^{-5}$ м необходимо выбрать $k_2=3,555 \cdot 10^9$ В/м³.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В. Д., Климов Д. М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 129 с.
2. Кубышкин Е. П. Метод бесконечномерной нормализации в исследовании автоколебательных решений одного класса сингулярно возмущенных краевых задач // ДАН СССР. Т. 306. № 5. С. 1041–1045.
3. Кубышкин Е. П. Автоколебательные решения одного класса сингулярно возмущенных краевых задач // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 4. С. 674–685.
4. Егарин П. Е. Свободные и вынужденные колебания вращающегося вязкоупругого кольца. // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 150–154.

Ярославль

Поступила в редакцию
3.X.1990