

УДК 539.375

© 1992 г. И. Т. АРТЕМЬЕВ

О СООТВЕТСТВИИ ДВУХ КРИТЕРИЕВ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ

При исследовании ряда задач пластической анизотропии использовался критерий пластичности Мизеса — Хилла [1] в виде однородного полинома второй степени относительно компонент тензора напряжений.

1. При плоской деформации это условие можно записать в виде

$$a^{-2} [^{1/2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + b^{-2} \tau_{xy}^2 = 1 \quad (1)$$

где a, b — коэффициенты, характеризующие пластическую анизотропию. Известны также другие полиномиальные критерии анизотропной пластичности [2] в форме, близкой к (1). Если принять $a=b=k$, то (1) примет форму критерия Треска для изотропных сред. В [3] предложено непосредственное обобщение критерия Треска на случай пластической анизотропии, исходящее из зависимости предела текучести k от направления θ :

$$[^{1/2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + \tau_{xy}^2 = k^2(\theta) \quad (2)$$

В публикуемой работе устанавливается связь между критериями (1), (2). Показано, что модель пластической анизотропии Мизеса — Хилла можно описать в рамках представлений [3].

Произведем замену, тождественно удовлетворяющую условию (2)

$$\sigma_x, \sigma_y = \sigma \mp k(\theta) \sin 2\theta, \quad \tau_{xy} = k(\theta) \cos 2\theta \quad (3)$$

Эти соотношения удовлетворяют и условию Мизеса — Хилла (1), если функция $k(\theta)$ имеет специальный вид:

$$k(\theta) = [a^{-2} \sin^2 2\theta + b^{-2} \cos^2 2\theta]^{-1/2} = k_* \quad (4)$$

где θ — угол наклона площадки с максимальным касательным напряжением $\tau_{\max} = k$ к оси ортотропии x :

$$\operatorname{tg} 2\theta = ^{1/2}(\sigma_y - \sigma_x) / \tau_{xy} \quad (5)$$

Дифференциальные уравнения равновесия

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} = 0, \quad \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} = 0 \quad (6)$$

(индекс после запятой означает соответствующую частную производную) следует рассматривать совместно с одним из критериев (1), (2).

Введем обозначения (см. диаграмму Мора, фиг. 1):

$$2R(\theta) = 2(m^2 + n^2)^{1/2} = [(k')^2 + (2k)^2]^{1/2}, \quad k' = dk/d\theta$$

$$2m = k' \sin 2\theta + 2k \cos 2\theta = 2R \cos 2(\theta - \gamma) \quad (7)$$

$$2n = -k' \cos 2\theta + 2k \sin 2\theta = 2R \sin 2(\theta - \gamma)$$

$$1/2 k'/R = \sin 2\gamma, \quad k/R = \cos 2\gamma, \quad 1/2 k'/R = \operatorname{tg} 2\gamma$$

$$p_1 = -(m + q_1)/n = \operatorname{tg}(\theta - \gamma), \quad q_1 = R \quad (8)$$

$$p_2 = -(m + q_2)/n = -\operatorname{ctg}(\theta - \gamma), \quad q_2 = -R$$

Система уравнений (2), (6) принадлежит к гиперболическому типу и приводится к следующей характеристической форме:

$$[\sigma_{,x} + p_i \sigma_{,y}] + 2q_i [\theta_{,x} + p_i \theta_{,y}] = 0 \quad (i=1, 2) \quad (9)$$

Имеют место два взаимно ортогональных семейства характеристик этой системы

$$(dy/dx)_i = p_i \quad (i=1, 2) \quad (10)$$

Из (8), (10) следует, что $\theta - \gamma$ — угол наклона характеристики к оси x , γ — угол между характеристикой и площадкой с максимальным касательным напряжением. Уравнения равновесия (9) можно представить также в виде дифференциальных соотношений вдоль характеристик

$$d\sigma + 2q_i d\theta = 0 \quad (11)$$

Из уравнений (11) следуют соотношения вдоль характеристик, обобщающие интегралы Генки

$$\sigma + 2 \int q_i d\theta = C_i \quad (C_i = \text{const}, i=1, 2) \quad (12)$$

Обратимся к системе уравнений равновесия (6) при условии Мизеса — Хилла (1). Используя замену (3), (4), получим

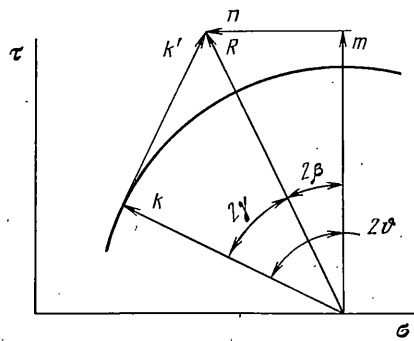
$$R = k_*^3 [b^{-4} \cos^2 2\theta + a^{-4} \sin^2 2\theta]^{-1/2} \quad (13)$$

$$m = k_*^3 b^{-2} \cos 2\theta, \quad n = -k_*^3 a^{-2} \sin 2\theta$$

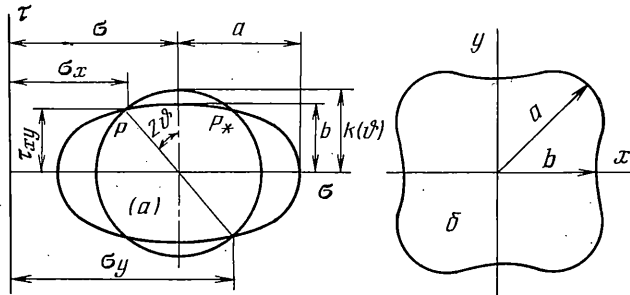
Для системы (1), (6) характеристические уравнения, характеристики и соотношения вдоль характеристик имеют вид (9) — (11). При этом параметры R , m , n , p_i , q_i имеют частный вид, определяемый формулами (8), (13).

В связи с указанным соответствием критериев анизотропной пластичности (1), (2) условию Мизеса — Хилла можно дать простую интерпретацию на диаграмме Мора. Пусть в некоторой точке анизотропной пластической среды реализовано предельное напряженное состояние $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ с определенным значением θ (5). С одной стороны, этому напряженному состоянию соответствует точка круга Мора (2). С другой стороны, этому же напряженному состоянию соответствует точка эллипса (4) или (1). Таким образом, напряженное состояние пластической анизотропии (1) на диаграмме (фиг. 2, а) определяется точкой пересечения P круга Мора (2) и эллипса (1). Радиус круга — k , полуоси эллипса — a, b . Геометрические центры круга и эллипса при условии Мизеса — Хилла совпадают. Очевидно, данному условию пластичности соответствуют круги с радиусами $k(\theta) \in (a, b)$.

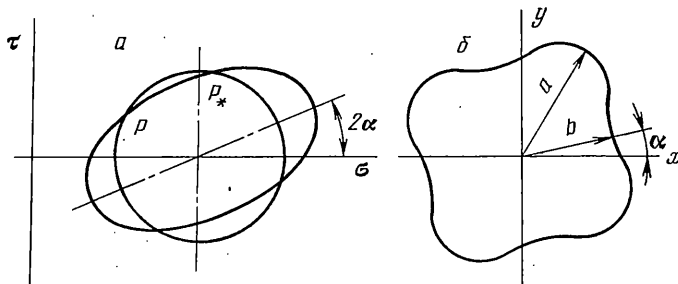
Заметим, что условия (1) — (4) удовлетворяются тождественно и в случае, если заменить знак параметра θ на противоположный. Соответствующее напряженное состояние пластической анизотропии интерпретируется



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

(фиг. 2, а) точкой P_* . Данная двойственность возможных предельных состояний связана с ортотропным характером анизотропии Мизеса — Хилла (1). Для всех точек анизотропной пластической среды (1) определена эпюра предельных значений максимального касательного напряжения $k(\theta)$ (4), имеющая по четыре полуоси a и b , с периодом $\pi/2$ (см. двукратный эллипс на фиг. 2, б).

Указанная интерпретация напряженных состояний пластической анизотропии на диаграмме Мора (фиг. 1) имеет место и при произвольной зависимости $k(\theta)$ (2). При этом напряженное состояние определяется точкой пересечения круга Мора с соответствующей линией. Для иллюстрации рассмотрим, например, зависимость

$$k(\theta) = [A \sin^2 2\theta - 2B \sin 2\theta \cos 2\theta + C \cos^2 2\theta]^{-1/2} \quad (14)$$

при которой условие (2) принимает вид

$$A [1/2(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + 2B [1/2(\sigma_x - \sigma_y)] \tau_{xy} + C \tau_{xy}^2 = 1 \quad (15)$$

На диаграмме Мора функция (15) интерпретируется эллипсом с полуосями a, b , наклоненными к осям σ, τ под углом 2α (фиг. 3, а), причем

$$A = a^{-2} \cos^2 2\alpha + b^{-2} \sin^2 2\alpha \quad (16)$$

$$B = (a^{-2} - b^{-2}) \cos 2\alpha \sin 2\alpha$$

$$C = a^{-2} \sin^2 2\alpha + b^{-2} \cos^2 2\alpha$$

В полярных координатах ρ, θ условие (14) описывает эпилору двукратного эллипса, аналогичного (4), но повернутого на угол α (фиг. 3, б), так что (14) можно представить в виде

$$k(\theta) = [a^{-2} \sin^2 2(\theta - \alpha) + b^{-2} \cos^2 2(\theta - \alpha)]^{-1/2} \quad (17)$$

Очевидно, существуют два значения $\theta = \alpha \pm \theta_0$, при которых величина радиуса k (17) совпадает. Это свойство ортотропии условия (15) интерпретируется на фиг. 3, а точками P, P_* возможных напряженных состояний (15).

2. Компоненты скорости деформации будем определять исходя из закона течения, ассоциированного с заданным условием пластичности [3]:

$$\epsilon_x = \lambda \partial f / \partial \sigma_x, \quad \epsilon_y = \lambda \partial f / \partial \sigma_y, \quad 2\epsilon_{xy} = \lambda \partial f / \partial \tau_{xy} \quad (18)$$

где $\lambda > 0$ — неопределенный множитель. Принимая функцию $f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ в форме (2), получим после некоторых преобразований с учетом (3)

$$\epsilon_x = -\epsilon_y = -\lambda n, \quad \epsilon_{xy} = \lambda m \quad (19)$$

где m, n определены соотношениями (7). Исключая λ из (19), приведем их к двум соотношениям

$$\epsilon_x + \epsilon_y = 0, \quad 1/2 (\epsilon_y - \epsilon_x) / \epsilon_{xy} = n/m \quad (20)$$

Первое уравнение (20) говорит о том, что в случае пластической анизотропии (2) выполняется условие несжимаемости. Второе уравнение (20) выражает угол β наклона площадки, испытывающей максимальную скорость деформации сдвига ϵ_{\max} , т. е. направление площадки скольжения

$$\operatorname{tg} 2\beta = 1/2 (\epsilon_y - \epsilon_x) / \epsilon_{xy} = \operatorname{tg} 2(\theta - \alpha) \quad (21)$$

Очевидно, что в анизотропном случае площадки максимальных скоростей сдвига не совпадают с площадками максимальных касательных напряжений, т. е. $\beta \neq \theta$ (5), (7), (20), (21). Это совпадение имеет место в изотропном случае, когда $k' = 0$. Преобразовывая тангенс двойного аргумента (21), найдем, что существуют два направления β_i ($i=1, 2$) с максимальными скоростями сдвига

$$\operatorname{tg} \beta_i = 2(-\epsilon_{xy} \pm \epsilon_{\max}) / (\epsilon_y - \epsilon_x) \quad (22)$$

$$\epsilon_{\max} = [\epsilon_{xy}^2 + (\epsilon_y - \epsilon_x)^2 / 4]^{1/2}$$

С учетом (19):

$$\operatorname{tg} \beta_i = -[m \pm (m^2 + n^2)^{1/2}] / n \quad (23)$$

Так как $\operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2 = -1$, т. е. $\operatorname{tg} \beta_2 = -\operatorname{ctg} \beta_1$, то направления β_1 и β_2 взаимно ортогональны. Пользуясь обозначением $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = \beta + \pi/2$, запишем дифференциальные уравнения семейств линий скольжения

$$(dy/dx)_1 = \operatorname{tg} \beta, \quad (dy/dx)_2 = -\operatorname{ctg} \beta \quad (24)$$

Переходя в (20) к компонентам скоростей перемещения u, v вдоль осей x, y по формулам

$$\epsilon_x = u_{,x}, \quad \epsilon_y = v_{,y}, \quad 2\epsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (25)$$

получим два дифференциальных уравнения кинематики. Эти уравнения

имеют характеристики, совпадающие с (10). Очевидно (8), (23), что правые части характеристик (10) совпадают с правыми частями (24). Следовательно, характеристики (10) являются линиями скольжения анизотропной среды (24). Из (10), (24) находим $\beta = \theta - \gamma$. Угол γ , введенный выше (7), определяет направление между площадкой максимальных касательных напряжений и площадкой скольжения в данной точке пластической анизотропной среды. Соотношения (20), (25) приводятся к следующей характеристической форме:

$$[u_{,x} + p_i u_{,y}] + p_i [v_{,x} + p_i v_{,y}] = 0 \quad (26)$$

где p_i — параметры, определяемые согласно (8). Переходя к локальным координатам ξ, η , направленным соответственно вдоль ортогональных линий скольжения, приведем соотношения вдоль характеристик (26) к соотношениям Гейрингер

$$dU - V d\beta = 0, \quad dV + U d\beta = 0 \quad (27)$$

где U, V — компоненты скорости в направлениях β_1, β_2 , т. е. вдоль ортогональных характеристик.

Рассмотрим соотношения кинематики, исходя из условия Мизеса — Хилла (1). Используем ассоциированный закон (18), соотношения (3) и отнесем общие множители в полученных выражениях для ϵ_{ij} к неопределенному множителю λ . Получим выражения

$$\epsilon_x = -\epsilon_y = -\lambda a^{-2} \sin 2\theta, \quad \epsilon_{xy} = \lambda b^{-2} \cos 2\theta \quad (28)$$

Соотношения кинематики принимают вид

$$\epsilon_x + \epsilon_y = 0, \quad 1/2(\epsilon_y - \epsilon_x)/\epsilon_{xy} = (b/a)^2 \operatorname{tg} 2\theta \quad (29)$$

Система (25), (29) имеет характеристики

$$(dy/dx)_i = [-a^2 \cos 2\theta \pm (a^4 \cos^2 2\theta + b^4 \sin^2 2\theta)^{1/2}] / (b^2 \sin 2\theta) \quad (30)$$

Соотношения (28)–(30) получены непосредственно из условия Мизеса — Хилла (1). Однако эти же соотношения получаются как частный случай из (19), (20), (23), (24), если в последних принять $k(\theta)$ в виде (4). Действительно, при этом параметры m, n принимают вид (13) и указанное соответствие легко проверяется. Очевидно, аналогичное соответствие имеет место и для других характеристических соотношений кинематики (26), (27) и т. д. Подробное исследование условия анизотропной пластичности (2) приведено в [3]. Указанное выше соответствие критериев (1), (2) позволяет применять результаты [3] к условию Мизеса — Хилла как к частному случаю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 191 с.
3. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
4. Быковцев Г. И. О плоской деформации анизотропных идеально пластических тел // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 2. С. 66–74.
5. Дудукаленко В. В. К теории пластической анизотропии // ДАН УССР. 1961. № 7. С. 872–875.
6. Саркисян М. С. К теории плоской деформации пластически анизотропных тел // ПММ. 1960. Т. 24, Вып. 6. С. 1136–1139.

7. *Геогджаев В. О.* Пластическое плоское деформированное состояние ортотропных сред. Труды МФТИ. Исследования по механике и прикладной математике. М.: Оборонгиз. 1958. С. 55–68.
8. *Гениев Г. А.* Плоская деформация анизотропной идеально пластической среды // Строит. механика и расчет сооружений. 1982. № 3. С. 14–18.
9. *Артемьев И. Т.* Об огибающей как предельном условии в анизотропной пластичности // Краевые задачи и их приложения./Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1989. С. 4–9.

Чебоксары

Поступила в редакцию
23.IV.1990