

УДК 534.1

© 1992 г. С. В. СОРОКИН

## КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ ВАРИАНТ АНАЛИЗА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ

Традиционный способ анализа параметрических колебаний упругих систем состоит в представлении решения уравнений движения в виде разложения по собственным формам колебаний и исследовании свойств решений обыкновенных дифференциальных уравнений по времени [1–5]. В случаях, когда собственные формы определяются численно, такой подход может оказаться неудобным. В статье предложен другой вариант численного анализа движения при параметрическом возбуждении, эффективность которого иллюстрирована простейшими примерами.

1. Система с одной степенью свободы. Поясним существо предлагаемого варианта на примере, когда движение системы описывается уравнением [1, 2]:

$$\ddot{q}(t) + \Omega^2(1 - 2\mu\Phi(t))q(t) = 0 \quad (1)$$

где  $\Omega$  — частота свободных колебаний,  $\mu$  — коэффициент возбуждения,  $\Phi(t)$  — произвольная периодическая функция,  $T$  — период параметрического возбуждения.

Для анализа устойчивости системы, следуя [2, 3], воспользуемся тем, что решения на двух соседних интервалах, равных периоду  $T$ , различаются лишь постоянным множителем  $K$  — коэффициентом подобия (такие решения называются нормальными — см., например, [6]):

$$q(t+T) = Kq(t) \quad (2)$$

Поскольку равенство (2) справедливо для произвольного момента времени  $t$ , из него следует, что

$$\dot{q}(t+T) = K\dot{q}(t) \quad (3)$$

Разделим период  $T$  на  $N$  интервалов времени и обозначим через  $t_n$  ( $n=0, 1, \dots, N$ ) — моменты, соответствующие границам между этими интервалами. Заменим уравнение (1) системой алгебраических уравнений относительно величин  $q_n = q(t_n)$ , определяющих конфигурацию системы в моменты времени  $t_n$ . При этом вторая производная в (1) записывается в конечно-разностной форме

$$\ddot{q}(t_n) = \frac{N^2}{T^2}(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) \quad (4)$$

Система уравнений имеет вид

$$\frac{N^2}{T^2}(q_{n+1}-2q_n+q_{n-1})+\Omega^2(1-2\mu\Phi(t_n))q_n=0 \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

Эти уравнения дополняются условиями, следующими из соотношений (2), (3):

$$q_{N+1}=Kq_1, \quad q_N=Kq_0 \quad (6)$$

Система  $N+2$  линейных алгебраических уравнений (5), (6) однородна относительно величин  $q_0, q_1, \dots, q_{N+1}$ . Для того, чтобы найти ее нетривиальное решение, нужно приравнять нулю определитель этой системы. Это условие приводит к квадратному уравнению относительно коэффициента подобия  $K$ , а определяемые из этого уравнения значения  $K$  позволяют судить об устойчивости невозмущенного состояния.

Такой подход использован в [2] для определения границ зон устойчивости и неустойчивости при параметрическом возбуждении вида

$$\Phi(t)=1 \quad (0 < t < T/2); \quad \Phi(t)=-1 \quad (T/2 < t < T) \quad (7)$$

В этом случае задача (1)–(3) имеет аналитическое решение, и коэффициент подобия вычисляется по формуле [2]:

$$K_{1,2}=\alpha \pm (\alpha^2-1)^{1/2}$$

$$\alpha = \cos \left[ \frac{\Omega T}{2}(1-2\mu) \right] \cos \left[ \frac{\Omega T}{2}(1+2\mu) \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \left[ \frac{1-2\mu}{1+2\mu} + \frac{1+2\mu}{1-2\mu} \right] \sin \left[ \frac{\Omega T}{2}(1-2\mu) \right] \sin \left[ \frac{\Omega T}{2}(1+2\mu) \right]. \quad (8)$$

В зоне неустойчивости модуль одного из корней больше единицы, в зоне устойчивости оба корня — комплексные и  $|K| < 1$ . Граница зон устойчивости и неустойчивости определяется условием  $|K|=1$  или, что то же самое,  $|\alpha|=1$ .

Достаточно подробное изложение теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (теории Флоке), позволяющей использовать этот критерий устойчивости, содержится в [6].

В данном случае оказывается, что уже при  $N=12$  граница двух первых зон неустойчивости, найденные по (5)–(6) и (8), практически совпали.

Если  $\Phi(t)$  — произвольная периодическая функция, то получить аналитическое решение типа (8) невозможно, и остается использовать уравнения (5), (6). Таким образом, анализ устойчивости системы с одной степенью свободы сводится к вычислению коэффициента подобия  $K$ .

**2. Система с распределенными параметрами.** Для балки, подверженной действию продольной силы  $P_0+P_1 \cos \omega_p t$ , уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + (p_0+p_1 \cos \omega_p t) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{ml^4}{D} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (9)$$

$D$  — жесткость на изгиб,  $l$  — длина,  $m$  — погонная масса балки,  $p_0 = P_0/P^*$ ,  $p_1 = P_1/P^*$ ,  $P^*$  — эйлерова сила,  $x$  — безразмерная координата,  $w$  — безразмерное перемещение.

Граничные условия для функции  $w(x, t)$  соответствуют упругой заделке торцов.

Уравнение (9) можно решить, воспользовавшись приемом, сформулированным в п. 1: решение на периоде  $T=2\pi/\omega_p$  отличается от решения на соседних лишь коэффициентом подобия

$$w(x, t+T)=Kw(x, t) \quad (10)$$

Уравнение в частных производных (9) заменяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $w_n(x)=w_n(x, t_n)$ , определяющих конфигурацию балки в моменты времени  $t_n$ :

$$w_n^{IV}(x) + (p_0 + p_1 \cos \omega_p t_n) w_n''(x) + \Omega_0^2 \left( \frac{\alpha N}{2\pi} \right)^2 [w_{n+1}(x) - 2w_n(x) + w_{n-1}(x)] = 0 \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

Здесь учтено, что

$$\left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right|_{t=t_n} = \frac{w_{n+1}(x) - 2w_n(x) + w_{n-1}(x)}{\Delta t^2}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\alpha N \omega_0}, \quad \frac{m l^4}{D \Delta t^2} = \Omega_0^2 \left( \frac{\alpha N}{2\pi} \right)^2, \quad \Omega_0^2 = \frac{m l^4 \omega_0^2}{D}, \quad \omega_p = \alpha \omega_0$$

где  $\omega_0$  — первая частота свободных колебаний балки,  $N$  — число участков, на которые разделен период  $T$ .

Граничные условия для всех функций  $w_n(x)$  ( $n=0, 1, \dots, N+1$ ) одинаковые.

Дополним систему (11) условиями, следующими из соотношения (10):

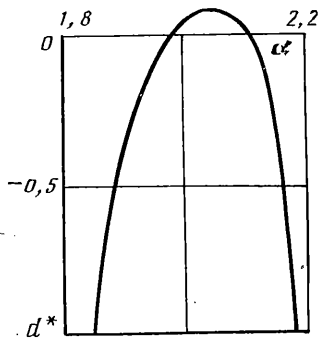
$$w_N(x) = K w_0(x), \quad w_{N+1}(x) = K w_1(x) \quad (12)$$

Как и для системы с одной степенью свободы, анализ устойчивости балки сводится к вычислению коэффициента подобия  $K$ . Если этот коэффициент представляет собой комплексное число и  $|K| < 1$ , балка устойчива, если  $K$  вещественно и  $|K| > 1$ , то движение происходит с возрастающей амплитудой, т. е. балка неустойчива. На границе области устойчивости  $|K| = 1$ .

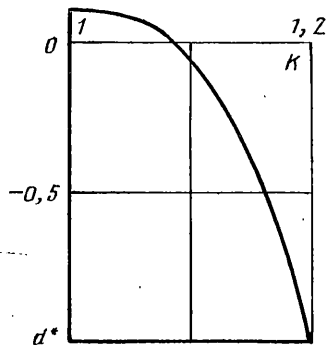
Решение задачи (11), (12) строится методом ортогональной прогонки с шаговым изменением коэффициента  $K$  аналогично тому, как этот метод применяется для определения собственных частот колебаний. Такая численная процедура позволяет решить две задачи — определить границы зон динамической устойчивости и найти темп нарастания колебаний в зоне неустойчивости. В первом случае задается  $|K| = 1$  и вычисляются значения параметров  $p_0, p_1, \alpha$ , при которых определитель  $d$  равен нулю, во втором — для заданных параметров возбуждения  $p_0, p_1, \alpha$  вычисляется значение  $K$  из условия  $d = 0$ .

В области устойчивости решение неоднородной задачи (при действии статической поперечной нагрузки  $Q(x) \neq 0$ ) состоит в нахождении функций  $w_n(x)$  при  $K = 1$ .

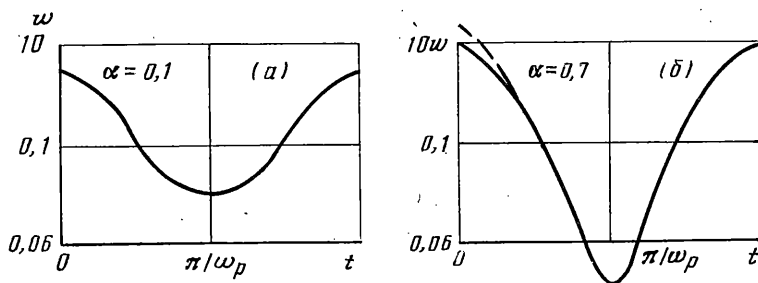
**3. Примеры.** Выполнены контрольные расчеты, относившиеся к шарнирно опертой балке. На фиг. 1 представлена зависимость величины определителя  $d$  от частотного параметра  $\alpha$  в зоне главного параметрического резонанса при  $K = 1, p_0 = 0, p_1 = 0,05$  ( $d^* = \det \cdot 10^2$ ). Диапазон значений  $\alpha$ , при которых  $d > 0$ , представляет собой область динамической неустойчивости. Размер и положение этой зоны соответствуют результатам расчетов по формулам [1]. На фиг. 2 показана зависимость величины  $d$  от коэффициента подобия  $K$  при  $p_0 = 0, p_1 = 0,05, \alpha = 2$ . Вид-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

но, что этому сочетанию параметров внешнего воздействия соответствует темп нарастания амплитуды  $K=1,09$  за период  $T$ .

Для проверки этого результата уравнение (9) было проинтегрировано также методом Бубнова — Галеркина по пространственной координате в одночленном приближении. В качестве базисной функции использована численно построенная конфигурация балки, при которой прогибы максимальны. Для полученного обыкновенного дифференциального уравнения типа (1) формулировалась задача Коши с начальными условиями, соответствующими нулевой начальной скорости и единичному начальному смещению. Движение системы анализировалось в течение 30 периодов изменения параметрической силы. В зоне неустойчивости найдено, что темп нарастания амплитуды равнялся той же величине  $K=1,09$ .

На фиг. 3 представлены результаты расчетов параметрических колебаний балки в зоне устойчивости при  $Q(x) \neq 0$  по предлагаемому алгоритму и при использовании разложения

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{M_1} \sum_{m=1}^{M_2} w_{km} \sin k\pi x \cos \frac{m\omega_p t}{2} \quad (13)$$

Расчет проводился для  $Q=1$ ,  $p_0=1$ ,  $p_0=0,2$  при  $M_1=2$ ,  $M_2=10$ ,  $N=24$ . При  $\alpha=0,1$  результаты совпали (фиг. 3, а), при  $\alpha=0,7$  сплошной линией построена полученная численно зависимость от времени величины прогиба посередине пролета, а штриховой — та же зависимость, полученная при использовании (13).

Представленные примеры свидетельствуют об эффективности пред-

лагаемого конечно-разностного варианта анализа параметрических колебаний упругих систем, позволяющего устанавливать границы областей устойчивости и неустойчивости, определять темп нарастания колебаний в области неустойчивости и выполнять расчеты установившихся параметрических колебаний в области устойчивости.

Автор благодарит Я. Г. Пановку за ценные советы и критические замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бологин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
2. *Пановка Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1980. 270 с.
3. *Ден-Гартог Дж. П.* Теория колебаний. М.-Л.: Гостехиздат, ОГИЗ, 1942. 464 с.
4. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.
5. *Чечурин С. Л.* Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 249 с.
6. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию:  
14.II.1990