МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1992

УДК 534.1

 А. А. ВОРОНИН, В. В. САЗОНОВ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОБЩЕННО-КОНСЕРВАТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ БОЛЬШИХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ

Рассматривается обобщенно-консервативная механическая система, уравнения движения которой содержат большой параметр, характеризующий гироскопические и потенциальные силы, действующие в системе по некоторым ее обобщенным координатам. Доказывается существование двухпараметрического семейства периодических решений этих уравнений, близкого аналогичному семейству периодических решений вырожденных уравнений, получающихся из исходных при бесконечно большом значении параметра.

1. Уравнения движения и постановка задачи. Рассмотрим обобщенно-консервативную механическую систему с l степенями свободы, функция Лагранжа которой имеет вид

$$L={}^1/_2\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)x_i^{\cdot}x_j^{\cdot}+\sum_{i=1}^{l}a_i(x_1,\ldots,x_l)x_i^{\cdot}+$$
$$+a_0(x_1,\ldots,x_l)+h\Big[\sum_{i=1}^{2m}b_i(x_1,\ldots,x_{2m})x_i^{\cdot}-\Pi(x_1,\ldots,x_n)\Big] \qquad (1.1)$$

Здесь $x_1,\ldots,x_l$ — обобщенные координаты; точкой обозначено дифференцирование по времени t; h — положительный параметр, который в дальнейшем считается большим; симметричная матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^{l}$ положительно определена; $1<2m<n<l$. В рассматриваемой системе большие потенциальные силы действуют по координатам $x_1,\ldots,x_n$ и описываются в (1.1) слагаемым $(-h\Pi)$, большие гироскопические силы действуют в направлении координат $x_1,\ldots,x_{2m}$ и описываются слагаемыми $h(b_1x_1^{\cdot}+\ldots+b_{2m}x_{2m}^{\cdot})$.

Уравнения Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа (1.1) допускают первый интеграл (интеграл энергии):

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}a_{ij}x_i^{\cdot}x_j^{\cdot}-a_0+h\Pi=\mathrm{const} \qquad (1.2)$$

Эти уравнения можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(A_{11}\xi^{\cdot}+A_{12}\eta^{\cdot}+A_{13}\zeta^{\cdot})+h\left[G\xi^{\cdot}+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}\right)^{T}\right]=F_1$$

$$\frac{d}{dt}(A_{21}\xi^{\cdot}+A_{22}\eta^{\cdot}+A_{23}\zeta^{\cdot})+h\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\eta}\right)^{T}=F_2 \qquad (1.3)$$

$$\frac{d}{dt}(A_{31}\xi^{\cdot}+A_{32}\eta^{\cdot}+A_{33}\zeta^{\cdot})=F_3$$

Здесь $\xi=(x_1,\ldots,x_{2m})^T$, $\eta=(x_{2m+1},\ldots,x_n)^T$, $\zeta=(x_{n+1},\ldots,x_l)^T$, матрицы $A_{ij}=A_{ij}(\xi,\eta)$ $(i,j=1,2,3)$ определены соотношением $(A_{ij})_{i,j=1}^{3}=(a_{ij})_{i,j=1}^{l}$ и имеют размеры $A_{11}-2m\times 2m$, $A_{22}-(n-2m)\times(n-2m)$ и так далее; $G(\xi)=(\partial b_i/\partial x_j-\partial b_j/\partial x_i)_{i,j=1}^{2m}$; частные производные скалярной функции $\Pi=\Pi(\xi,\eta)$ по векторам ξ и η рассматриваются как векторы строки, например $\partial\Pi/\partial\xi=(\partial\Pi/\partial x_1,\ldots\partial\Pi/\partial x_{2m})$, $F_i=F_i(\xi,\eta,\zeta,\xi^{\cdot},\eta^{\cdot},\zeta^{\cdot})$ $(i=1,2,3)$, $F_1\in R^{2m}$, $F_2\in R^{n-2m}$, $F_3\in R^{l-n}$. Предположим, что $\det G(\xi)\neq 0$ и преобразуем систему (1.3) следующим образом. Вместо $\xi^{\cdot}$, $\eta^{\cdot}$, $\zeta^{\cdot}$ введем переменные p, q, r, положив

$$\xi^{\cdot}=Pp-G^{-1}[(\partial\Pi/\partial\xi)^T-A_{12}'A_{22}'^{-1}(\partial\Pi/\partial\eta)^T]$$

$$\eta^{\cdot}=q-A_{22}'^{-1}A_{21}'\xi^{\cdot},\qquad \zeta^{\cdot}=r-A_{33}^{-1}(A_{31}\xi^{\cdot}+A_{32}\eta^{\cdot}) \qquad (1.4)$$

Здесь $A_{ij}'=A_{ij}-A_{i3}A_{33}^{-1}A_{3j}$ $(i,j=1,2)$, $P=P(\xi,\eta)$ — произвольная невырожденная матрица. Такая замена корректна, поскольку в силу положительной определенности матрицы $(a_{ij})_{i,j=1}^{l}$ матрицы A_{33} и A_{22}' также положительно определены. Замена (1.4) преобразует уравнения (1.3) к виду

$$p^{\cdot}=-hP^{-1}A_{11}''^{-1}GPp+F_1'(\xi,\eta,\zeta,p,q,r)$$

$$q^{\cdot}=-hA_{22}'^{-1}(\partial\Pi/\partial\eta)^T+F_2'(\xi,\eta,\zeta,p,q,r),\qquad r^{\cdot}=F_3'(\xi,\eta,\zeta,p,q,r) \qquad (1.5)$$

с положительно определенной матрицей $A_{11}''=A_{11}'-A_{12}'A_{22}'^{-1}A_{21}'$. Полученные уравнения вместе с уравнениями (1.4) образуют замкнутую систему относительно ξ, η, ζ, p, q и r.

Пусть уравнение (относительно η) $\partial\Pi(\xi,\eta)/\partial\eta=0$ имеет корень $\eta=\eta^{\circ}(\xi)$. Тогда при $h=\infty$ система (1.4), (1.5) допускает решения, в которых $p=0$, $\eta=\eta^{\circ}(\xi)$, $q=q^{\circ}(\xi)$; ξ и $\vartheta=(\zeta,r)$ определяются системой

$$\xi^{\cdot}=\Phi_\xi(\xi)\equiv-G^{-1}(\xi)[\partial\Pi(\xi,\eta^{\circ}(\xi))/\partial\xi]^T,\qquad \vartheta^{\cdot}=\Phi_\vartheta(\xi,\vartheta) \qquad (1.6)$$

Явный вид функций $q^{\circ}(\xi)$ и $\Phi_\vartheta(\xi,\vartheta)$ для сокращения записи указывать не будем (более подробно проводимые преобразования описаны в [3]). Первое уравнение системы (1.6) отделяется и допускает первый интеграл $\Pi(\xi,\eta^{\circ}(\xi))=\text{const}$. Относительно этой системы предположим следующее.

1°. Эта система имеет двухпараметрическое семейство периодических решений

$$\xi=\varphi_\xi(t+t_0,c),\qquad \vartheta=\varphi_\vartheta(t+t_0,c) \qquad (1.7)$$

с периодом $T(c)>0$, где $c\in(c_1^{\circ},c_2^{\circ})$ и $t_0\in(-\infty,+\infty)$ — параметры.

2°. При $c\in[c_1,c_2]\subset(c_1^{\circ},c_2^{\circ})$ система уравнений в вариациях для решения (1.7) допускает единственное (с точностью до постоянного множителя) нетривиальное $T(c)$ — периодическое решение $\varphi_\xi^{\bullet}(t+t_0, c)$, $\varphi_\vartheta^{\bullet}(t+t_0, c)$.

3°. При $c\in[c_1, c_2]$ выполнено соотношение $\psi_0(t, c)=\partial\Pi(\varphi_\xi(t, c), \varphi_\eta\times(t, c))/\partial\xi\neq0$, где $\varphi_\eta(t, c)=\eta^\circ(\varphi_\xi(t, c))$.

4°. При $c\in[c_1, c_2]$ и любом t матрица $\partial^2\Pi(\varphi_\xi(t, c), \varphi_\eta(t, c))/\partial\eta^2$ положительно определена.

Не ограничивая общности, положим в (17) $t_0=0$ и исследуем вопрос о существовании $T(c)$ — периодических решений системы (1.4), (1.5) $\xi(t, c, h)$, $p(t, c, h)$, $\vartheta(t, c, h)$, $\eta(t, c, h)$, $q(t, c, h)$, определенных для значений (c, h) из некоторого неограниченного множества $I_h\subset[c_1, c_2]\times[0, +\infty)$ и удовлетворяющих при допустимых $h\to+\infty$ условиям $\xi(t, c, h)\to\varphi_\xi(t, c)$, $p(t, c, h)\to0$, $\vartheta(t, c, h)\to\varphi_\vartheta(t, c)$, $\eta(t, c, h)\to\varphi_\eta(t, c)$, $q(t, c, h)\to\varphi_q(t, c)\equiv\equiv q^\circ(\varphi_\xi(t, c))$. В частных случаях, когда в (1.1) либо все $b_i=0$ (гироскопические силы отсутствуют), либо $l=2m>n$ (гироскопические силы действуют по всем обобщенным координатам), такие решения построены в [1, 2].

В данной статье предполагается, что $n>2m$. При $n\leqslant2m<l$ исследование периодических решений упрощается — из системы (1.4), (1.5) исчезают векторы η, q и дифференциальные уравнения для них (при этом $r, \zeta\in R^{l-2m}$). Соответствующим образом из проводимого анализа исчезают и все построения, касающиеся этих векторов. В остальном исследование остается без изменений.

2. Теорема о существовании периодических решений. Для построения периодических решений системы (1.4), (1.5) необходимо проделать ряд вспомогательных преобразований и ввести дополнительные предположения. Так как матрица $A_{11}''(\xi, \eta)$ симметрична и положительно определена, а матрица $G(\xi)$ кососимметрична, то соответствующие им билинейные формы можно одновременно привести к каноническому виду [4]. Более точно, существует невырожденная матрица $P(\xi, \eta)$ такая, что

$$P^T(\xi, \eta)A_{11}''(\xi, \eta)P(\xi, \eta)=E_{2m}, \quad P^T(\xi, \eta)G(\xi)P(\xi, \eta)= \tag{2.1}$$

$$=-\operatorname{diag}(\gamma_j(\xi, \eta)J)_{j=1}^{2m}\equiv-\Gamma(\xi, \eta),$$

$$J=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Здесь и далее через E_k обозначается единичная матрица порядка k. Будем считать, что именно такая матрица $P(\xi, \eta)$ использована в замене переменной (1.4), т. е. в (1.5) $P^{-1}A_{11}''^{-1}GP=-\Gamma$, и условия 1°—4°, сформулированные в п. 1, дополним условиями

5°. При всех допустимых ξ и η матрица $P(\xi, \eta)$ и скаляры $\gamma_i(\xi, \eta)$ $(i=1, \ldots, m)$ — достаточно гладкие функции.

6°. При $c\in[c_1, c_2]$ и любом t справедливы неравенства $0<\gamma_1^2(\varphi_\xi(t, c), \varphi_\eta(t, c))<\gamma_2^2(\varphi_\xi(t, c), \varphi_\eta(t, c))<\ldots<\gamma_m^2(\varphi_\xi(t, c), \varphi_\eta(t, c))$.

В системе (1.4), (1.5) сделаем замену переменных $\xi\to\varphi_\xi(t, c)+\xi$, $\vartheta\to\varphi_\vartheta(t, c)+\vartheta$, $\eta\to\eta^\circ[\varphi_\xi(t, c)+\xi]+\eta$, $q\to q^\circ[\varphi_\xi(t, c)+\xi]+q$ и в получившихся уравнениях выделим в явном виде некоторые члены. В результате придем к $T(c)$-периодической системе

$$\xi^{\bullet}=B_{11}(t, c)\xi+B_{12}(t, c)p+B_{14}(t, c)\eta+f_1(t, \xi, p, \eta, c) \tag{2.2}$$

$$p^{\bullet}=\{h[\Gamma_0(t, c)+\Gamma_1(t, \xi, \eta, c)]+B_{22}(t, c)\}p+B_{21}(t, c)\xi+B_{23}(t, c)\vartheta+$$
$$+B_{24}(t, c)\eta+B_{25}(t, c)q+f_2(t, Y, c)+hg_1(t, \xi, p, \eta, c)$$

$$\vartheta^{\bullet}=B_{33}(t, c)\vartheta+f_3(t, Y, c)$$

$$\eta^{\cdot}=q+B_{42}(t,c)p+B_{44}(t,c)\eta+f_4(t,\xi,p,\eta,c)$$

$$q^{\cdot}=-h\Omega(t,c)\eta+B_{51}(t,c)\xi+B_{52}(t,c)p+B_{53}(t,c)\vartheta+$$
$$+B_{55}(t,c)q+f_5(t,Y,c)+hg_2(t,\xi,\eta,c)$$

$$B_{11}(t,c)=\partial\Phi_\xi'(\varphi_\xi)/\partial\xi,\quad \Gamma_0(t,c)=\Gamma(\varphi_\xi,\varphi_\eta)$$

$$\Gamma_1(t,\xi,\eta,c)=\operatorname{diag}\left(\left[\frac{\partial\gamma_i(\varphi_\xi,\varphi_\eta)}{\partial\xi}\xi+\frac{\partial\gamma_i(\varphi_\xi,\varphi_\eta)}{\partial\eta}\eta\right]J\right)_{i=1}^{m}$$

$$B_{33}(t,c)=\partial\Phi_\vartheta(\varphi_\xi,\varphi_\vartheta)/\partial\vartheta,\quad \Omega(t,c)=A_{22}'^{-1}(\varphi_\xi,\varphi_\eta)\partial^2\Pi(\varphi_\xi,\varphi_\eta)/\partial\eta^2$$

$$\varphi_\xi=\varphi_\xi(t,c),\quad \varphi_\eta=\varphi_\eta(t,c),\quad \varphi_\vartheta=\varphi_\vartheta(t,c),\quad Y=(\xi,p,\vartheta,\eta,q)$$

Здесь и далее в п. 2 частные производные $\partial/\partial\xi$, $\partial/\partial\eta$ и $\partial/\partial\vartheta$ вычисляются по старым переменным ξ, η, ϑ. Матрицы $B_{ik}(t,c)$ и функции f_i и g_i определены так, что при $Y\to 0$ равномерно по $c\in[c_1,c_2]$ и $t\in(-\infty,+\infty)$ имеют место оценки

$$f_1=O(R_{\xi p\eta}^2),\quad f_2^\circ=O(1),\quad f_2-f_2^\circ=O(R_Y^2)$$

$$f_3=O(R_{\xi p\eta q}+R_\vartheta^2),\quad f_5=O(R_\xi+R_{p\eta}^2),\quad f_5^\circ=O(1) \tag{2.3}$$

$$f_5-f_5^\circ=O(R_\eta+R_{\xi p\vartheta q}),\quad g_1=O(R_pR_{\xi\eta}^2),\quad g_2=O(R_{\xi\eta}^2)$$

В последних формулах и ниже для сокращения записи используются обозначения $R_{xy\ldots z}=\|x\|+\|y\|+\ldots+\|z\|$, $R_{xy\ldots z}^2=\|x\|^2+\|y\|^2+\ldots+\|z\|^2$, где $x,y,\ldots,z$ — конечномерные векторы, $\|\cdot\|$ — евклидова норма; $R_Y=R_{\xi p\vartheta\eta q}$, $R_Y^2=R_{\xi p\vartheta\eta q}^2$; $f^\circ=f^\circ(t,c,h)\equiv f(t,0,0,\ldots,0,c,h)$, где $f(t,x,y,\ldots,z,c,h)$ — произвольная функция.

Последующие преобразования служат для упрощения линейных членов в системе (2.2). Так как матрицы $A_{22}'(\varphi_\xi,\varphi_\eta)$ и $\partial^2\Pi(\varphi_\xi,\varphi_\eta)/\partial\eta^2$ симметричны и положительно определены, то соответствующие им квадратичные формы можно одновременно привести к каноническому виду. Иными словами, существует невырожденная матрица $S(t,c)$ такая, что

$$S^T(t,c)A_{22}'(\varphi_\xi,\varphi_\eta)S(t,c)=E_{n-2m} \tag{2.4}$$

$$S^T(t,c)\frac{\partial^2\Pi(\varphi_\xi,\varphi_\eta)}{\partial\eta^2}S(t,c)=\operatorname{diag}(\omega_i^2(t,c))_{i=1}^{n-2m}$$

Дополнительно к сформулированным выше условиям 1—6° введем условие:

7°. $S(t,c)$ и $\omega_i(t,c)$ $(i=1,2,\ldots,n-2m)$ — достаточно гладкие $T(c)$ — периодические функции в области $\{(t,c): -\infty<t<+\infty,\ c_1\leqslant c\leqslant c_2\}$, причем в этой области $0<\omega_1(t,c)<\omega_2(t,c)<\ldots<\omega_{n-2m}(t,c)$.

Сделав в (2.2) замену переменных $q\to S(t,c)q$, $\eta\to S(t,c)\eta$, получим систему вида (2.2), (2.3), в которой матрица $\Omega(t,c)$ совпадает с правой частью второй формулы (2.4).

Первый интеграл (1.2) в новых переменных можно представить в виде

$$\Pi(\varphi_\xi+\xi,\ \varphi_\eta+S(t,c)\eta)+h^{-1}\Pi_1(t,Y,c)=\mathrm{const} \tag{2.5}$$

где $\Pi_1(t+T(c),Y,c)=\Pi_1(t,Y,c)$. Поскольку выражение (2.5) — первый интеграл системы (2.2), его полная производная по времени в силу (2.2) тождественно равна нулю. Положив в этом тождестве и его первых частных производных по p и η $Y=0$ и выделив в получившихся соотношениях главные члены при $h\to+\infty$, найдем необходимые для дальнейшего равенства

$$\frac{\partial\Pi_1(t,0,c)}{\partial t}+\frac{\partial\Pi_1(t,0,c)}{\partial p}f_2^\circ(t,c)+\frac{\partial\Pi_1(t,0,c)}{\partial q}f_5^\circ(t,c)=0$$

$$\frac{\partial\Pi(\varphi_\xi,\varphi_\eta)}{\partial\xi}B_{12}(t,c)+\frac{\partial\Pi_1(t,0,c)}{\partial p}\Gamma_0(t,c)=0, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\Pi(\varphi_\xi,\varphi_\eta)}{\partial\xi}B_{14}(t,c)-\frac{\partial\Pi_1(t,0,c)}{\partial q}\Omega(t,c)=0$$

Следующее преобразование состоит в линейной замене переменных

$$\xi-h^{-1}(B_{12}\Gamma_0^{-1}p-B_{14}\Omega^{-1}q)\to\xi$$

$$p+h^{-1}\Gamma_0^{-1}[B_{21}\xi+R_{23}\vartheta+(B_{24}-\Gamma_0^{-1}B_{25}\Omega)\eta+B_{25}q]\to p$$

$$\eta-h^{-1}[B_{42}\Gamma_0^{-1}p+\Omega^{-1}(B_{51}\xi+B_{53}\vartheta)]\to\eta$$

$$q+h^{-1}(\Omega B_{42}\Gamma_0^{-1}-B_{52})\Gamma_0^{-1}p\to q$$

переводящей систему (2.2) в систему

$$\xi^\cdot=B_{11}(t,c)\xi+h^{-1}f_0(t,c)+f_1'(t,Y,c,h) \tag{2.7}$$

$$p^\cdot=\{h[\Gamma_0(t,c)+\Gamma_1(t,\xi,\eta,c)]+B_{22}(t,c)\}p+$$
$$+f_2'(t,Y,c,h)+hg_1(t,\xi,p,\eta,c)$$

$$\vartheta^\cdot=B_{33}(t,c)\vartheta+f_3'(t,Y,c,h)$$

$$\eta^\cdot=q+B_{44}(t,c)\eta+f_4'(t,Y,c,h)$$

$$q^\cdot=-h\Omega(t,c)\eta+B_{55}(t,c)q+f_5'(t,Y,c,h)+hg_2(t,\xi,\eta,c)$$

$$f_0(t,c)=-B_{12}(t,c)\Gamma_0^{-1}(t,c)f_2^\circ(t,c)+B_{14}(t,c)\Omega^{-1}(t,c)f_5^\circ(t,c)$$

При $Y\to0$, $h\to+\infty$ равномерно по $c\in[c_1,c_2]$ и $t\in(-\infty,+\infty)$ имеют место оценки

$$f_1'=O(h^{-1}R_Y+R_{\xi p\eta}^2),\qquad f_2'^\circ=O(1),\qquad f_2'-f_2'^\circ=O(h^{-1}R_Y+R_Y^2)$$

$$f_3'=O(R_{\xi p\eta q}+h^{-1}R_\vartheta+R_\vartheta^2),\qquad f_4'=O(R_\xi+h^{-1}R_{p\vartheta\eta q}+R_{p\eta}^2)$$

$$f_5'^\circ=O(1),\qquad f_5'-f_5'^\circ=O(R_\eta+h^{-1}R_{\xi p\vartheta q}+R_{\xi p\vartheta q}^2)$$

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\xi^\cdot=B_{11}(t,c)\xi+f_0(t,c) \tag{2.8}$$

Как известно, эта система имеет $T(c)$-периодическое решение в том и только в том случае, когда для любого $T(c)$-периодического решения $\psi(t)$ сопряженной системы

$$\psi^\cdot+\psi B_{11}(t,c)=0,\qquad \psi^T\in R^{2m} \tag{2.9}$$

выполнено равенство

$$\int_0^{T(c)}\psi(t)f_0(t,c)\,dt=0$$

Так как по условию 2° п. 1 система $\xi^\cdot=B_{11}(t,c)\xi$ имеет единственное нетривиальное $T(c)$-периодическое решение $\xi=\varphi_\xi^{\cdot}(t,c)$ (эта система является системой уравнений в вариациях для решения $\xi=\varphi_\xi(t,c)$ первого уравнения системы (1.6)), то система (2.9) также имеет единственное нетривиальное $T(c)$-периодическое решение. Согласно [5] и условию 3° это решение можно взять в виде (ср. (1.8)) $\psi=\psi_0(t,c)$. Используя соотношения (2.6) и формулы для функций $f_0(t,c)$, $\psi_0(t,c)$, находим

$$\int_0^{T(c)}\psi_0(t,c)f_0(t,c)\,dt=-\int_0^{T(c)}\frac{\partial\Pi_1(t,0,c)}{\partial t}dt=0$$

Следовательно, $T(c)$-периодическое решение системы (2.8) существует. Обозначим это решение через $\xi_0(t,c)$. Оно определено с точностью до слагаемого, пропорционального $\varphi_\xi^{\cdot}(t,c)$. Для фиксации $\xi_0(t,c)$ потребуем выполнения условия

$$\int_0^{T(c)}[\varphi_\xi^{\cdot}(t,c)]^T\xi_0(t,c)\,dt=0$$

Способ построения решения $\xi_0(t,c)$ будет указан ниже. Заметим только, что оно является гладкой функцией c.

В системе (2.7) сделаем замену

$$\xi\to\xi+h^{-1}\xi_0(t,c),\quad \eta\to\eta+h^{-1}\eta_0(t,c),\qquad(2.10)$$
$$\eta_0(t,c)=\Omega^{-1}(t,c)f_5'^{\circ}(t,c)$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
&\xi^{\cdot}=B_{11}(t,c)\xi+f_1''(t,Y,c,h)\\
&p^{\cdot}=[h\Gamma_0(t,c)+B_{22}'(t,c)]p+f_2''(t,Y,c,h)+hg_1'(t,\xi,p,\eta,c)\qquad(2.11)\\
&\vartheta^{\cdot}=B_{33}(t,c)\vartheta+f_3''(t,Y,c,h)\\
&\eta^{\cdot}=q+B_{44}(t,c)\eta+f_4''(t,Y,c,h)\\
&q^{\cdot}=-h\Omega(t,c)\eta+B_{55}(t,c)q+f_5''(t,Y,c,h)+hg_2(t,\xi,\eta,c)
\end{aligned}$$

Здесь $B_{22}'(t,c)=B_{22}(t,c)+\Gamma_1(t,\xi_0(t,c),\eta_0(t,c),c)$, функции f_i'' ($i=1,2,\ldots,5$) при Y, $h^{-1}\to 0$ равномерно по $c\in[c_1,c_2]$ и $t\in(-\infty,+\infty)$ удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned}
&f_1''^{\circ}=O(h^{-2}),\quad f_1''-f_1''^{\circ}=O(h^{-1}R_Y+R_{\xi p\eta}^2)\\
&f_2''^{\circ}=O(1),\quad f_2''-f_2''^{\circ}=O(h^{-1}R_Y+R_Y^2),\quad g_1'=O(R_pR_{\xi\eta})\\
&f_3''^{\circ}=O(h^{-1}),\quad f_3''-f_3''^{\circ}=O(R_{\xi p\eta q}+h^{-1}R_\vartheta+R_\vartheta^2)\\
&f_4''^{\circ}=O(h^{-1}),\quad f_4''-f_4''^{\circ}=O(R_\xi+h^{-1}R_{p\vartheta\eta q}+R_{p\eta}^2)\\
&f_5''^{\circ}=O(h^{-1}),\quad f_5''-f_5''^{\circ}=O(R_\eta+h^{-1}R_{\xi p\vartheta q}+R_{\xi p\vartheta q}^2)
\end{aligned}$$

Следующие преобразования служат для упрощения в системе (2.11) членов $B_{22}'(t,c)p$, $B_{44}(t,c)\eta$ и $B_{55}(t,c)q$. Сделаем в этой системе замену переменных $[E_{2m}+h^{-1}Q(t,c)]p\to p$, $\eta+h^{-1}D(t,c)q\to\eta$, $q+W(t,c)\eta\to q$ с $T(c)$-периодическими матрицами $Q(t,c)$, $D(t,c)$ и $W(t,c)$, явный вид которых будет определен ниже. В результате такой замены (2.11) перейдет в систему

$$\xi^{\cdot}=B_{11}(t,c)\xi+\Psi_1(t,Y,c,h)\qquad(2.12)$$
$$p^{\cdot}=[h\Gamma_0(t,c)+B_{22}''(t,c)]p+\Psi_2(t,Y,c,h)$$

$$\vartheta^{\cdot}=B_{33}(t,c)\vartheta+\Psi_3(t,Y,c,h),$$
$$\eta^{\cdot}=q+B_{44}'(t,c)\eta+\Psi_4(t,Y,c,h)$$
$$q^{\cdot}=-h\Omega(t,c)\eta+B_{55}'(t,c)q+\Psi_5(t,Y,c,h)$$
$$B_{22}''(t,c)=B_{22}'(t,c)+Q(t,c)\Gamma_0(t,c)-\Gamma_0(t,c)Q(t,c) \qquad (2.13)$$
$$B_{44}'(t,c)=B_{44}(t,c)-W(t,c)-D(t,c)\Omega(t,c)$$
$$B_{55}'(t,c)=B_{55}(t,c)+W(t,c)+\Omega(t,c)D(t,c)$$

а для функций Ψ_1, $\Psi_2-hg_1'(t,\xi,p,\eta,c)$, Ψ_3, Ψ_4, $\Psi_5-hg_2(t,\xi,\eta,c)$ при $Y,h^{-1}\to 0$ справедливы те же оценки, что и для функций f_i'' $(i=1,\ldots,5)$ в системе (2.11).

Опишем построение матриц Q, D, W. Начнем с Q. Матрицы Q, B_{22}' и B_{22}'' представим в блочной форме с размером блоков 2×2: $Q=(Q_{ij})$, $B_{22}'=(L_{ij})$, $B_{22}''=(M_{ij})$ $(i,j=1,\ldots,m)$. Тогда первое соотношение (2.13) можно записать в виде совокупности соотношений

$$M_{ij}=L_{ij}+\gamma_j^\circ Q_{ij}J-\gamma_i^\circ JQ_{ij}, \quad \gamma_i^\circ=\gamma_i(\varphi_\xi,\varphi_\eta)$$

Непосредственная проверка с учетом условия 6° из этого пункта показывает, что можно взять

$$Q_{ij}=(\gamma_j^{\circ 2}-\gamma_i^{\circ 2})^{-1}(\gamma_i^\circ JL_{ij}+\gamma_j^\circ L_{ij}J), \quad M_{ij}=0 \quad (i\neq j)$$
$$Q_{ii}=\frac{1}{4\gamma_i^\circ}(L_{ii}J-JL_{ii}), \qquad M_{ii}=\frac{1}{2}(L_{ii}-JL_{ii}J)=\mu_iE_2+\nu_iJ$$
$$\mu_i=\mu_i(t,c)={}^1/_2\operatorname{tr}L_{ii}, \quad \nu_i=\nu_i(t,c)=-{}^1/_2\operatorname{tr}JL_{ii}$$

Заданные этими формулами матрицы $Q(t,c)$ и $B_{22}'(t,c)$ являются $T(c)$-периодическими по t. Перейдем к построению матриц D, W, B_{44}' и B_{55}'. Складывая второе и третье соотношения (2.13), получим $B_{44}'+B_{55}'=B_{44}+B_{55}+\Omega D-D\Omega$. С помощью обозначений $D=(d_{ij})$, $B_{44}=(l_{ij})$, $B_{44}'=(l_{ij}')$, $B_{55}=(m_{ij})$, $B_{55}'=(m_{ij}')$ $(i,j=1,\ldots,n-2m)$ последнее уравнение можно записать так: $l_{ij}'+m_{ij}'=l_{ij}+m_{ij}+(\omega_i^2-\omega_j^2)d_{ij}$. Выписанные соотношения удовлетворяются, если

$$d_{ij}=(\omega_j^2-\omega_i^2)^{-1}(l_{ij}+m_{ij}), \quad l_{ij}'=m_{ij}'=0 \quad (i\neq j)$$
$$d_{ii}=0, \quad l_{ii}'={}^1/_2(l_{ii}+m_{ii}-\omega_i^{\cdot}/\omega_i), \quad m_{ii}'={}^1/_2(l_{ii}+m_{ii}+\omega_i^{\cdot}/\omega_i)$$

Построенные таким способом матрицы D, B_{44}' и B_{55}' — периодические по t с периодом $T(c)$. Матрица W находится по формулам (ср. (2.13) $W=B_{44}-B_{44}'-D\Omega=B_{55}'-B_{55}-\Omega D$ и также является $T(c)$-периодической.

Введем обозначения

$$a_i(c)=\frac{1}{2}\int_0^{T(c)}\mu_i(t,c)\,dt, \quad b_i(c)=\frac{1}{2}\int_0^{T(c)}\gamma_i^\circ(t,c)\,dt, \quad d_i(c)=\frac{1}{2}\int_0^{T(c)}\nu_i(t,c)\,dt$$
$$\Delta_i(c,h)=\operatorname{sh}^2 a_i(c)+\sin^2[hb_i(c)+d_i(c)] \quad (i=1,\ldots,m)$$
$$a_j'(c)=\frac{1}{2}\int_0^{T(c)}l_{jj}'(t,c)\,dt, \qquad b_j'(c)=\frac{1}{2}\int_0^{T(c)}\omega_j(t,c)\,dt$$

$\Delta_j'(c,h)=\operatorname{sh}^2a_j'(c)+\sin^2\sqrt{h}b_j'(c)$ $(j=1,\ldots,n-2m)$ и рассмотрим множество $I(\varepsilon)=\{(c,h): c_1\leqslant c\leqslant c_2,\ h\geqslant 0,\ \Delta_i(c,h)\geqslant\varepsilon\ (i=1,\ldots,m),\ \Delta_j'(c,h)\geqslant$

$\geqslant \varepsilon$ $(j=1,\ldots,n-2m)\}$, где ε — произвольное число из интервала $(0, 1)$. Это множество не ограничено.

Теорема. При сделанных предположениях для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существуют такие положительные числа H и C_i $(i=1,\ldots,4)$, что при $(c, h) \in I(\varepsilon)$, $h \geqslant H$ система (2.12) имеет единственное $T(c)$-периодическое решение $\xi_*(t, c, h)$, $p_*(t, c, h)$, $\vartheta_*(t, c, h)$, $\eta_*(t, c, h)$, $q_*(t, c, h)$, удовлетворяющее условиям

$$\|\xi_*(t, c, h)\| \leqslant C_1 h^{-2}, \quad \|p_*(t, c, h)\| \leqslant C_2 h^{-1}, \quad \|\vartheta_*(t, c, h)\| \leqslant C_3 h^{-1}$$

$$\|\eta_*(t, c, h)\| \leqslant C_4 h^{-3/2}, \quad \|q_*(t, c, h)\| \leqslant C_4 h^{-1} \quad (0 \leqslant t \leqslant T(c)) \tag{2.14}$$

$$\int_0^{T(c)} [\varphi_\xi^{\cdot}(t, c)]^T \xi_*(t, c, h)\, dt = 0$$

Замечания. 1°. Последнее условие (2.14) служит для фиксации произвольного сдвига времени, допускаемого в решениях автономных систем.

2°. Условие $(c, h) \in I(\varepsilon)$ исключает из анализа периодических решений системы (2.12) резонансы между медленными (с частотой $2\pi/T(c)$) и быстрыми (с частотами $\sim h$, $h^{-1/2}$) колебаниями. Такие резонансы могут возникнуть при значениях c и h, определяемых уравнениями $a_i(c)=0$, $\sin[hb_i(c)+d_i(c)]=0$, где i — любое из чисел $1,\ldots,m$, или уравнениями $a_j'(c)=0$, $\sin\sqrt{h}b_j'(c)=0$, где j — любое из чисел $1,\ldots,n-2m$.

3°. Упоминаемому в теореме периодическому решению системы (2.12) отвечает искомое $T(c)$-периодическое решение системы (1.4), (1.5) (см. п. 1). Формулировка теоремы о периодических решениях в терминах системы (1.4), (1.5) включала бы много на первый взгляд немотивированных условий и была громоздкой, поэтому выше приведена формулировка в терминах преобразований системы (2.12).

3. Доказательство теоремы. Сначала приведем ряд вспомогательных соотношений.

3.1. Введем обозначения $\|Y\| = \max(\|\xi\|, \|p\|, \|\vartheta\|, \|\eta\|, \|q\|)$, $L_i^\circ = \|\Psi_i(t, Y, c, h) - \Psi_i^\circ(t, c, h)\|$, $L_i = \|\Psi_i(t, Y, c, h) - \Psi_i(t, Y', c, h)\|$ $(i=1,\ldots,5)$. В силу оценок функций Ψ_i при Y, $h^{-1} \to 0$, указанных в п. 2, существуют такие положительные числа K, δ и H_1, что при всех t, c, h, Y, Y', удовлетворяющих условиям $t \in (-\infty, +\infty)$, $c \in [c_1, c_2]$, $h \geqslant H_1$, $\|Y\| \leqslant \delta$, $\|Y'\| \leqslant \delta$ имеем

$$\|\Psi_1^\circ(t, c, h)\| \leqslant Kh^{-2}, \quad \|d^m \Psi_2^\circ(t, c, h)/dt^m\| \leqslant K \tag{3.1}$$

$$\|\Psi_3^\circ(t, c, h)\| \leqslant Kh^{-1}, \quad \|d^m \Psi_4^\circ(t, c, h)/dt^m\| Kh^{-1}$$

$$\|d^m \Psi_5^\circ(t, c, h)/dt^m\| \leqslant Kh^{-1} \quad (m=0, 1)$$

$$L_1^\circ \leqslant K(h^{-1}R_Y + R_{\xi p \eta}), \quad L_2^\circ \leqslant K(h^{-1}R_Y + R_Y^2 + hR_p R_{\xi\eta})$$

$$L_3^\circ \leqslant K(R_{\xi p \eta q} + h^{-1}R_\vartheta + R_\vartheta^2), \quad L_4^\circ \leqslant K(R_\xi + h^{-1}R_{p\vartheta\eta q} + R_{p\eta}^2) \tag{3.2}$$

$$L_5^\circ \leqslant K(R_\eta + h^{-1}R_{\xi p\vartheta q} + R_{\xi p\vartheta q}^2 + hR_{\xi\eta}^2)$$

$$L_1 \leqslant K[h^{-1}(\Delta_\vartheta + \Delta_q) + (h^{-1} + R_{\xi\xi' pp' \eta\eta'})(\Delta_\xi + \Delta_p + \Delta_\eta)]$$

$$L_2 \leqslant K[\alpha(\Delta_\vartheta + \Delta_q) + (\alpha + hR_{pp'})(\Delta_\xi + \Delta_\eta) + (\alpha + hR_{\xi\xi'\eta\eta'})\Delta_p]$$

$$L_3 \leqslant K(\Delta_\xi + \Delta_p + \Delta_\eta + \Delta_q + \alpha\Delta_\vartheta) \tag{3.3}$$

$$L_4 \leqslant K[\Delta_\xi + \alpha(\Delta_p + \Delta_\vartheta + \Delta_\eta + \Delta_q)]$$

$$L_5 \leqslant K[\Delta_\eta + \alpha(\Delta_p + \Delta_\vartheta + \Delta_q) + (\alpha + hR_{\xi\xi'\eta\eta'})(\Delta_\xi + \Delta_\eta)]$$

$$\alpha=h^{-1}+R_Y+R_{Y'},\quad \Delta_\xi=\|\xi-\xi'\|,\quad \Delta_p=\|p-p'\|$$

$$\Delta_\vartheta=\|\vartheta-\vartheta'\|,\quad \Delta_\eta=\|\eta-\eta'\|,\quad \Delta_q=\|q-q'\|$$

В результате преобразований, описанных в п. 2, первый интеграл (2.5) перейдет в первый интеграл системы (2.12):

$$V(t,Y,c,h)\equiv\psi_0(t,c)\xi+V_1(t,Y,c,h)=\text{const} \tag{3.4}$$

Здесь функция $\psi_0(t,c)$ определена формулой (1.8) и, не ограничивая общности, можно считать, что при $t\in(-\infty,+\infty)$, $c\in[c_1,c_2]$, $h\geqslant H_1$, $\|Y\|\leqslant\leqslant\delta$ справедливо неравенство

$$\|\partial V_1(t,Y,c,h)/\partial\xi\|\leqslant K(h^{-1}+R_{\xi\eta}) \tag{3.5}$$

3.2. Построим $T(c)$-периодические решения линейных неоднородных уравнений (ср. (2.12)):

$$\xi^\cdot=B_{11}(t,c)\xi+\Psi_\xi(t) \tag{3.6}$$

$$p^\cdot=[h\Gamma_0(t,c)+B_{22}''(t,c)]p+\Psi_p(t),\quad \vartheta^\cdot=B_{33}(t,c)\vartheta+\Psi_\vartheta(t)$$

$$\eta^\cdot=q+B_{44}'(t,c)\eta+\Psi_\eta(t),\quad q^\cdot=-h\Omega(t,c)\eta+B_{55}'(t,c)q+\Psi_q(t)$$

с $T(c)$-периодическими свободными членами. Воспользуемся аппаратом функций Грина. Поскольку первое уравнение (3.6) имеет при $\Psi_\xi((t)\equiv0$ нетривиальное $T(c)$-периодическое решение $\xi=\varphi_\xi^\cdot(t,c)$, в случае этого уравнения следует применить обобщенную функцию Грина [5, 6]. Эта функция, обозначим ее $G_1(t,s,c)$ $(0\leqslant t,\ s\leqslant T(c),\ c_1\leqslant c\leqslant c_2)$, единственным образом определяется тем, что выражение

$$\xi(t)=\int_0^{T(c)}G_1(t,s,c)\Psi_\xi(s)ds \tag{3.7}$$

при любом выборе $\Psi_\xi(t)$ удовлетворяет краевому условию $\xi(0)=\xi(T(c))$ и соотношениям

$$\xi^\cdot=B_{11}(t,c)\xi+\Psi_\xi(t)-w\psi_0^T(t),\qquad w=M\int_0^{T(c)}\psi_0(t,c)\Psi_\xi(t)dt$$

$$M=\left(\int_0^{T(c)}\|\psi_0(t,c)\|^2dt\right)^{-1},\qquad \int_0^{T(c)}[\varphi_\xi^\cdot(t,c)]^T\xi(t)dt=0$$

Если $w=0$, то (3.7) — искомое решение первого уравнения (3.6). В частности, с помощью формулы (3.7) можно выразить функцию $\xi_0(t,c)$, использованную в замене переменных (2.10).

Нормой векторной функции $f(t)$, непрерывной на отрезке $0\leqslant t\leqslant T(c)$, будем называть число $\nu(f)=\max\|f(t)\|$ $(0\leqslant t\leqslant T(c))$. Для нормы выражения (3.7) при любом $c\in[c_1,c_2]$ имеет место оценка (N_1 — положительное число):

$$\nu(\xi)\leqslant N_1\nu(\Psi_\xi) \tag{3.8}$$

Функция Грина для второго и третьего уравнений (3.6), а также для системы, образованной четвертым и пятым уравнениями, обозначим соответственно $G_2(t,s,c,h)$, $G_3(t,s,c)$ и $\|G_{ij}(t,s,c,h)\|_{i,j=1}^5$ $(0\leqslant t,\ s\leqslant T(c))$. Существование G_3 следует из условия 2 п. 1. а G_2 и G_{ij} могут быть выписаны явно в силу специального вида матриц Γ_0, B_{22}'' и Ω, B_{44}', B_{55}', причем

$$G_2(t,s,c,h)=\operatorname{diag}[G_2^{(k)}(t,s,c,h)/\Delta_k(c,h)]_{k=1}^m$$

$$G_{ij}(t,s,c,h)=h^{(i-j)/2}\operatorname{diag}[g_{ij}^{(k)}(t,s,c,h)/\Delta_k'(c,h)]_{k=1}^{n-2m}$$

где $g_{ij}^{(k)}$ и элементы 2×2 — матриц $G_2^{(h)}$ суть ограниченные кусочно гладкие функции. С помощью перечисленных фактов устанавливается существование таких положительных чисел H_2, N_2, N_3 и N_4, что при $(c,h)\in I(\varepsilon)$, $h\geqslant H_2$ для $T(c)$-периодических решений второго — пятого уравнений (3.6) справедливы оценки

$$\nu(p)\leqslant\frac{N_2}{\varepsilon}\nu(\Psi_p),\qquad \nu(\vartheta)\leqslant N_3\nu(\Psi_\vartheta)$$
$$\nu(\eta)\leqslant X,\qquad \nu(q)\leqslant h^{1/2}X,\qquad X=\frac{N_4}{\varepsilon}[\nu(\Psi_\eta)+h^{-1/2}\nu(\Psi_q)] \tag{3.9}$$

Если функции $\Psi_p(t)$ и $\Psi_\eta(t)$ имеют непрерывные производные, то сделав в (3.6) замены переменных $p+h^{-1}\Gamma_0^{-1}\Psi_p\to p$, $q+\Psi_\eta\to q$ и применив к преобразованным уравнениям оценки (3.9), получим

$$\nu(p)\leqslant\frac{N^2}{h}\left[\nu(\Psi_p)+\frac{\nu(\Psi_p)+\nu(\Psi_p^{\boldsymbol{\cdot}})}{\varepsilon}\right]$$
$$\nu(\eta)\leqslant X_1,\qquad \nu(q)\leqslant h^{1/2}X_1,\qquad X_1=\frac{N_4}{\varepsilon h^{1/2}}[\nu(\Psi_\eta)+\nu(\Psi_\eta^{\boldsymbol{\cdot}})+\nu(\Psi_q)] \tag{3.10}$$

При этом, возможно, придется несколько увеличить постоянные H_2, N_2 и N_4. Ниже предполагается, что $(c,h)\in I(\varepsilon)$ и неравенства (3.9) и (3.10) используются без дополнительных оговорок относительно выбора h.

3.3. Отыскание $T(c)$-периодических решений системы (2.12) эквивалентно решению для этой системы периодической краевой задачи на отрезке $0\leqslant t\leqslant T(c)$. Чтобы решить такую задачу, рассмотрим систему интегральных уравнений

$$y_i(t)=\int_0^T G_i(t,s)\Psi_i(s,Y(s))\,ds\equiv L_i^{\wedge}(Y)\qquad (i=1,2,3)$$
$$y_i(t)=\sum_{j=4}^{5}\int_0^T G_{ij}(t,s)\Psi_j(s,Y(s))\,ds\equiv L_i^{\wedge}(Y)\qquad (i=4,5) \tag{3.11}$$

Здесь и далее для сокращения записи используются обозначения $y_1=\xi$, $y_2=p$, $y_3=\vartheta$, $y_4=\eta$, $y_5=q$, $Y=(y_1,\ldots,y_5)$ и в списке аргументов рассматриваемых функций не указываются c и h. Уравнения (3.11) будем решать методом последовательных приближений. На отрезке $0\leqslant t\leqslant T$ построим последовательности функций $Y_k(t)=(y_1^{(k)}(t),\ldots,y_5^{(k)}(t))$, положив

$$Y_0(t)\equiv0,\qquad Y_{k+1}=(L_1^{\wedge}(Y_k),\ldots,L_5^{\wedge}(Y_k)),\qquad k=0,1,2,\ldots \tag{3.12}$$

Докажем, что при достаточно большом h эта последовательность сходится к решению системы (3.11). Сначала докажем, что при достаточно большом h числовые последовательности $a_j^{(k)}=\nu(y_j^{(k)})$ $(j=1,\ldots,5)$ допускают оценки

$$a_1^{(k)}\leqslant C_1h^{-2}\leqslant\delta,\qquad a_2^{(k)}\leqslant C_2h^{-1}\leqslant\delta,\qquad a_3^{(k)}\leqslant C_3h^{-1}\leqslant\delta$$
$$a_4^{(k)}\leqslant C_4h^{-3/2}\leqslant\delta,\qquad a_5^{(k)}\leqslant C_4h^{-1}\leqslant\delta\qquad (k=0,1,\ldots) \tag{3.13}$$

где $C_2, \dots, C_4$ — некоторые положительные числа. При $k>1$ соотношения (3.12) можно представить в виде

$$\begin{gathered}
y_i^{(k+1)}(t)=y_i^{(1)}(t)+\int_0^T G_i(t,s)\,[\Psi_i(s,Y_k(s))-\Psi_i^\circ(s)]\,ds \\
y_i^{(1)}(t)=\int_0^T G_i(t,s)\Psi_i^\circ(s)\,ds \qquad (i=1,2,3) \\
y_i^{(k+1)}(t)=y_i^{(1)}(t)+\sum_{j=4}^{5}\int_0^T G_{ij}(t,s)\,[\Psi_j(s,Y_k(s))-\Psi_j^\circ(s)]\,ds \\
y_i^{(1)}(t)=\sum_{j=4}^{5}\int_0^T G_{ij}(t,s)\Psi_j^\circ(s)\,ds \qquad (i=4,5)
\end{gathered} \tag{3.14}$$

Предположим, что $a_j^{(k)}\leqslant\delta$ ($j=1,\dots,5$; $k=0,1,\dots$). Тогда в силу неравенств (3.2), (3.8) и (3.9) будем иметь

$$a_j^{(k+1)}\leqslant a_j^{(1)}+\Phi_j(a_1^{(k)},\dots,a_5^{(k)}) \qquad (j=1,\dots,5) \tag{3.15}$$

Функции Φ_j совпадают по существу с правыми частями неравенств (3.2) и представляют собой многочлены второй степени без свободного члена. Например, $\Phi_1(a_1,\dots,a_5)=KN_1[h^{-1}(a_1+\dots+a_5)+a_1^2+a_2^2+a_4^2]$.

Применив к выражениям (3.14) для $y_i^{(1)}$ оценки (3.1) и (3.8)–(3.10), получим

$$a_1^{(1)}\leqslant D_1h^{-2},\quad a_2^{(1)}\leqslant D_2h^{-1},\quad a_3^{(1)}\leqslant D_3h^{-1},\quad a_4^{(1)}\leqslant D_4h^{-5/2}$$

$$a_5^{(1)}\leqslant D_4h^{-1},\quad D_1=KN_1,\quad D_2=KN_2(1+2/\varepsilon),\quad D_3=KN_3,\quad D_4=3KN_4/\varepsilon$$

Выберем числа $C_1,\dots,C_4$ и H_3 из условий

$$\begin{gathered}
C_2>D_2,\quad C_4>D_4,\quad C_3>D_3^*=D_3+KN_3(C_2+2C_4) \\
C_1>D_1^*=D_1+KN_1(C_2+C_3+2C_4+C_2^2+C_4^2) \\
H_3=\max\{1, H_1, H_2, \sqrt{C_1}/\delta, C_2/\delta, C_3/\delta, C_4/\delta, (C_4/\delta)^{2/5}, \\
\frac{\varkappa}{C_1-D_1^*}, \left(\frac{\varkappa}{C_2-D_2}\right)^2, \frac{\varkappa}{C_3-D_3^*}, \left(\frac{\varkappa}{C_4-D_4}\right)^2\} \\
\varkappa=4K(C_1+C_2+C_3+2C_4+1)\max(N_1, N_2/\varepsilon, N_3, N_4/\varepsilon)
\end{gathered}$$

Тогда если при $h\geqslant H_3$ и некотором k неравенства (3.13) выполнены, то в силу неравенства (3.15) для $i=1$ будем иметь

$$\begin{aligned}
a_1^{(k+1)} &\leqslant \frac{D_1+KN_1(C_2+C_3+C_4+C_2^2)}{h^2}+KN_1\left(\frac{C_4}{h^{5/2}}+\frac{C_1+C_4^2}{h^3}+\frac{C_1^2}{h^4}\right)\leqslant \\
&\leqslant \frac{D_1^*}{h^2}+\frac{KN_1(C_1+C_1^2)}{h^3}\leqslant \frac{D_1^*}{h^2}+\frac{\varkappa}{h^3}\leqslant\frac{C_1}{h^2}\leqslant\delta
\end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается индуктивный переход $k\to k+1$ в остальных неравенствах (3.13). Поскольку при $k=1$ неравенства (3.13) выполнены, отсюда следует их справедливость при всех k.

Докажем сходимость итераций (3.12). Рассмотрим последовательности $b_i^{(k)}=\nu(y_i^{(k)}-y_i^{(k-1)})$ $(i=1,\ldots,5;\ k=1,2,\ldots)$. С помощью оценок (3.3), (3.8), (3.9) и (3.13) можно установить неравенства

$$
\begin{aligned}
b_1^{(k+1)} &\leqslant \varkappa h^{-1}(b_1^{(k)}+b_2^{(k)}+b_3^{(k)}+b_4^{(k)}+b_5^{(k)})\\
b_2^{(k+1)} &\leqslant \varkappa[b_1^{(k)}+b_4^{(k)}+h^{-1/2}b_2^{(k)}+h^{-1}(b_3^{(k)}+b_5^{(k)})]\\
b_3^{(k+1)} &\leqslant \varkappa(b_1^{(k)}+b_2^{(k)}+b_4^{(k)}+b_5^{(k)}+h^{-1}b_3^{(k)})\\
b_4^{(k+1)} &\leqslant \varkappa[b_1^{(k)}+h^{-1/2}b_4^{(k)}+h^{-1}(b_2^{(k)}+b_3^{(k)}+b_5^{(k)})]\\
b_5^{(k+1)} &\leqslant \varkappa h^{1/2}[b_1^{(k)}+h^{-1/2}b_4^{(k)}+h^{-1}(b_2^{(k)}+b_3^{(k)}+b_5^{(k)})]
\end{aligned}
$$

В силу этих неравенств элементы последовательности $z_k=b_1^{(k)}+h^{-1/2}b_2^{(k)}+h^{-1/8}b_3^{(k)}+h^{-1/8}b_4^{(k)}+h^{-5/8}b_5^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots)$ связаны условием $z_{k+1}\leqslant 5\varkappa h^{-1/8}z_k$. Введем множество $I_h=\{(c,\ h)\colon (c,\ h)\in I(\varepsilon),\ h\geqslant H_4\}$, $H_4=\max(H_3,\ (10\varkappa)^8)$. При $(c,h)\in I_h$ имеем $z_{k+1}\leqslant {}^1/_2 z_k$ $(k=1,2,\ldots)$. Используя эту оценку, можно доказать, что итерации (3.12) сходятся равномерно на множестве $[0,T(c)]\times I_h$ к некоторой непрерывной функции $Y_*(t)=(\xi_*(t),p_*(t),\vartheta_*(t),\ \eta_*(t),\ q_*(t))$, удовлетворяющей условиям (2.14) и $Y_*(0)=Y_*(T)$. Переходя в соотношениях (3.12) к пределу при $k\to\infty$, находим, что $Y_*(t)$ — решение системы (3.11), причем эта функция непрерывно дифференцируема по t. Компоненты $Y_*(t)$ удовлетворяют последним четырем уравнениям (2.12) и соотношениям

$$
\xi_*^{\cdot}=B_{11}(t)\xi_*+\Psi_1(t,Y_*(t))-w_*\psi_0^T(t)
$$

$$
w_*=M\int_0^T\psi_0(t)\Psi_1(t,Y_*(t))\,dt
$$

Докажем равенство $w_*=0$, означающее, что Y_* — искомое решение системы (2.12). Воспользуемся приемом [5] и рассмотрим T-периодическую функцию (ср. (3.4)) $V_*(t)=V(t,Y_*(t))$. Она удовлетворяет соотношениям

$$
0=\int_0^T V_*^{\cdot}(t)\,dt=\int_0^T V'(t,Y_*(t))\,dt-w_*\int_0^T\left.\frac{\partial V}{\partial\xi}\right|_{Y=Y_*(t)}\psi_0^T(t)\,dt \qquad (3.16)
$$

где $V'(t,Y)$ — полная производная функции $V(t,Y)$ по t в силу системы (2.12). Поскольку $V(t,Y)$ — первый интеграл этой системы, $V'(t,Y)\equiv 0$. Согласно (2.14), (3.4) и (3.5) при $(c,h)\in I_h$ выполняется неравенство $\nu[\partial V(t,Y_*(t))/\partial\xi-\psi_0(t)]\leqslant K(1+C_1+C_2)h^{-1}$. Следовательно, существует такое число $H\geqslant H_4$, что при $(c,h)\in I(\varepsilon)$, $h\geqslant H$ последний интеграл в (3.16) отличен от нуля. Для указанных значений c и h имеем $w_*=0$. Теорема доказана.

4. Заключение. Примерами механической системы с функцией Лагранжа (1.1) могут служить гиростаты с большим собственным кинетическим моментом, испытывающие влияние сильных консервативных внешних моментов. Один такой пример рассмотрен в [7], где исследованы периодические колебания спутника-гиростата под действием гравитационного и сильного восстанавливающего аэродинамического моментов на круговой орбите. Статья [7] содержит результаты численного построения периодических колебаний и аналитическое доказательство их существования, которое по существу является простым частным случаем доказательства, приведенного выше.

Результаты данной работы переносятся на случай потенциальной, но не консервативной механической системы с периодической зависимостью действующих в ней обобщенных сил от времени [3]. При этом рассматриваются изолированные периодические решения и доказательство их существования несколько упрощается. Пример такой системы приведен в [8], где исследованы периодические колебания спутника-гиростата под действием гравитационного и сильного восстанавливающего магнитного моментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сазонов В. В.* Периодические решения дифференциальных уравнений с большим параметром, описывающих движение обобщенно-консервативных механических систем // Изв. АН СССР. МТТ: 1986. № 3. С. 56–65.
2. *Воронин А. А., Сазонов В. В.* Периодические движения гироскопических систем // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 719–729.
3. *Сазонов В. В., Воронин А. А.* Периодические колебания обобщенно-консервативных механических систем под действием больших гироскопических и потенциальных сил. Препринт № 62. М.: Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1989, 28 с.
4. *Шилов Г. Е.* Математический анализ: Конечномерные линейные пространства. М.: Наука, 1969, 432 с.
5. *Lewis D. C.* On the role of first integrals in the perturbation of periodic solutions // Ann. Math. 1956. V. 63. N 3. P. 535–548.
6. *Rew W. T.* Generalized Green's matrices for compatible systems of differential equations // Amer. J. Math. 1931. V. 53. N 3. P. 443–459.
7. *Сазонов В. В., Воронин А. А.* Периодические колебания спутника – гиростата относительно центра масс под действием аэродинамического и гравитационного моментов // Космич. исслед. 1988. Т. 26. В. 4. С. 492–507.
8. *Воронин А. А., Сазонов В. В.* Периодические колебания спутника – гиростата относительно центра масс под действием магнитного и гравитационного моментов // Космич. исслед. 1990. Т. 28. В. 1. С. 22–34.

Волгоград, Москва

Поступила в редакцию
26.IV.1990