

© 1992 г. М. К. НАБУЛЛИН

## ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОРБИТАЛЬНОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ

Выведены нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с обыкновенными и частными производными, описывающие поступательно-вращательное движение орбитальной тросовой системы (ОТС) [1] в гравитационном поле. ОТС состоит из тела-носителя (спутника-гиростата) и присоединенного к нему на длинном весомерном тросе зонда-спутника. Трос моделируется как гибкая нить, не испытывающая сопротивления на изгиб и кручение. Зонд-спутник считается материальной точкой. В ограниченной круговой задаче [2] найдены частные решения уравнений движения. Методом функций Ляпунова, распространенного на системы с распределенными параметрами, получены достаточные условия устойчивости положения равновесия по энергетическим метрикам. Результаты сопоставлены с известными.

Динамика относительного движения и устойчивость стационарных движений двух материальных точек, тела и материальной точки; двух тел, соединенных гибким невесомерным тросом, на орбите изучались многими авторами (см., например, обзор [3]).

Пространственное движение орбитальной тросовой системы в рамках модели двух материальных точек, соединенных гибким весомерным тросом под воздействием силы тяги носителя, гравитационных и аэродинамических сил исследовалось в [1, 4].

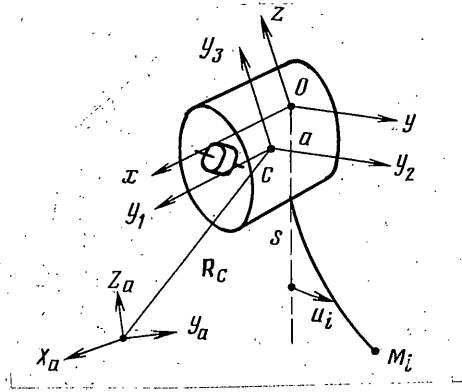
В [5–7] рассмотрены задачи об устойчивости круговой формы нити при движении по инерции, вращения спутникового кольца, центр которого совпадает с притягивающим центром.

Устойчивость положений равновесия гибкой тяжелой нити спутника с тросом на круговой орбите исследовалась в работах [8–10].

В [11] дан обзор результатов по динамике и управлению орбитальных тросовых систем.

**1. Уравнения движения.** Введем следующие системы осей координат (фигура):  $O_a X_a Y_a Z_a$  — инерциальная (неподвижная) система осей координат с началом в центре притяжения  $O_a$ ,  $O_a Z_a$  — ось симметрии силового поля.

$Sx_1 x_2 x_3$  — система координат с началом в центре масс  $S$  орбитальной тросовой системы; ось  $Sx_3$  имеет одинаковое направление с осью  $O_a Z_a$ , ось  $Sx_2$  перпендикулярна к оси  $O_a Z_a$  и направлена от нее, ось  $Sx_1$  ортогональна к осям  $Sx_2$ ,  $Sx_3$  и направлена так, что системы осей  $O_a X_a Y_a Z_a$  и  $Sx_1 x_2 x_3$  имеют одинаковую ориентацию.



$Oxyz$  — система подвижных осей, неизменно связанных с корпусом несущего тела и имеющих начало  $O$  в центре масс системы абсолютно твердых тел.

$Cy_1y_2y_3$  — система с осями  $y_1, y_2, y_3$ , параллельными к осям  $x, y, z$  соответственно.

Единичные векторы осей системы  $Cy_1y_2y_3$  обозначим через  $\vec{i}_s$  ( $s=1, 2, 3$ ), а радиуса-вектора центра масс  $\vec{R}_c$  — через  $\vec{e}_2$ . Положение осей  $y_1, y_2, y_3$  в системе координат  $Cx_1x_2x_3$  определим направляющими косинусами  $\alpha_{1s} = \cos(\hat{x}_1, y_s), \alpha_{2s} = \cos(\hat{x}_2, y_s), \alpha_{3s} = \cos(\hat{x}_3, y_s)$  ( $s=1, 2, 3$ ). Эти косинусы выражаются через углы Эйлера — Крылова известными формулами [12], например

$$\alpha_{21} = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta, \quad \alpha_{22} = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta$$

$$\alpha_{23} = -\cos \psi \sin \theta, \quad \alpha_{31} = \sin \theta \sin \varphi, \quad \alpha_{32} = \sin \theta \cos \varphi, \quad \alpha_{33} = \cos \theta$$

Если положение центра масс  $O'CS$  в неподвижной системе осей координат задать цилиндрическими координатами  $\varphi, r, z$ , то для направляющих косинусов орта  $\vec{e}_2$  будем иметь соотношения

$$\gamma_s = \cos(\vec{e}_2, y_s) = (r\alpha_{2s} + z\alpha_{3s})R_c^{-1} \quad (s=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

Кинетическая энергия системы равна выражению

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2) + T_c$$

$$T_c = \frac{1}{2} \sum_{s,j=1}^3 A_{sj} \Omega_s \Omega_j + \frac{1}{2} \left( \int_0^l \rho_i \dot{u}_i^2 ds + M_i \dot{u}_i^2 \right) - \frac{1}{2} M \dot{\rho}_c^2 - M \dot{\rho}_c (\bar{\Omega} \times \vec{\rho}_c) + \\ + \int_0^l \rho_i [\dot{u}_i \times (\vec{r}_i^0 + \vec{u}_i)] \bar{\Omega} ds + M_i [\dot{u}_i \times (\vec{r}_i^0 + \vec{u}_i)] \bar{\Omega} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N C_k \dot{\alpha}_k^2 + \sum_{s=1}^3 k_s \Omega_s \quad (1.2)$$

Здесь  $\bar{\Omega} = \Omega_1 \vec{i}_1 + \Omega_2 \vec{i}_2 + \Omega_3 \vec{i}_3$  — вектор абсолютной угловой скорости системы координат  $Cy_1y_2y_3$ ,  $\vec{u}_i = u_{1i} \vec{i}_1 + u_{2i} \vec{i}_2 + u_{3i} \vec{i}_3$  — вектор перемещения произвольной точки нити;  $s$  — пространственная координата, отсчитываемая вдоль прямой, проходящей через точку  $O$  и точку закрепления нити;  $\rho_i$  — произведение плотности троса на площадь поперечного сечения,  $l$  — длина троса,  $\vec{\rho}_c = \vec{OC}$ ,  $M$  — масса всей системы;  $A_{sj}$  ( $s, j=1, 2, 3$ ) — компоненты тензора инерции системы, построенного для центра масс  $C$ . Величина  $C_k$  — осевой момент инерции маховика,  $\dot{\alpha}_k$  — его угловая скорость;  $k_s$  ( $s=1, 2, 3$ ) проекции суммы относительных кинетических моментов маховиков на оси  $y_1, y_2, y_3$  соответственно.  $M_i$  — масса

зонда-спутника. Индекс  $i$  введен для удобства записи, например, если  $i=1$ , то это будет означать, что точка закрепления троса расположена на оси  $Ox$ , при  $i=2$  — на оси  $Oy$ , при  $i=3$  — на оси  $Oz$ .

Силовая функция центральных сил, действующих на ОТС равна интегралу

$$U = \int_{(v)} \mu (R_c^2 + \rho^2 + 2R_c\gamma)^{-1/2} dm, \quad R_c^2 = r^2 + z^2 \quad (1.3)$$

распространенному по всему объему  $v$ . В этой формуле  $\mu$  — гравитационная постоянная,  $dm$  — элемент массы,  $\rho$  — расстояние от точки  $C$  до произвольной точки ОТС,  $\gamma = \cos(\vec{e}_2, \hat{\rho})$ . Произведение  $\rho$  на  $\gamma$  определяется соотношением

$$\rho\gamma = \sum_{s=1}^3 x_{s,i}\gamma_s, \quad x_{s,i} = r_{s,i}^0 + u_{s,i} - \rho c_s$$

Если предположить  $\rho/R_c \ll 1$ , то из (1.3) после несложных выкладок получим приближенное выражение силовой функции

$$U = \frac{\mu M}{R_c} + \frac{\mu}{2R_c^3} \sum_{s=1}^3 A_{s..} - \frac{3\mu}{2R_c^3} \sum_{s,j=1}^3 A_{s,j}\gamma_s\gamma_j \quad (1.4)$$

В случае нерастяжимой нити имеет место равенство

$$\sum_{s=1}^3 \left( \frac{\partial r_{s,i}^0}{\partial s} + \frac{\partial u_{s,i}}{\partial s} \right)^2 - 1 = 0 \quad (1.5)$$

Для вывода уравнений движения ОТС воспользуемся обобщенным принципом Гамильтона — Остроградского с учетом связи (1.5) [13, 14]. Прделав надлежащие выкладки получим искомые уравнения.

Движение центра масс системы описывается уравнениями

$$M(\ddot{r} - \dot{\varphi}_1^2 r) = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad M\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{d}{dt} \left( M\dot{\varphi}_1 r^2 + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial T}{\partial \Omega_s} \alpha_{s..} \right) = 0 \quad (1.6)$$

Уравнения вращательного движения относительно центра масс имеют вид

$$\dot{\vec{K}} + \vec{\Omega} \times \vec{K} = \text{grad}_{e_2} U \times \vec{e}_2, \quad \vec{K} = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial T}{\partial \Omega_s} \vec{i}_s \quad (1.7)$$

$$\text{grad}_{e_2} U = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_s} \vec{i}_s, \quad \vec{e}_2 = \sum_{s=1}^3 \gamma_s \vec{i}_s, \quad \Omega_s = \omega_s + \dot{\varphi}_1 \alpha_{3s} \quad (s=1, 2, 3)$$

Уравнения движения маховиков вокруг оси их динамической симметрии имеют вид

$$C_k \frac{d}{dt} \left( \dot{\alpha}_k + \sum_{s=1}^3 \Omega_s \beta_{sk} \right) = Q_k, \quad (k=1, \dots, N) \quad (1.8)$$

где  $Q_k$  — моменты сил, приложенных к маховикам,  $\beta_{sk}$  ( $s=1, 2, 3; k=1, \dots, N$ ) — косинусы углов между осью динамической симметрии маховиков и осями  $y_1, y_2, y_3$ .

Движения точек троса и зонда в системе осей координат описываются следующими уравнениями

$$\rho_i [\ddot{\vec{x}}_i + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{x}_i + 2(\vec{\Omega} \times \dot{\vec{x}}_i) + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{x}_i)] = \frac{\partial}{\partial s} \left( T^0 \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial s} \right) + \vec{f}_i, \quad (1.9)$$

$$(0 < s < l)$$

$$M_i [\ddot{\vec{x}}_i + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{x}_i + 2(\vec{\Omega} \times \dot{\vec{x}}_i) + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{x}_i)] + T^0 \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial s} \Big|_{s=l} = \vec{f}_i(l, t), \quad (1.10)$$

$$(s=l)$$

$$u_{1i} = u_{2i} = u_{3i} = 0 \quad (s=0) \quad (1.11)$$

где  $T^0(s, t)$  — натяжение троса. В этих уравнениях для удобства записи введены обозначения

$$\vec{x}_i = \sum_{s=1}^3 (r_{si}^0 + u_{si} - \rho_{cs}) \vec{i}_s, \quad \vec{f}_i = \sum_{s=1}^3 f_{si} \vec{i}_s, \quad \vec{f}_i(l, t) = \sum_{s=1}^3 f_{si}(l, t) \vec{i}_s \quad (1.12)$$

$$f_{si} = \frac{\partial U}{\partial u_{si}} + \frac{\rho_i}{M} \frac{\partial U}{\partial \rho_{cs}}, \quad f_{si}(l, t) = \frac{\partial U}{\partial u_{si}(l, t)} + \frac{M_i}{M} \frac{\partial U}{\partial \rho_{cs}} \quad (1.13)$$

Величины  $f_{si}(s, t)$ ,  $f_{si}(l, t)$  представляют собой проекции на оси  $y_s$  гравитационных сил, действующих на трос и зонд соответственно.  $U$  — плотность силовой функции (1.3). Если при вычислении (1.13) воспользоваться формулой (1.4), то получим следующие соотношения

$$f_{si} = -\rho_i \omega_0^2 x_{si} + 3\rho_i \omega_0^2 \gamma_s \sum_{j=1}^3 x_{ji} \gamma_j \quad (s=1, 2, 3) \quad (1.14)$$

$$f_{si}(l, t) = -M_i \omega_0^2 x_{si}(l, t) + 3M_i \omega_0^2 \gamma_s \sum_{j=1}^3 x_{ji}(l, t) \gamma_j$$

Здесь  $\omega_0^2 = \mu R_c^{-3}$ , индекс  $i$  — фиксирован.

Уравнения (1.6)–(1.9) и краевые условия (1.10), (1.11) при постоянстве относительных кинетических моментов маховиков ( $k_s = \text{const}$ ,  $s=1, 2, 3$ ) допускают интеграл площадей и интеграл энергии

$$L = M \dot{\varphi}_1 r^2 + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial T}{\partial \Omega_s} \alpha_{3s} = \text{const}, \quad T - U - \sum_{s=1}^3 k_s \Omega_s = \text{const} \quad (1.15)$$

где  $T$  и  $U$  определяются формулами (1.2), (1.3) или (1.4).

В дальнейшем предположим, что движение центра масс системы происходит по известной кеплеровской круговой орбите, т. е.

$$z=0, \quad r=R_c, \quad \gamma_s = \alpha_{2s} \quad (s=1, 2, 3), \quad \varphi_1 = \dot{\varphi}_1 t + \varphi_{10} \quad (1.16)$$

В ограниченной круговой задаче движение орбитальной тросовой системы описывается уравнениями (1.7)–(1.11) с учетом (1.4), (1.5), (1.14), (1.16). Эти уравнения при  $k_s = \text{const}$  ( $s=1, 2, 3$ ) допускают интеграл типа Якоби

$$H = T_c - \dot{\varphi}_1 \sum_{s=1}^3 \frac{\partial T_c}{\partial \Omega_s} \alpha_{3s} - U - \sum_{s=1}^3 k_s \Omega_s = \text{const} \quad (1.17)$$

который является линейной связкой интеграла энергии и интеграла площадей (1.15) с множителем  $\dot{\varphi}_1$ .

2. Стационарные движения. 1°. Пусть  $i=3$ ,  $r_{13}^{\circ}=0$ ,  $r_{23}^{\circ}=0$ ,  $r_{33}^{\circ}=a+s$ , т. е. точка закрепления нити к корпусу находится на оси  $Oz$ . Тогда из уравнений движения будем иметь следующее частное решение

$$\begin{aligned}\Omega_1=0, \quad \Omega_2=\dot{\varphi}_1, \quad \Omega_3=0, \quad \psi_0=\varphi_0=0, \quad \theta_0=\pi/2 & \quad (2.1) \\ \alpha_{11}=1, \quad \alpha_{12}=\alpha_{13}=\alpha_{21}=\alpha_{22}=0, \quad \alpha_{23}=-1, \\ \alpha_{31}=\alpha_{33}=0, \quad \alpha_{32}=1 \\ u_{13}=u_{23}=u_{33}=0, \quad k_1=k_3=0\end{aligned}$$

Натяжение троса определяется формулой

$$\begin{aligned}T^0 = \frac{(2\omega_0^2 + \dot{\varphi}_1^2)}{2} [(a+l-\rho_{c3}^0)^2 - (a+s-\rho_{c3}^0)^2] + \\ + (2\omega_0^2 + \dot{\varphi}_1^2) M_3 (a+l - \rho_{c3}^0) \quad (0 \leq s \leq l)\end{aligned} \quad (2.2)$$

Величины  $\rho_{c1}^0$ ,  $\rho_{c2}^0$ ,  $\rho_{c3}^0$  принимают значения

$$\rho_{c1}^0 = \rho_{c2}^0 = 0, \quad \rho_{c3}^0 = \frac{1}{M} \int_0^l \rho_3 (a+s) ds + M_3 (a+l) \quad (2.3)$$

Проекция кинетического момента маховиков  $k_2$  на нормаль к плоскости орбиты остается произвольной величиной.

Записанному решению соответствует положение равновесия орбитальной тросовой системы. Главные центральные оси инерции спутника-гиростата коллинеарны осям орбитальной системы координат. Оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ( $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ ) параллельны осям  $x_1$ ,  $x_3$ ,  $-x_2$  соответственно. Трос с зондом расположен вдоль радиуса орбиты и направлен в сторону притягивающего центра.

2°. Пусть  $i=1$ ,  $r_{11}^{\circ}=a+s$ ,  $r_{21}^{\circ}=0$ ,  $r_{31}^{\circ}=0$ , т. е. точка закрепления нити находится на оси  $Ox$ . В этом случае частное решение уравнений движения записывается в виде

$$\begin{aligned}\Omega_1=0, \quad \Omega_2=\dot{\varphi}_1, \quad \Omega_3=0; \quad \psi_0=0, \quad \varphi_0=0, \quad \theta_0=\pi/2 & \quad (2.4) \\ \alpha_{11}=1, \quad \alpha_{12}=0, \quad \alpha_{13}=0; \quad \alpha_{21}=0, \quad \alpha_{22}=0, \quad \alpha_{23}=-1 \\ \alpha_{31}=0, \quad \alpha_{32}=1, \quad \alpha_{33}=0, \quad u_{13}=u_{23}=u_{33}=0, \quad k_1=k_3=0\end{aligned}$$

Кинетический момент  $k_2$  остается произвольной величиной,  $\vec{k}_2$  — направлен по нормали к плоскости орбиты. Натяжение нити равно нулю, т. е.  $T^0=0$ . Величины  $\rho_{c1}^0$ ,  $\rho_{c2}^0$ ,  $\rho_{c3}^0$  имеют значения

$$\rho_{c1}^0 = \rho_{c3}^0 = 0, \quad \rho_{c2}^0 = \frac{1}{M} \int_0^l \rho_2 (a+s) ds + M_2 (a+l)$$

Этому решению соответствует положение равновесия ОТС в системе координат  $Sx_1x_2x_3$ . Главные центральные оси инерции спутника — гиростата  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ( $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ ) коллинеарны осям  $x_1$ ,  $x_3$ ,  $-x_2$  соответственно. Трос с зондом направлен по касательной к орбите.

3°. Пусть  $i=2$ ,  $r_{12}^{\circ}=0$ ,  $r_{22}^{\circ}=a+s$ ,  $r_{32}^{\circ}=0$ , т. е. точка закрепления нити к корпусу тела-носителя находится на оси  $Oy$ . Анализ показывает, что уравнения (1.7) вдоль решения (2.1) удовлетворяются тождественно. С учетом (2.1) из уравнения (1.9) и краевых условий (1.10) и (1.11) можно найти выражение для  $T^0$ . Однако, найденное выражение для  $T^0$  в

области  $0 \leq s \leq l$  принимает лишь отрицательные значения. Это означает, что не существует положения равновесия (хотя формальное решение, удовлетворяющее уравнениям движения (1.7), (1.9) и крайним условиям (1.10), (1.11) существует), при котором главные центральные оси инерции спутника-гиростата были бы коллинеарны осям орбитальной системы координат, а трос с зондом был направлен по нормали к плоскости орбиты. Этот факт объясним и с физической точки зрения.

3. Устойчивость. Для исследования устойчивости положения равновесия (2.1)–(2.3) построим функционал Ляпунова — Четаева из интеграла (1.17) и условия нерастяжимости нити (1.5) в виде

$$V = H - H_0 + \frac{1}{2} \int_0^l T^0 W ds + \frac{1}{4} \int_0^l \lambda_0 W^2 ds \quad (3.1)$$

$$W = u_{13}'^2 + u_{23}'^2 + 2u_{33}' + u_{33}'^2 = 0 \quad (3.2)$$

где  $\lambda_0$  — множитель Лагранжа,  $T^0$  — определяется формулой (2.2),  $H_0$  — значение интеграла (1.17) вдоль решения (2.1) и (2.3). Очевидно, что  $V(0) = 0$ . Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что первая вариация функционала (3.1) обращается в ноль в силу решения (2.1)–(2.3) и соотношения (3.2). Следовательно, установление определенно-положительности функционала (3.1) сводится к исследованию его второй вариации  $2\delta^2 V$ .

Сохраним прежние обозначения для отклонений переменных от их невозмущенных значений. Тогда будем иметь

$$2\delta^2 V = 2T_2 + \Pi_2 \quad (3.3)$$

Здесь квадратичный функционал  $T_2$  будет равен выражению (1.2) при замене в нем величин  $\Omega_s$  на  $\omega_s$  ( $s=1, 2, 3$ ) и при  $\dot{\alpha}_k=0$ ,  $k_s=0$ .

Можно показать, что  $T_2$  определенно-положителен и непрерывен по метрике

$$P_1 = \sum_{s=1}^3 \left[ \omega_s^2 + \int_0^l \rho_s \dot{u}_{s3}^2 ds + \dot{\rho}_{s3}^2 \right] \quad (3.4)$$

Функционал  $\Pi_2$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & a_{11}\psi^2 + a_{22}\varphi^2 + a_{33}\theta^2 + M(\varphi_1^2 - \omega_0^2)\rho_{c1}^2 + M(\dot{\varphi}_1^2 + 2\omega_0^2)\rho_{c3}^2 - \\ & - M\rho_{c2}^2 + M_3(\omega_0^2 - \dot{\varphi}_1^2)\rho_{13}^2 + M_3\omega_0^2\rho_{23}^2 - M_3(2\omega_0^2 + \dot{\varphi}_1^2)\rho_{33}^2 + \\ & + \int_0^l \rho_s [(\omega_0^2 - \dot{\varphi}_1^2)u_{13}^2 + \omega_0^2 u_{23}^2 - (2\omega_0^2 + \dot{\varphi}_1^2)u_{33}^2] ds + \\ & + 6\omega_0^2 \psi \left[ M_3(a+l-\rho_{c3}^0)\rho_{13} + \int_0^l \rho_s(a+s-\rho_{c3}^0)u_{13} ds \right] - \\ & - 2\theta(3\omega_0^2 + \dot{\varphi}_1^2) \left[ M_3(a+l-\rho_{c3}^0)\rho_{23} + \int_0^l \rho_s(a+s-\rho_{c3}^0)u_{23} ds \right] + \\ & + \int_0^l T^0(u_{13}'^2 + u_{23}'^2 + u_{33}'^2) ds + \int_0^l \lambda_0 \dot{u}_{33}^2 ds \quad (3.5) \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  имеют значения

$$a_{11} = 3\omega_0^2 (A_{11}^0 - A_{33}^0), \quad a_{22} = \dot{\varphi}_1^2 (A_{22}^0 - A_{11}^0) + \dot{\varphi}_1 k_2 \quad (3.6)$$

$$a_{33} = (3\omega_0^2 + \dot{\varphi}_1^2) (A_{22}^0 - A_{33}^0) + k_2 \dot{\varphi}_1$$

$$A_{11}^0 = A_1^0 + M_k \rho_{c3}^0 + J_3, \quad A_{22}^0 = A_2^0 + M_k \rho_{c3}^0 + J_3, \quad A_{33}^0 = A_3^0$$

$$J_3 = \int_0^l \rho_3 (a+s-\rho_{c3}^0)^2 ds + M_3 (a+l-\rho_{c3}^0)^2$$

Величины  $A_1^0$ ,  $A_2^0$ ,  $A_3^0$  — моменты инерции спутника-гиростата относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно.  $J_3$  — момент инерции троса с зондом относительно точки  $C$ ,  $M_k$  — масса корпуса с маховиками,  $\rho_{cs} = u_{s3}(l, t)$  ( $s=1, 2, 3$ ).

Установление определенно-положительности (3.5) нетривиален, так как в функционал входят слагаемые с отрицательными знаками. Поэтому проведен ряд преобразований.

Рассмотрим вариационные задачи на собственные значения. Найти минимумы функционалов

$$\Phi_1 = \left( \int_0^l n_1 \sum_{s=1}^3 u_{s3}{}'^2 ds \right) \left[ \int_0^l \rho_3 \sum_{s=1}^3 u_{s3}{}^2 ds \right]^{-1} \quad (3.7)$$

$$n_1 = 1/2 (2\omega_0^2 + \dot{\varphi}_1^2) [(a+l-\rho_{c3}^0)^2 - (a+s-\rho_{c3}^0)^2]$$

$$\Phi_2 = \left( \int_0^l n_2 \sum_{s=1}^3 u_{s3}{}'^2 ds \right) \left[ M_3 \sum_{s=1}^3 \rho_{s3}{}^2 \right]^{-1} \quad (3.8)$$

$$n_2 = (2\omega_0^2 + \dot{\varphi}_1^2) M_3 (a+l-\rho_{c3}^0)$$

$$\Phi_3 = \left( \int_0^l u_{33}{}'^2 ds \right) \left( \int_0^l \rho_3 u_{33}{}^2 ds + M_3 \rho_{33}{}^2 \right)^{-1} \quad (3.9)$$

в классе непрерывно дифференцируемых функций до второго порядка включительно в области  $0 \leq s \leq l$  и удовлетворяющих граничным условиям  $u_{13} = u_{23} = u_{33} = 0$  при  $s=0$ . Приравнявая нулю первую вариацию (3.7) получим уравнения и естественное граничное условие для отыскания собственных значений и собственных функций в виде

$$1/2 (2\omega_0^2 + \dot{\varphi}_1^2) \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{du}{dx} \right] + \lambda u = 0, \quad x = \frac{a+s-\rho_{c3}^0}{a+l-\rho_{c3}^0} \quad (3.10)$$

$$u = (u_{13}, u_{23}, u_{33}), \quad (1-x^2) \frac{du}{dx} \Big|_{x=1} = 0 \quad (3.11)$$

из (3.10) имеем

$$\lambda_n = (2\omega_0^2 + \dot{\varphi}_1^2) \rho_3 n(2n-1), \quad u_n = P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (3.12)$$

где  $P_n$  — стандартизованные многочлены Лежандра. Решение (3.12) удовлетворяет кинематическим граничным условиям для нечетных степеней  $n=1, 3, 5, \dots$  и если имеет место равенство

$$a = \rho_{c3}^0 = l \left( \frac{\varepsilon_1}{2} + \delta_1 \right), \quad \varepsilon_1 = \frac{m}{M_h} \ll 1, \quad \delta_1 = \frac{M_3}{M_h} \ll 1 \quad (3.13)$$

Здесь  $m$  — масса троса. В дальнейшем будем полагать, что соотношение (3.13) выполнено.

Аналогично решаются задачи отыскания минимума функционалов (3.8) и (3.9). Нахождение собственных значений и собственных функций приводятся к решению следующих краевых задач

$$n_2 u' |_{s=l} - \lambda M_3 u(l) = 0, \quad (n_2 u')' = 0 \quad (0 < s < l) \quad (3.14)$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = (\rho_{13}, \rho_{23}, \rho_{33})$$

$$u_{33}'' + \lambda \rho_3 u_{33} = 0 \quad (0 < s < l), \quad u_{33}' |_{s=l} - M_3 \rho_{33} = 0, \quad (3.15)$$

$$u_{33}(0) = 0$$

Решение задачи (3.14) имеет вид

$$u = c_1 s / (2\omega_0^2 + \varphi_1^2) M_3 l, \quad \lambda = (2\omega_0^2 + \varphi_1^2) \quad (3.16)$$

Из краевой задачи (3.15) получим  $u_{33} = c_2 \sin ks$ ,  $k = \sqrt{\lambda \rho_3}$  и

$$\operatorname{ctg} kl = M_3 l / (kl) \quad (3.17)$$

Здесь  $c_1$ ,  $c_2$  — произвольные постоянные интегрирования.

Минимум функционала (3.9) равен наименьшему из корней трансцендентного уравнения (3.17). Обозначим этот корень через  $\lambda_2$ . Тогда на основе найденных собственных значений (3.12), (3.16), из (3.7)–(3.9) получим следующие оценки

$$\sum_{j=1}^6 z_j^2 = \int_0^l T^0 \sum_{s=1}^3 u_{33}{}'^2 ds - (2\omega_0^2 + \varphi_1^2) \sum_{s=1}^3 \left( \int_0^l \rho_3 u_{33}^2 ds + M_3 \rho_{33}^2 \right) \geq 0 \quad (3.18)$$

$$z_7^2 = \int_0^l u_{33}{}'^2 ds - \lambda_2 \left( \int_0^l \rho_3 u_{33}^2 ds + M_3 \rho_{33}^2 \right) \geq 0 \quad (3.19)$$

Далее, как и в [10, 15], введем интегральные характеристики и переменные формулами

$$y_{13} = \int_0^l \rho_3 s u_{13} ds, \quad y_{23} = \int_0^l \rho_3 s v_{23} ds, \quad v_{23} = u_{23} - \frac{\rho_{c2}}{4}, \quad x_{23} = \rho_{23} - \frac{\rho_{c2}}{4} \quad (3.20)$$

$$z_{13}^2 J_1^{-1} = -y_{13}^2 J_1^{-1} + \int_0^l \rho_3 u_{13}^2 ds \geq 0, \quad z_{23}^2 J_1^{-1} = -y_{23}^2 J_1^{-1} + \int_0^l \rho_3 v_{23}^2 ds,$$

$$J_1 = \frac{ml^2}{3}$$

С учетом (3.18)–(3.20) функционал (3.5) примет вид квадратичной формы

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & a_{11} \varphi^2 + a_{22} \varphi^2 + a_{33} \theta^2 + M(\varphi_1^2 - \omega_0^2) \rho_{c1}^2 + M(\varphi_1^2 + 2\omega_0^2) \rho_{c3}^2 + \\ & + \frac{\rho_{c2}^2}{16} [8M_h(\omega_0^2 + \varphi_1^2) + (5\omega_0^2 + 7\varphi_1^2)(m + M_3)] + 3M_3 \omega_0^2 \rho_{13}^2 + 3\omega_0^2 J_1^{-1} z_{13}^2 + \\ & + 3\omega_0^2 y_{13}^2 J_1^{-1} + (3\omega_0^2 + \varphi_1^2)(M_3 x_{23}^2 + z_{23}^2 J_1^{-1} + y_{23}^2 J_1^{-1}) + 6\omega_0^2 \varphi (M_3 l \rho_{13} + y_{13}) - \end{aligned}$$



$$-2\theta(3\omega_0^2 + \varphi_1^2)(M_3 l x_{23} + y_{23}) - 2\theta(3\omega_0^2 + \varphi_1^2)l \frac{(2M_3 + m)}{8} +$$

$$+ \sum_{j=1}^6 z_j^2 + \lambda_0 z_7^2 + \lambda_0 \lambda_2 z_8^2 + \lambda_0 \lambda_2 M_3 \rho_{33}^2, \quad z_8 = \left( \int_0^l \rho_3 u_{33}^2 ds \right)^{1/2}$$

Согласно критерию Сильвестра условия определенно-положительности  $\Pi_2$  при  $\varphi_1^2 = \omega_0^2$  приводятся к неравенствам  $\lambda_0 > 0$  и

$$A_1^0 + M_k \rho_{c3}^2 - A_3^0 > 0, \quad A_2^0 - A_1^0 + k_2 \omega_0^{-1} > 0 \quad (3.21)$$

$$A_2^0 - A_3^0 + k_2 / 4\omega_0 + 3M_k l^2 (\varepsilon_1 / 2 + \delta_1)^2 (1 + \varepsilon_1 + \delta_1) / (4 + 3\varepsilon_1 + 3\delta_1) > 0$$

а при  $\omega_0^2 = 0$  — к неравенствам  $\lambda_0 > 0$  и

$$A_2^0 - A_1^0 + k_2 \varphi_1^{-1} > 0 \quad (3.22)$$

$$A_2^0 - A_3^0 + k_2 \varphi_1^{-1} + M_k l^2 \left( \frac{\varepsilon_1}{2} + \delta_1 \right)^2 \frac{7(1 + \varepsilon_1 + \delta_1)}{8 + 7\varepsilon_1 + 7\delta_1} > 0$$

При выполнении неравенств (3.21) функционал (3.5) определенно-положителен и непрерывен по метрикам

$$P_2 = \psi^2 + \theta^2 + \varphi^2 + \sum_{s=1}^3 \left( \int_0^l \rho_3 u_{3s}^2 ds + \rho_{3s}^2 \right)$$

$$P_3 = P_2 + \int_0^l (l^2 - s^2) \sum_{s=1}^3 u_{3s}{}'^2 ds + \int_0^l \rho_3 u_{33}{}'^2 ds$$

соответственно, а функционалы (3.3) и (3.4) — по метрикам  $\rho_1 = P_1 + P_2$ ,  $\rho_0 = P_1 + P_3$ . Согласно теоремам [14, 16, 17] неравенства (3.21), (3.22) являются достаточными условиями устойчивости положения равновесия (2.1)–(2.3) ОТС на круговой орбите и равномерного вращения ОТС при движении по инерции.

Если  $\rho_3 = 0$ ,  $M_3 = 0$ , то условия (3.21) переходят в критерии устойчивости положения равновесия спутника ( $k_2 = 0$ ) и спутника-гиростата ( $k_2 \neq 0$ ) [2, 18].

Очевидно, что (3.21) шире, чем условия [2, 18]. Однако параметры троса с зондом незначительно расширяют область устойчивости. Если, как и в [8], в рассматриваемой задаче пренебречь влиянием вращательного движения спутника относительно центра масс на трос с зондом ( $\omega_0 = 0$ ,  $s = 1, 2, 3$ ;  $\psi = \theta = \varphi = 0$ ), то функционал (3.3) также будет определенно-положителен и непрерывен по энергетическим метрикам  $\rho$  и  $\rho_0$ . Это означает, что положение равновесия, когда трос с зондом направлен к притягивающему центру и расположен вдоль радиуса орбиты, устойчиво. Вывод справедлив и в случае, когда зонд отсутствует ( $M_3 = 0$ ). Ранее, этот результат для нити на круговой орбите с использованием точного выражения силовой функции был доказан в [8].

Автор благодарит В. М. Матросова за обсуждение работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В. В., Левин Е. М.* Орбитальные тросовые системы. // Препринт Ин-та прикладной математики АН СССР им. М. В. Келдыша, 1981, № 13. 32 с.
2. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
3. *Сарычев В. А.* Исследование космического пространства. М.: ВИНТИ, 1978, т. 2. 223 с.
4. *Левин Е. М.* Об устойчивости стационарных движений связки двух тел на орбите под действием гравитационных и аэродинамических сил. // Космич. исслед. 1984, т. 22, № 5. С. 675–682.
5. *Кузьмин П. А.* Об устойчивости круговой формы гибкой нити. // Тр. Казанск. авиационного ин-та. 1948, вып. 20. С. 69–91.
6. *Кузьмин П. А.* Устойчивость круговой формы нити, имеющей счетное множество степеней свободы. // Тр. Казанск. авиационного ин-та. 1949, вып. 22. С. 3–15.
7. *Белецкий В. В., Левин Е. М.* Устойчивость вращения спутникового кольца. // ПММ, 1986, т. 50, вып. 2. С. 179–186.
8. *Бологина Н. Е., Вильке В. Г.* Об устойчивости положений равновесия гибкой тяжелой нити, привязанной к спутнику на круговой орбите. // Космич. исслед. 1978, т. 16, № 4. С. 621–626.
9. *Вильке В. Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. Изд-во МГУ, 1986. 192 с.
10. *Набиуллин М. К.* Стационарные движения и устойчивость упругих спутников. Новосибирск.: Наука. 1990. 217 с.
11. *Misra A. K., Modi V. J.* A survey on the dynamics and control of tethered satellite systems // Tethers in Space: Proc. Int. Conf., Arlington, Va, Sept. 17–19, 1986 – San Diego (Calif.), 1987. pp. 667–719.
12. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
13. *Моисеев И. И., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
14. *Румянцев В. В.* О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость. // ПММ, 1969, т. 33, вып. 6. С. 946–957.
15. *Набиуллин М. К.* Об устойчивости стационарного движения гиростата с упругими пластинами в ньютоновском центральном поле сил. // Изв. АН СССР, МТТ. 1981, № 1. С. 33–44.
16. *Мовчан А. А.* Устойчивость процессов по двум метрикам. // ПММ, 1960, т. 24, вып. 6. С. 988–1001.
17. *Сиразетдинов Т. К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск.: Наука, 1987. 231 с.
18. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1967. 142 с.

Иркутск

Поступила в редакцию  
17.X.1990