

УДК 539.3:534.1

© 1992 г. Ю. Д. КАПЛУНОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ОБОЛОЧКЕ ОБЩЕГО ОЧЕРТАНИЯ

Изучается нестационарный волновой процесс в тонкой упругой оболочке общего очертания при краевом ударном воздействии. Исследованы качественные особенности напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки. Определены границы областей применимости различных приближенных теорий. Получены простые асимптотические формулы для описания распространения волны изгиба.

1. Постановка задачи. Долгое время сфера применения асимптотических методов в нестационарной динамике тонких упругих тел была ограничена случаями пластины и круговой цилиндрической оболочки (см., например, обзоры [1, 2]). Лишь сравнительно недавно были разработаны асимптотические подходы к нестационарным задачам для оболочки вращения с меридианом произвольной формы [3].

Настоящая статья посвящена асимптотическому исследованию распространения волн в тонкой упругой оболочке общего очертания при краевом ударном воздействии. Сформулируем ее основные цели.

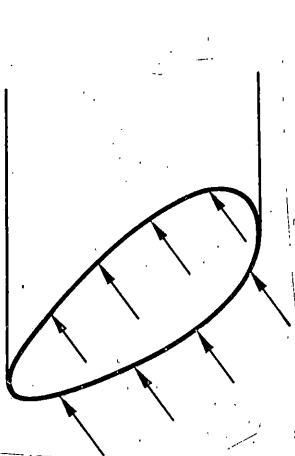
Обосновать возможность полного описания волнового процесса в оболочке как в трехмерном упругом теле с помощью асимптотических приближенных теорий (двумерных теорий оболочек, теории динамического погранслоя [3–5], теории высокочастотных НДС малой изменчивости [6]), каждая из которых имеет ограниченную область применимости.

На основе приближенных теорий выявить качественные особенности нестационарного НДС оболочки и получить его асимптотическое описание.

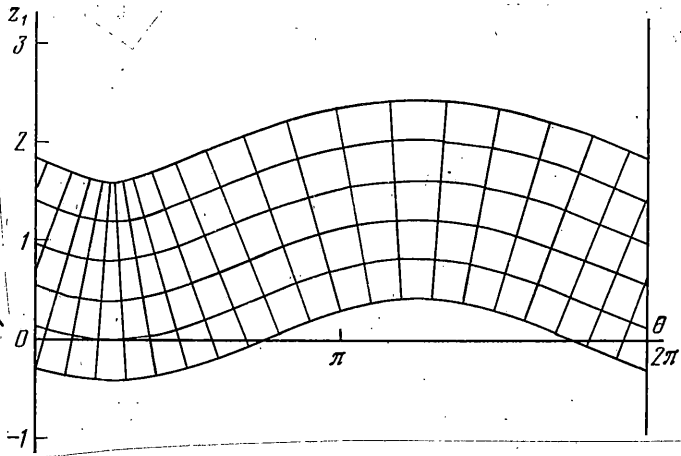
Рассмотрим волновой процесс в упругой тонкой оболочке, к замкнутому краю которой приложена ударная нагрузка (фиг. 1). Будем использовать следующие обозначения: E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; ρ — плотность; $2h$ — толщина оболочки; R — характерный радиус кривизны ее срединной поверхности; $\eta = h/R$ — основной малый параметр; c_1, c_2 — скорости волн расширения и сдвига в материале оболочки.

Положение точек оболочки в пространстве зададим векторным равенством $\mathbf{P} = \mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \mathbf{n}(\alpha_1, \alpha_2)$, где $\mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2)$ — радиус-вектор срединной поверхности, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к срединной поверхности, α_3 — расстояние, отсчитываемое по нормали от срединной поверхности.

Отнесем срединную поверхность оболочки к ортогональной системе координат, α_1 -линии которой — геодезические, ортогональные к краю $\alpha_1 = 0$, а параметр α_1 определяет длину геодезической, т. е. $A_i = 1$ (A_i ($i=1, 2$) — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности). Такую систему координат иногда называют полугеодезической, и нетрудно показать, что в окрестности замкнутого края $\alpha_1 = 0$ она всегда может быть введена [7]. Ниже изучается волновой процесс в области оболочки, для которой допустимо использование описанной системы координат.



Фиг. 1



Фиг. 2

В качестве примера рассмотрим скошенную круговую цилиндрическую оболочку. Пусть в трехмерной декартовой системе координат (x, y, z) уравнения цилиндрической поверхности и плоскости сечения имеют соответственно вид $x^2 + y^2 = R^2$ и $(x+y)\cos\psi_2 + z\cos\psi_1 = 0$ ($0 < \psi_1 < \pi/2$, $\pi/4 < \psi_2 < \pi/2$). На фиг. 2 для $\psi_1 = \pi/8$ показана развертка оболочки (θ — полярный угол в плоскости $z_1 = z/R = 0$) с координатной сеткой, соответствующей полугеодезической системе координат, у которой α_1 -линии ортогональны к краю.

Рассмотрим ударное воздействие, для которого граничные условия на краю $\alpha_1 = 0$ в терминах трехмерной теории упругости записываются в виде

$$\sigma_{11}(0, \alpha_2, \alpha_3, t) = p_f(\alpha_2, \alpha_3)H(t), \quad \sigma_{ii}(0, \alpha_2, \alpha_3, t) = 0 \quad (i=2, 3) \quad (1.1)$$

Здесь t — время, $H(t)$ — функция Хевисайда, σ_{ik} ($k=1, 2, 3$) — напряжения, $p_f(\alpha_2, \alpha_3)$ — амплитуда ударной нагрузки.

При этом ограничимся случаем, когда функция $p_f(\alpha_2, \alpha_3)$ нечетна по α_3 и имеет нулевую изменчивость по безразмерным переменным α_2/R и α_3/h .

Будем всегда считать, что начальные условия нулевые.

2. Динамический простой краевой эффект. Применим сначала для описания движения оболочки теорию Кирхгофа — Лява. Принятые в п.1 ограничения на вид краевого возбуждения позволяют воспользоваться уравнениями динамического простого краевого эффекта. Возьмем их в форме [5]

$$\frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} + k_2 N_1 + \frac{T_2}{R_{22}} - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial \alpha_1} - N_1 - k_2(G_2 - G_1) = 0$$

$$G_1 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + \nu k_2 \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right),$$

$$G_2 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + k_2 \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right).$$

$$T_2 = -2EhR_{22}^{-1} w \quad (2.1)$$

Здесь w — прогиб; N_1 — перерезывающее усилие; G_i ($i=1, 2$) — изгибающие моменты; T_2 — тангенциальное усилие; $k_2(\alpha_1, \alpha_2) = A_2^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \times$

$\times \partial A_2(\alpha_1, \alpha_2) / \partial \alpha_1$ — геодезическая кривизна α_2 -линии; $R_{22}(\alpha_1, \alpha_2)$ — радиус кривизны.

Изучим свойства напряженно-деформированного состояния (НДС), описываемого уравнениями (2.1). С этой целью попытаемся распространить на нестационарную динамику основополагающие для теории оболочек понятия о показателе динамичности и показателе изменчивости НДС [8, 9 и др.]. Важная особенность нестационарных задач, как здесь будет показано, состоит в том, что для них в отличие от стационарных динамических и статических задач эти показатели зависят от координат точки и от рассматриваемого момента времени.

Зафиксируем линию $\alpha_1 = \alpha_{10}$ и момент времени $t = t_0$ и произведем в (2.1) растяжение масштабов независимых переменных по формулам

$$\alpha_1 = R \eta^{q(\alpha_{10}, t_0)} \xi_1, \quad t = R c_2^{-1} \eta^{a(\alpha_{10}, t_0)} \tau \quad (2.2)$$

Здесь $q(\alpha_{10}, t_0)$, $a(\alpha_{10}, t_0)$ — соответственно локальный показатель изменчивости и показатель динамичности при $\alpha_1 = \alpha_{10}$, $t = t_0$ (аргументы функций $q(\alpha_{10}, t_0)$, $a(\alpha_{10}, t_0)$ далее будут опускаться). Как обычно предполагается, что $q < 1$, $a < 1$ и дифференцирование по новым переменным ξ_1 и τ не меняет асимптотического порядка искомых величин при $\alpha_1 = \alpha_{10}$, $t = t_0$.

Придать показателю изменчивости q и динамичности a не менее четкий, чем в стационарной динамике, смысл можно, если решение представимо в виде монохроматической волны или суперпозиции нескольких монохроматических волн. Именно такие случаи и будут здесь в основном рассматриваться. Для них на нестационарные задачи могут быть непосредственно распространены результаты [4, 5], относящиеся к оценке локальной погрешности решений. Применительно к обсуждаемой задаче они формулируются так: отбрасывание в уравнениях движения оболочки (в (2.1) или каких-либо других) членов порядка $O(\eta^\gamma)$ ($\gamma > 0$) при определении распространяющихся мод колебаний приводит к локальной погрешности $O(\delta_\gamma)$, где

$$\delta_\gamma = \eta^{1-a} \alpha_1 / R \quad (2.3)$$

Для уравнений динамического простого краевого эффекта в форме (2.1) $\gamma = \varepsilon = \min(2 - 2q, 5q - 2, 2q - 2p)$, где $q = 1/2(a + 1)$, а p ($0 \leq p < q$) — показатель изменчивости НДС оболочки вдоль α_2 -линий [5]. Будем далее считать, что $a > 0$. Это ограничение связано, во-первых, с тем, что при $a = 0$ ($q = 1/2$) система (2.1) может быть использована для описания распространяющихся мод колебаний лишь в асимптотически узкой окрестности края оболочки. Действительно, при $a = 0$ ($q = 1/2$) вычисляемая по (2.3) погрешность δ_γ будет исчезающе малой только при $\alpha_1 / R \ll 1$. Таким образом, для изучения распространяющихся мод при $a = 0$ ($q = 1/2$) система (2.1), вообще говоря, должна быть уточнена. Кроме того, случай $a > 0$ является наиболее важным с точки зрения оценки границ применимости теории Кирхгофа — Лява.

Построим решение уравнений (2.1). Введем предварительно безразмерные величины $x_i = \alpha_i / R$ ($i = 1, 2$), $t_1 = t c_2 / R$, $r_{22} = R_{22} / R$. Выражая в первом уравнении (2.1) усилия N_1 и T_2 через прогиб оболочки w , с учетом (2.2) получим разрешающее уравнение динамического простого краевого эффекта ($q = 1/2(a + 1)$, $a > 0$):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2Rk_2 \frac{\partial w}{\partial x_1^3} + 3/2(1 - \nu) \eta^{-4q} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2(1 + \nu) \eta^{2a} r_{22}^{-2} w \right] = 0 \quad (2.4)$$

Применяя сначала преобразование Лапласа по времени, а затем метод экспоненциальных представлений в пространстве изображений [3], получим в первом приближении следующее выражение для изображения про-

гиба (s — параметр преобразования Лапласа):

$$w^L \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}} \sum_{m=1}^2 C_m(x_2, s) \exp[-\eta^{-q}(1 + (-1)^m i) \gamma_0 f(x_1, x_2, s) s^{1/2} x_1] \quad (2.5)$$

$$f(x_1, x_2, s) = x_1^{-1} \int_0^{x_1} (1 + 2(1 + \nu) \eta^{2\alpha} s^{-2} r_{22}^{-2})^{1/4} dx_1', \quad \gamma_0 = 2^{-1/2} [3/2(1 - \nu)]^{1/4}$$

Здесь берутся главные значения радикалов на комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси. Выбор ветвей степенной функции в (2.5) обусловлен требованием экспоненциального затухания решения по x_1 в правой полуплоскости ($\text{Re } s > 0$). Функции $C_m(x_2, s)$ ($m=1, 2$) находятся из двумерных граничных условий при $x_1=0$, вытекающих из (1.1). Они имеют вид ($\zeta = \alpha_3/h$):

$$G_1^L(0, x_2, s) = -h^2 s^{-1} \int_{-1}^1 p_f(x_2, \zeta) \zeta d\zeta, \quad N_1^L(0, x_2, s) = 0 \quad (2.6)$$

Не выписывая явные выражения для $C_m(x_2, s)$, укажем лишь, что при удовлетворении граничных условий (2.6) можно в главном считать: $f=1$, $A_2=\text{const}$. При этом функции $C_m(x_2, s)$ будут пропорциональны $p_f A_2^{1/2}$ с независящим от x_2 коэффициентом. Отсюда следует, что $C_m(x_2, s)$ будут, как и краевая нагрузка, иметь нулевую изменчивость вдоль α_2 -линий.

Установим, при каких условиях решение уравнений динамического простого краевого эффекта имеет вид монохроматической волны. Для этого достаточно выяснить, когда интеграл Меллина ($\beta > 0$):

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \exp(\eta^{-a} s t_{10}) w^L ds \quad (2.7)$$

может быть оценен методом перевала. Выпишем фазовые функции, соответствующие (2.7):

$$\Phi_m(x_{10}, x_2, t_{10}, s) = \eta^{-a} s t_{10} - \eta^{-q}(1 + (-1)^m i) \gamma_0 f(x_{10}, x_2, s) s^{1/2} x_{10} \quad (m=1, 2) \quad (2.8)$$

Их анализ позволяет заключить, что для того, чтобы в области применимости теории динамического простого краевого эффекта интеграл (2.7) с исчезающей асимптотической погрешностью определялся вкладом точек перевала s_m^* ($m=1, 2$; $|s_m^*| \sim \eta^0$) и при этом выполнялось неравенство $a > 0$, необходимо потребовать выполнения следующих условий

$$\eta^{-q} x_{10} \gg 1, \quad \eta^{-a} \gg 1, \quad \eta^{-a} t_{10} \sim \eta^{-q} x_{10} \quad (2.9)$$

$$p < q < 1, \quad \delta_\epsilon \ll 1 \quad (a = 2q - 1)$$

Входящий в (2.9) показатель изменчивости вдоль α_2 -линий p при выполнении предположения $\partial/\partial x_2 \left(\int_0^{x_{10}} r_{22}^{-2} dx_{10}' \right) \sim x_{10}$ связан с показателем изменчивости вдоль геодезических посредством соотношения $\eta^{-p} \sim \sim \max(\eta^0, \eta^{3q-2} x_{10})$ (см. (2.5) и (2.8)).

Из третьей формулы (2.9) и последнего асимптотического равенства сразу же определяются значения показателей изменчивости и динамичности на линии $x_1 = x_{10}$ в момент времени $t_1 = t_{10}$:

$$\eta^{-q} \sim x_{10} / (\eta t_{10}), \quad \eta^{-p} \sim \max(\eta^0, \eta t_{10}^3 / x_{10}^{3/2}) \quad \eta^{-a} \sim x_{10}^2 (\eta t_{10}^2) \quad (2.10)$$

Соотношения (2.10) показывают, что в фиксированный момент времени изменяемость НДС оболочки в направлении геодезических и его динамичность увеличиваются при удалении от края. Изменяемость же в ортогональных к геодезическим направлениям, наоборот, падает. Последнее наблюдение объясняется тем, что при удалении от края (приближении к фронтам волн) уменьшается влияние кривизны оболочки. Для оболочки вращения ($\partial\varphi_m/\partial x_2=0$) при краевой нагрузке нулевой изменяемости всегда выполняется условие $p=0$. Возможность возбуждения медленно меняющейся вдоль края нагрузкой волн с относительно большой изменяемостью в направлениях, ортогональных к геодезическим, — отличительная черта оболочки общего очертания.

Получим асимптотическое представление интеграла (2.7) при выполнении соотношений (2.9). В силу того, что масштабные преобразования (2.2) определяют величины η^{-q} и η^{-a} с точностью до постоянного множителя порядка $O(1)$, в (2.9) и в (2.10) можно, не ограничивая общности, заменять в последующих рассуждениях знак асимптотической соизмеримости знаком равенства. Первые два неравенства (2.9) позволяют перейти в (2.7) к интегрированию по контуру, получающемуся в результате малого шевеления приведенного в [3] контура наискорейшего спуска для случая изгиба пластин. Координаты точек перевала функций φ_m ($m=1,2$) имеют вид

$$s_m^* = \sum_{n=0}^{\infty} s_{mn}^* \eta^{2an}$$

где $s_{m0}^* = (-1)^m i \gamma_0 / 2$, а следующие коэффициенты разложения выражаются через s_{m0}^* и r_{22} .

Вводя предварительно обозначение $y = \eta^{-q} x_{t_0} = \eta^{-a} t_{t_0}$, выпишем асимптотическое представление прогиба оболочки. Оно выглядит как ($y \rightarrow \infty$):

$$w(x_{t_0}, x_2, t_{t_0}) \approx \frac{\gamma_0}{2 \sqrt{\pi y A_2}} \sum_{m=1}^2 (1 + (-1)^m i) C_m(x_2, s_{m0}^*) \times \exp[\varphi_m(x_{t_0}, x_2, t_{t_0}, s_m^*)] \quad (2.11)$$

Представление (2.11) описывает монохроматическую волну, распространяющуюся от края оболочки вдоль ортогональных ему геодезических. При этом на линии $x_1 = x_{t_0}$ в момент времени $t_1 = t_{t_0}$ происходят гармонические колебания с локальными показателями изменяемости q, p и показателями динамичности a , которые определяются формулами (2.10).

Будем называть монохроматическую волну волной изгиба, если локальные показатели изменяемости и динамичности удовлетворяют условиям $0 < a < 1$, $q = 1/2(a+1)$. Основанием для введения такого определения служит то, что при выполнении сформулированных условий асимптотически главная часть (2.4) совпадает с уравнением динамического изгиба пластин. Принятое определение отличается от определения, предложенного в [10]. Там под волной изгиба понималась монохроматическая волна, для которой $q = 1/2$ ($a=0$).

Установим границы пространственной области, в которой представление (2.11) применимо для описания волны изгиба. Подставим (2.10) в неравенства (2.9). Ограничивая рассмотрение временным интервалом $\eta \ll \ll t_{t_0} \ll \eta^{-1/2}$, получим

$$\eta^{3/4} t_{t_0}^{7/4} + \eta^{3/2} (t_{t_0}^{3/2} + t_{t_0}) \ll x_{t_0} \ll \eta^{1/4} t_{t_0}^{3/4} \quad (2.12)$$

Верхняя граница применимости (2.11) определяется погрешностью уравнений (2.1) и соответствует требованию асимптотической малости величины δ_{2-2q} по (2.3). При этом в обсуждаемом временном интервале

$\eta \ll t_{10} \ll \eta^{-1/2}$ показатели изменчивости и динамичности принимают на линии $x_{10} = \eta^{1/4} t_{10}^{3/4}$ значения q_* и $a_* = 2q_* - 1$, меньшие единицы (см. (2.10)). Отсюда вытекает, что на основе двумерной теории оболочек типа Кирхгофа — Лява не может быть правильно описана быстроменяющаяся часть волны изгиба, для которой $a_* \leq a < 1$, $q_* < q < 1$. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Выясним теперь, при каких x_{10} в (2.11) можно пренебречь влиянием кривизны оболочки, т. е. положить $\varphi_m = y[s - (1 + (-1)^m i) \gamma_0 s^{1/2}]$ ($m=1,2$). Таким фазовым функциям отвечает дополнительное пренебрежение в системе (2.1) членами порядка $O(\eta^{2a})$. Требуя асимптотической малости погрешности δ_{2a} ($a=2q-1$), с учетом (2.10) получим $x_{10} \gg \eta^{1/2} t_{10}^{3/2}$. Это неравенство совместно с (2.12) лишь при $x_{10} \ll 1$. Таким образом пренебрежение кривизной оболочки в области действия уравнений теории Кирхгофа — Лява в общем случае недопустимо. Аналогичный вывод применительно к стационарным задачам был ранее сделан в [5].

Полезно также выяснить, можно ли в интервале (2.12) при вычислении фазовых функций (2.8) приближенно считать $s_m^* = s_{m0}^*$. Нетрудно установить, что в силу специфики этих функций погрешность $O(\eta^{2a})$ при определении точек перевала приводит всего лишь к погрешности $O(\eta^{4a})$ в величинах $\varphi_m(s_m^*)$ ($m=1,2$). Отсюда вытекает, что в фазовых функциях, входящих в (2.12), можно полагать $s_m^* = s_{m0}^*$ в том случае, если погрешность δ_{4a} ($a=2q-1$) будет асимптотически малой. Неравенство, соответствующее последнему требованию, совместно с (2.12) в широком интервале значений x_{10} .

Завершая на этом обсуждение асимптотического представления (2.11), заметим, что правомерность его использования в области (2.12) для описания динамики оболочки как трехмерного упругого тела требует дополнительных обоснований. Дело в том, что ударное краевое воздействие вследствие наличия в нем высокочастотной составляющей возбуждает нестационарные волны, которые заведомо не описываются двумерной теорией оболочек. Поэтому необходимо показать, что в области (2.12) амплитуда изгибной волны значительно превышает амплитуды возбуждающихся ударной нагрузкой высокочастотных волн.

На основе исследования задач стационарной динамики известно, что высокочастотные колебания могут быть как коротковолновыми, так и длинноволновыми [4—6]. Естественно предположить, что в области (2.11), в удалении от фронтов, возбуждаются нестационарные длинные волны. Оценим величину их вклада в общее НДС оболочки.

3. Высокочастотные НДС малой изменчивости. Для описания нестационарных высокочастотных длинных волн используем теорию высокочастотных НДС малой изменчивости [6]. В рамках принятых в п. 1 ограничений на вид краевой нагрузки достаточно рассмотреть высокочастотные НДС малой изменчивости первого типа (им соответствуют толщинные квазипоперечные колебания) для антисимметричной относительно срединной поверхности оболочки деформации с малым числом узлов по толщине. Ограничиваясь случаем $q > 0$ (как и выше, q — показатель изменчивости НДС вдоль геодезических), выпишем уравнение для медленно меняющейся двумерной амплитуды поперечного перемещения оболочки $v_3^a(\alpha_1, \alpha_2)$. Оно имеет вид

$$2h^2 \Lambda T^* \left(\frac{\partial^2 v_3^a}{\partial \alpha_1^2} + k_2 \frac{\partial v_3^a}{\partial \alpha_1} \right) - \left(\frac{h^2}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Lambda^2 \right) v_3^a = 0 \quad (3.1)$$

$$T^* = 1/2 \Lambda^{-1} \beta^{-2} - 4\Lambda^{-2} \operatorname{tg} \Lambda, \quad \beta = c_2/c_1 = [(1-2\nu)/(2-2\nu)]^{1/2}$$

$$\Lambda = \pi n / \beta \quad (n \in \mathbb{N}; n \sim \eta^0)$$

Будем для определенности считать, что $T^* > 0$ и $T^* \sim \eta^0$. Область при-

менимости уравнения (3.1) заведомо ограничена условием [6]:

$$\left(\frac{h^2}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Lambda^2\right) v_3^a \sim \eta^b v_3^a$$

Здесь $b > 0$ — показатель отклонения. При асимптотическом выводе (3.1) из уравнений трехмерной теории упругости совершается пренебрежение членами порядка $O(\eta^{\epsilon_1})$ ($\epsilon_1 = \min(2q, 2-2q)$) по сравнению с единицей, причем между показателями изменчивости q и отклонения b существует очевидная связь $b = 2 - 2q$. Поэтому в теории высокочастотных НДС малой изменчивости, как и в двумерных теориях оболочек, должно выполняться неравенство $q < 1$.

В [6] приведены также формулы, исходя из которых по функции $v_3^a(\alpha_1, \alpha_2)$ восстанавливается трехмерное медленно меняющееся НДС оболочки. Так, например, трехмерное поперечное перемещение вычисляется по формуле $v_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = v_3^a(\alpha_1, \alpha_2) \cos(\beta \Lambda h^{-1} \alpha_3) + O(\eta + \eta^{2-2q})$.

Произведем в (3.1) растяжение масштаба времени по второй формуле (2.2) при $a=1$ и перейдем к безразмерным координатам $x_i = \alpha_i/R$ ($i=1, 2$). Применяя затем преобразование Лапласа по времени и метод экспоненциальных представлений в пространстве изображений, получим в первом приближении

$$v_3^{aL} \approx A_2^{-1/2} C(x_2, s) \exp[-\eta^{-1}(2T^* \Lambda)^{-1/2}(s^2 + \Lambda^2)^{1/2} x_1] \quad (3.2)$$

Выбор ветви радикала осуществляется здесь так же, как и выше. Функция $C(x_2, s)$ для каждой из высокочастотных длинных волн находится в результате удовлетворения граничных условий (1.1).

Рассуждения, аналогичные приведенным в п. 2, позволяют заключить, что функция v_3^a представляет монохроматические высокочастотные длинные волны, если показатель изменчивости q задается первой формулой (2.10) и выполняются неравенства $x_{10} \gg \eta$, $t_{10} \gg \eta$. В области действия этих условий отвечающий (3.2) интеграл Меллина сводится к хорошо известному в волновой динамике интегралу [3 и др.] с большим параметром $y_1 = \eta^{-1} t_{10} = \eta^{a-2} x_{10}$ в показателе экспоненты. Не останавливаясь на деталях, приведем лишь окончательный результат ($y_1 \rightarrow \infty$):

$$v_3^a \approx \frac{x_{10}}{t_{10} \sqrt{2\pi T^* y_1 A_2}} \operatorname{Re} \{ (1+i) \exp[\eta^{-1}(s^* t_{10} - (2T^* \Lambda)^{-1/2} \times \\ \times (s^{*2} + \Lambda^2)^{1/2} x_{10})] \} \quad (3.3)$$

$$s^* = i\Lambda [1 - x_{10}^2 / (2T^* \Lambda t_{10}^2)]^{-1/2}$$

Принимая во внимание вытекающее из (2.10) соотношение $x_{10}/t_{10} \sim \eta^{1-q}$, нетрудно убедиться в том, что асимптотическое представление (3.3) описывает нестационарные высокочастотные длинные волны. Действительно, ему соответствуют распространяющиеся по оболочке колебания с локальным показателем изменчивости $q < 1$ по (2.10) и показателем динамичности $a=1$. Область действия (3.2) определяется требованием асимптотической малости погрешности δ_{ϵ_1} по (2.3), а также неравенствами $0 < q < 1$, $x_{10} \gg \eta$, $t_{10} \gg \eta$. С учетом (2.10) имеем при $\eta \ll t_{10} \ll \eta^{-1}$:

$$\eta(1+t_{10}) \ll x_{10} \ll \eta^{1/4} t_{10}^{3/4} \quad (3.4)$$

Сравним асимптотический порядок функций v_3^a по (3.2) и w по (2.11) в области (2.12) при граничных условиях (1.1). Подстановка (2.5) в (2.6) дает оценку $h^{-1} w^L(s_m^*) \sim \eta^{2q-2} E^{-1} \int_{-1}^1 p_f \zeta d\zeta$. Принимая во внимание, что для высокочастотных длинных волн $\sigma_{11} \sim E v_3^a$ [6], запишем

$h^{-1}v_3^{\alpha L}(s^*) \sim E^{-1}p_{ji}$, где p_{ji} — компонента краевого напряжения, возбуждающая высокочастотные длинные волны. Примем, что функция p_j имеет в рамках ограничений п. 1 общий закон изменения по толщине оболочки,

понимая под этим асимптотические равенства $\int_0^{-1} p_j \zeta d\zeta \sim p_j$, $p_j \sim p_{ji}$.

Тогда $h^{-1}w^L(s_m^*) \sim \eta^{2q-2}E^{-1}p_j$, а $h^{-1}v_3^{\alpha L}(s^*) \sim E^{-1}p_j$. Из вида представлений (2.11), (3.3) вытекает, что $w \sim y^{-1/2}w^L(s_m^*)$, $v_3^{\alpha} \sim \eta^{1-q}y_1^{-1/2}v_3^{\alpha L}(s^*)$. Учитывая, что $y \sim \eta^{2-2q}y_1$, окончательно получаем $v_3^{\alpha} \sim \eta^{4-4q}w$. Таким образом, с погрешностью $O(\eta^{4-4q})$ по сравнению с единицей в области (2.12) при граничных условиях (1.1) можно на фоне нестационарной волны изгиба (2.11) не учитывать нестационарные высокочастотные длинные волны (3.3).

При других способах возбуждения волнового процесса соотношение амплитуд волны изгиба и высокочастотных длинных волн может измениться. Пусть, например, в (1.1) первое граничное условие заменено на равенство $\sigma_{11} = p_j H(t) \cos \omega_0 t$ ($\Omega = \omega_0 h/c_2 \sim \eta^0$). Тогда, как легко проверить, оценка трансформанты прогиба примет вид $h^{-1}w^L(s_m^*) \sim \eta^{2-2q}E^{-1}p_j$, а остальные оценки останутся в силе. Это в общем случае дает $w \sim v_3^{\alpha}$, т. е. визуально выделить волну изгиба уже нельзя. Если же при этом частота возбуждения приближается к одной из частот среза ($\Omega \rightarrow \Lambda$), то амплитуда высокочастотной длинной волны, соответствующей этой частоте среза, будет значительно превосходить амплитуду волны изгиба, т. е. будет выполняться неравенство $v_3^{\alpha} \gg w$.

4. Плоский смешанный динамический погранслои. Для описания прифронтной составляющей НДС оболочки применим теорию плоского смешанного погранслоя [5]. Уравнение смешанного погранслоя возьмем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha_3} + k_2(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \alpha_3} + k_2 \sigma_{31} - \frac{E}{R_{22}^2} v_3 - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\beta_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \beta_1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} + k_2 v_1 \right) \right] \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\beta_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} \right) + \beta_2 k_2 v_1 \right] \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\beta_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + k_2 v_1 \right) + \beta_2 \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} \right] \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} \right) \end{aligned}$$

Здесь $\beta_1 = \nu/(1-2\nu)$, $\beta_2 = (1-\nu)/(1-2\nu)$ и считается, что напряжения σ_{ii} ($i=1 \div 3$) и перемещение v_1 антисимметричны, а напряжение σ_{13} и перемещение v_3 симметричны относительно срединной поверхности оболочки.

Система уравнений (4.1) описывает быстро меняющиеся НДС, для которых показатель изменчивости q вдоль α_i -линий описанной в п. 1 полугеодезической системы координат превосходит показатель изменчивости p в ортогональных к ним направлениях (т. е. справедливо неравенство $q > p$). При этом в отличие от (2.1) и (3.1) на показатели изменчивости не накладываются ограничения $q < 1$, $p < 1$.

Принятые в п. 1 ограничения позволяют считать, что показатель изменяемости по толщине оболочки q_3 равен единице.

Погрешность уравнений смешанного погранслоя имеет вид $O(\eta^{\epsilon_2})$ ($\epsilon_2 = \min(1/2(5a+1), 2q, a+1-2p, 2)$) по сравнению с единицей. Как и выше, будем полагать, что выполняется неравенство $a > 0$.

Асимптотика частных решений (4.1), удовлетворяющих однородным граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки, в общем случае выглядит так

$$\sigma_{ii} = E\sigma_{ii}^*, \quad \sigma_{13} = E\sigma_{13}^*, \quad v_k = R\eta v_k^* \quad (i=1 \div 3; k=1, 3) \quad (4.2)$$

Здесь и ниже считается, что все величины со звездочкой имеют одинаковый порядок. Исключение составляют два семейства частных интегралов, имеющих место при $q < 1$. Интегралы первого семейства соответствуют волне изгиба ($q = 1/2(a+1)$, $0 < a < 1$). Для них

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E\eta^{1-q}\sigma_{11}^*, \quad \sigma_{22} = E\eta^{1-q}\sigma_{22}^*, \quad \sigma_{33} = E\eta^{3-3q}\sigma_{33}^* \\ \sigma_{13} &= E\eta^{2-2q}\sigma_{13}^*, \quad v_1 = R\eta v_1^*, \quad v_3 = R\eta^q v_3^* \end{aligned} \quad (4.3)$$

Частные интегралы второго семейства описывают высокочастотные длинные волны ($q = 1 - b/2$, $0 < b < 2$). Для волн, соответствующих высокочастотным НДС малой изменяемости первого типа, их асимптотика имеет вид [6]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= E\sigma_{ii}^*, \quad \sigma_{13} = E\eta^{1-q}\sigma_{13}^*, \quad v_1 = R\eta^{2-q}v_1^* \\ v_3 &= R\eta v_3^* \quad (i=1 \div 3) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Заметим, что при $q=1$ асимптотики (4.3) и (4.4) переходят в (4.2). Вид соотношений (4.2)–(4.4) показывает, что асимптотически главная часть уравнений смешанного погранслоя совпадает с уравнениями плоской задачи теории упругости в декартовой системе координат, по одной из осей которой откладывается координата рассматриваемой точки на геодезической, а по другой – расстояние от этой точки до срединной поверхности оболочки. Нетрудно также усмотреть, что член $-ER_{22}^{-2}v_3$ во втором уравнении (4.1) при определении интегралов (4.2), (4.4) в рамках погрешности $O(\eta^{\epsilon_2})$ может быть отброшен. В этом случае уравнения плоского смешанного погранслоя переходят в уравнения плоского антисимметричного погранслоя [3, 5]. Гиперболичность (4.1) позволяет дать правильное описание трехмерного НДС оболочки около фронтов упругих волн (за исключением малых их окрестностей шириной порядка $O(\eta^2)$). Решения этой системы следует так же, как и решения плоской задачи теории упругости, подчинять на краю оболочки $\alpha_1 = 0$ первым двум граничным условиям (1.1).

В [5] показано, что при выполнении условия $\delta_{\epsilon_2} \ll 1$ частные интегралы уравнений смешанного погранслоя вида (4.3) могут быть с исчезающей асимптотической погрешностью получены из уравнений простого краевого эффекта (2.1) (напомним, что речь идет о случае, когда решение представляется монохроматической волной). Равным образом, опираясь на результаты [6], можно установить, что частные интегралы (4.4) при $\delta_{\epsilon_2} \ll 1$ могут быть найдены из уравнения теории высокочастотных НДС малой изменяемости (3.1). Отсюда вытекает, что в областях (2.12) и (3.4) решения уравнений смешанного погранслоя (4.1) согласуются с решениями уравнений двумерной теории оболочек (динамического простого краевого эффекта) и теории высокочастотных НДС малой изменяемости соответственно.

Остановимся далее подробнее на анализе решений системы уравнений (4.1) в области, для которой показатель изменяемости НДС оболочки вдоль геодезических линий $q < 1$. Рассуждения, аналогичные проведен-

ным в предыдущем пункте, показывают, что в случае граничных условий (1.1) колебания оболочки в этой области носят преимущественно изгибный характер и вклад в общее решение интегралов (4.4) является асимптотически малым.

Получим асимптотическое описание нестационарной монохроматической волны изгиба. Перейдем в (4.1) к координатам x_i ($i=1, 2$), ξ , τ и применим преобразование Лапласа по безразмерному времени. Используем затем метод экспоненциальных представлений в пространстве изображений, относящиеся к стационарному случаю результаты [5] и метод перевала. Не останавливаясь на подробностях, приведем асимптотическое представление для нормального перемещения оболочки

$$v_3(x_{10}, x_2, \xi, t_{10}) \approx - \frac{\gamma_0}{2 \sqrt{\pi y A_2}} \sum_{m=1}^2 (1 + (-1)^m i) C_m(x_2, s_m^*) \times \exp[\psi_m(x_{10}, x_2, t_{10}, s_m^{\sim})] \quad (4.5)$$

Функции $C_m(x_2, s_{m0}^*)$ здесь такие же, как в (2.11). Это объясняется тем, что вследствие выполнения неравенства $q < 1$ они могут быть найдены из граничных условий (2.6), в которых в выражениях (2.1) для G_i и N_i заменяется w на $-v_3$.

Таким образом, (4.4) отличается от асимптотического представления (2.11) для нормального прогиба оболочки, полученного на основе теории динамического простого краевого эффекта, только фазовыми функциями. Здесь они имеют вид

$$\psi_m(x_{10}, x_2, t_{10}, s) = \eta^{-a} s t_{10} + \eta^{-q} \int_0^{x_{10}} \kappa_m(x'_{10}, x_2, s) dx'_{10} \quad (m=1, 2) \quad (4.6)$$

Показатель изменяемости q и показатель динамичности a , как и в (2.11), определяются формулами (2.10), и выполняются требования (2.9). Здесь s_m^{\sim} — точки перевала функций ψ_m ; $\kappa = \kappa_m$ — корни дисперсионного уравнения

$$r_3^4 \frac{\text{sh } r_1}{r_1} \text{ch } r_2 + \kappa^2 r_2^2 \frac{\text{sh } r_2}{r_2} \text{ch } r_1 = 0 \quad (4.7)$$

$$r_1^2 = -\kappa^2 + \beta^2 \eta^{2-2q} s_1^2, \quad r_2^2 = -\kappa^2 + \eta^{2-2q} s_1^2$$

$$r_3^2 = -\kappa^2 + \frac{1}{2} \eta^{2-2q} s_1^2, \quad s_1^2 = s^2 + 2(1+\nu) \eta^{4q-2} r_{22}^{-2}$$

удовлетворяющие условиям: $|\kappa_m| \sim \eta^0$ при $|s| \sim \eta^0$; $\text{Re } \kappa_m < 0$ при $\text{Re } s > 0$.

Отметим, что (4.7) представляет незначительную модификацию дисперсионного уравнения Рэлея — Лэмба для антисимметричной деформации полосы.

Определим область применимости асимптотического представления (4.5). Выражая с помощью (2.10) показатели q , p и a через x_{10} и t_{10} в неравенствах (2.9), в которых нижний индекс ϵ заменен на ϵ_2 , запишем ($\eta \ll t_{10} \ll \eta^{-1}$):

$$\eta^{3/4} t_{10}^{7/4} + \eta^{1/2} (t_{10}^{1/2} + t_{10}) \ll x_{10} \ll t_{10} \quad (4.8)$$

Сопоставим представления (2.11) и (4.5). Непосредственно из (4.6), (4.7) вытекает, что с погрешностью $O(\eta^{2-2q})$ по сравнению с единицей

$$\kappa_m = -(1 \pm (-1)^m i) \gamma_0 s^{1/2} f, \quad s_m^{\sim} = s_m^* \quad (m=1, 2) \quad (4.9)$$

Принимая во внимание (4.9), увидим, что в области (2.12), где $\delta_{2-2q} \ll 1$, будет иметь место соотношение $v_3 \approx -w$.

Этим подтверждается сделанный выше вывод относительно пределов применимости теории динамического простого краевого эффекта. При

$\eta^{1/4} t_{10}^{3/4} \ll x_{10} \ll t_{10}$ ($\eta \ll t_{10} \ll \eta^{-1/2}$) эта теория оказывается несостоятельной. Единственной причиной этому служит недостаточная точность даваемой ею аппроксимации корней дисперсионного уравнения (4.7). Последнее заключение является естественным обобщением на нестационарный случай результатов [5].

5. Уточненные динамические теории [11] и теории Тимошенко — Рейсснера. Если ограничиться рассмотрением нестационарной волны изгиба ($0 < a < 1$, $a = 2q - 1$), то изучить волновой процесс в области $\eta^{1/4} t_{10}^{3/4} \ll x_{10} \ll t_{10}$ ($\eta \ll t_{10} \ll \eta^{-1/2}$), в которой теория Кирхгофа — Лява неприменима, можно и не привлекая теорию динамического погранслоя. Для этой цели достаточно использовать предложенный в [11] подход к уточнению классической теории оболочек в задачах динамики. Для рассматриваемого здесь случая указанное уточнение сводится к замене в системе уравнений (2.1) инерционного члена $2\rho h \partial^2 w / \partial t^2$ на оператор приведенной нормальной инерции

$$I_{nt} = 2\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{k=0}^i \left[\left(\frac{h}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{2k} (a_k + h^2 e b_k \Delta) \right] w$$

$$n = 2i + l; \quad l = 0, 1; \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad e = 1 - \delta_{ik}(1 - l) \quad (5.1)$$

Здесь δ_{ik} — символ Кронекера; Δ — оператор Лапласа в метрике срединной поверхности оболочки; $a_0 = 1$, $b_0 = (7\nu - 17) / [15(1 - \nu)]$. В [11] выписаны также явные выражения для a_1 и b_1 .

Ряд (5.1) соответствует уточненной динамической теории n -го порядка. Применение теории n -го порядка позволяет определять корни дисперсионного уравнения (4.7) κ_m ($m = 1, 2$) с погрешностью $O(\eta^{(2-2q)(n+1)})$ по сравнению с единицей. Требование $\delta_{(2-2q)(n+1)} \ll 1$ приводит к следующей оценке верхней границы области применимости теории n -го порядка $x_{10} \ll \eta^{1/(2n+4)} t_{10}^{(2n+3)/(2n+4)}$. При $n = 0$ эта оценка совпадает с (2.12), а при $n \rightarrow \infty$ переходит в (4.8). Случай $n = 1$ соответствует асимптотической теории Тимошенко — Рейсснера [11]. Из результатов этой работы вытекает также, что оценка $x_{10} \ll \eta^{1/6} t_{10}^{5/6}$ получается и для инженерных теорий Тимошенко — Рейсснера, построенных на основе физических гипотез, если положить в них коэффициент сдвига k^2 равным $5/(6 - \nu)$.

Ввиду того, что во всех известных вариантах инженерных теорий Тимошенко — Рейсснера [1, 12 и др.] предлагается значение коэффициента сдвига, численно близкое к $5/(6 - \nu)$, то становится понятным, почему в нестационарных задачах реальная область их применимости всегда оказывается более широкой, чем у теории Кирхгофа — Лява.

При $n = 1$ асимптотическое представление прогиба оболочки записывается в виде (4.5) при

$$\psi_m(x_{10}, x_2, t_{10}, s) = \eta^{-a} s t_{10} - \eta^{-a} (1 + (-1)^m i) \gamma_0 f(x_{10}, x_2, s) s^{1/2} \times \\ \times (1 - 1/2 (-1)^m i \gamma_0^2 b_0 \eta^{2-2q} s) x_{10}, \quad s_m \approx s_m^* \quad (m = 1, 2)$$

Здесь показатели q и a по-прежнему определяются формулами (2.9), а функция $f(x_{10}, x_2, s)$ такая же, как в (2.8).

Таким образом, незначительное изменение, вносимое в фазовые функции ψ_m , позволяет расширить область действия классической теории оболочек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айнола Л. Я., Нигул У. К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14. № 1. С. 3–63.
2. Нигул У. К. Волновые процессы деформации оболочек и пластин // Тр. 7-й Все-

- союз. конф. по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969. М.: Наука, 1970. С. 846–883.
3. Коссович Л. Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. 175 с.
 4. Гольденвейзер А. Л., Каплунов Ю. Д. Динамический погранслои в задачах колебаний оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 152–162.
 5. Каплунов Ю. Д. Интегрирование уравнений динамического погранслоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 148–160.
 6. Каплунов Ю. Д. Высокочастотные напряженно-деформированные состояния малой изменчивости в упругих тонких оболочках // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 147–157.
 7. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехиздат, 1956. 420 с.
 8. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
 9. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
 10. Gergoyanova O. A. Geometrical theory for flexure waves in shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1973. V. 53. No. 2. P. 535–540.
 11. Гольденвейзер А. Л., Каплунов Ю. Д., Нольде Е. В. Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко – Рейсснера // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 124–138.
 12. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.11.1991