

УДК 531.383

© 1992 г. В. Ф. ЖУРАВЛЕВ

## НУТАЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ СВОБОДНОГО ГИРОСКОПА

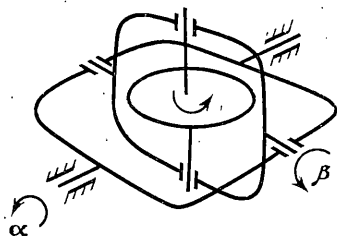
Предлагается модель явления, часто встречающегося в практике эксплуатации гироскопических приборов и состоящего в том, что в гироскопах могут возникать интенсивные, незатухающие колебания с нутационными частотами. Причиной возникновения таких колебаний является потеря устойчивости стационарного вращения ротора, обусловленная наличием неконсервативных сил в его опорах. В качестве примера рассмотрены шарикоподшипниковые опоры, хотя силы аналогичной природы присутствуют и в любых других типах опор (воздушные, электромагнитные и т. д.).

Рассмотрим гироскоп в кардановом подвесе, изображенный на фиг. 1. Основание предполагается неподвижным, главные центральные оси инерции рамок и ротора совпадают с осями вращения при  $\beta=0$ , углы  $\alpha$  и  $\beta$  определяют соответственно поворот наружной рамки относительно основания и поворот внутренней рамки относительно наружной от положения, в котором они взаимно ортогональны.

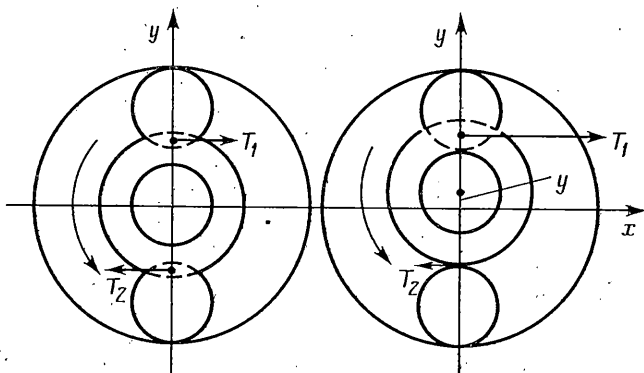
Опоры наружной и внутренней рамок будем предполагать абсолютно жесткими; опоры ротора считаются упругими и, кроме того, в них будет учитываться сухое трение.

Сухое трение в опорах ротора приводит к появлению сил особой природы, действующих на ротор со стороны внутренней рамки: циркулярные (псевдогироскопические) силы. Для пояснения их возникновения обратимся к примеру шарикоподшипниковой опоры. На фиг. 2 схематично изображен ротор, вращающийся в подшипнике с натягом. Изображены только два, симметрично расположенные шарика. Со стороны шариков на ротор действуют равные и противоположно направленные силы трения качения  $T_1=T_2$  (левый рисунок). Если же ротор сместить по вертикали на расстояние  $y$  (правый рисунок), то сила  $T_1$  увеличится, поскольку увеличится нормальная реакция, а сила  $T_2$  уменьшится. В результате на ротор будет действовать не только возвращающая сила, направленная по оси  $y$ , но и сила, направленная по оси  $x$ . Это и есть циркулярная сила.

При составлении уравнений движения гироскопа с этими силами воспользуемся свойствами свободных колебаний гироскопа с упругими опорами ротора, приведенными, например, в [1]. Эти свойства представлены зависимостью собственных частот гироскопа от величины кинетического момента, изображенной на фиг. 3. При большом кинетическом моменте ( $H \rightarrow \infty$ ) в системе остается две собственные частоты  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , называемые терминологией Магнуса, маятниковыми [2]. В установившейся русскоязычной литературе терминологии [1] меньшая из двух частот, т. е.  $\nu_1$  носит название нутационной частоты. Предельная механическая систе-



Фиг. 1



Фиг. 2

ма, в которую вырождается гироскоп на фиг. 1 при  $H \rightarrow \infty$ , изображена на фиг. 4: к неподвижному в пространстве стержню присоединены при помощи упругих связей в точках  $A$  и  $B$  две рамки. Уравнения этой системы в ливейной постановке имеют вид

$$\begin{aligned} J_1 \alpha'' + h_1 \alpha' + k\alpha - e\beta &= 0 \\ J_2 \beta'' + h_2 \beta' + k\beta + e\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $J_1$  — момент инерции наружной рамки вокруг ее оси вращения,  $J_2$  — момент инерции внутренней рамки вокруг оси, проходящей через ее опоры в наружной рамке,  $h_1$ ,  $h_2$  — коэффициенты диссипации,  $k$  — угловая жесткость опор ротора,  $e$  — коэффициент циркулярных сил, возникающих, как отмечено выше из-за сухого трения в опорах ротора.

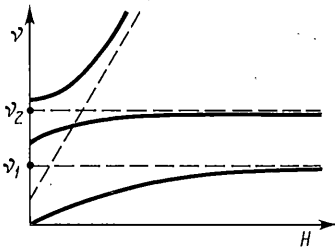
Появление интенсивных нутационных колебаний в рассматриваемой системе связано с неустойчивостью положения равновесия  $\alpha = \beta = 0$  при достаточно больших циркулярных силах. Поскольку нас интересует не амплитуда этих колебаний, а условия их возникновения, то и рассматриваются не полные нелинейные уравнения, а лишь их линейная часть.

Рассмотрев характеристический определитель системы (1) и воспользовавшись критерием Рауса — Гурвица, получим выражение для критического значения коэффициента интенсивности циркулярных сил, при превышении которого система (1) неустойчива

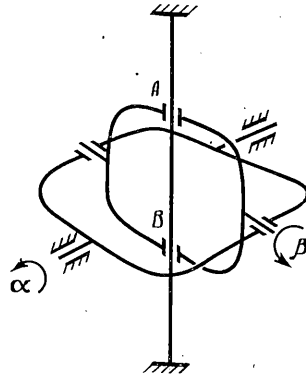
$$e_*^2 = \frac{kh_1h_2[k(J_1 - J_2)^2 + (h_1 + h_2)(J_1h_2 + J_2h_1)]}{(J_1h_2 + J_2h_1)^2} \quad (2)$$

Если считать коэффициенты диссипации  $h_1$ ,  $h_2$  малыми, то формулу (2) можно упростить

$$e_*^2 \approx k^2 h_1 h_2 (J_1 - J_2)^2 / (J_1 h_2 + J_2 h_1)^2 \quad (3)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Формулу (3) можно привести к более удобной для анализа форме, если заметить, что коэффициент угловой жесткости  $k$  и коэффициент циркулярных сил  $e$  связаны друг с другом посредством коэффициента трения качения. Действительно, угловую жесткость можно выразить так

$$k = a dN / d\alpha \quad (4)$$

где  $N$  — нормальная сила на одном шарике,  $a$  — коэффициент, зависящий от расстояния между опорами, числа шариков в подшипнике и угла контакта.

Коэффициент  $e$  при этом имеет вид ( $T$  — сила трения):

$$e = a \frac{dT}{d\alpha} = a \frac{dT}{dN} \frac{dN}{d\alpha} \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), находим

$$\gamma_*^2 = h_1 h_2 (J_1 - J_2)^2 / (J_1 h_2 + J_2 h_1)^2 \quad (6)$$

Через  $\gamma$  обозначен дифференциальный (локальный) коэффициент трения

$$\gamma = dT / dN \quad (7)$$

В литературе обычно используется иное понятие коэффициента трения

$$f = T / N \quad (8)$$

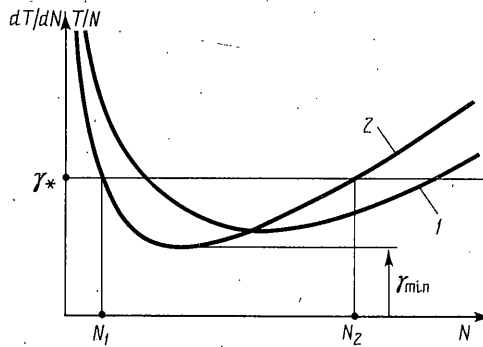
Зависимость этого коэффициента от  $N$ , приведенная в [3], изображена на фиг. 5 (кривая 1).

Найдем связь коэффициента (7) с коэффициентом (8):

$$\gamma = f + \frac{df}{dN} \cdot N$$

Из этой формулы видно, что  $\gamma = f$  в точке минимума на кривой  $f$  ( $df/dN = 0$ ). Для значений  $N$ , меньших точки минимума  $\gamma < f$ , для больших значений  $\gamma > f$ . Поэтому, зная график  $f(N)$ , можно построить  $\gamma(N)$  и он имеет вид, изображенный кривой 2 на фиг. 5.

Если нам известны коэффициенты диссипации по углам  $\alpha$  и  $\beta$  —  $h_1, h_2$ , а также моменты инерции рамок  $J_1, J_2$ , то по формуле (6) можно найти критическое значение локального коэффициента трения, при превышении которого возникают интенсивные нутационные колебания (поскольку теряется устойчивость стационарного вращения).



Фиг. 5

Отложив  $\gamma_*$  на оси ординат (фиг. 5), находим области устойчивости и неустойчивости на оси  $N$ . Поскольку нагрузка на шарик  $N$  определяется натягом в подшипниках, то для малых натягов ( $N < N_1$ ) и для больших натягов ( $N > N_2$ ) система неустойчива. Для борьбы с автоколебаниями натяг следует выбирать таким, чтобы было выполнено:  $N_1 < N < N_2$ .

Заметим, что если  $\gamma_* < \gamma_{\min}$ , то никакой выбор натяга не обеспечит устойчивого вращения, поскольку в этом случае прямая  $\gamma = \gamma_*$  не имеет точек пересечения с кривой 2.

При переходе от формулы (2) к формуле (3) было использовано предположение о малости коэффициентов диссипации  $h_1$  и  $h_2$ . Рассмотрим этот вопрос подробнее. Предел  $\lim e_*$  при  $h_1 h_2 \rightarrow 0$  не существует. Если предположить  $h_1 = h_2$ , то  $e_*^2 = k^2 (J_1 - J_2)^2 / (J_1 + J_2)^2$ . Если же один из коэффициентов  $h_1$  или  $h_2$  равен нулю, то и  $e_* = 0$ ; максимальное значение  $e_*$  достигается при соотношении  $h_1/h_2 = J_1/J_2$  и оказывается равным

$$e_*^2 = k^2 (J_1 - J_2)^2 / (4J_1 J_2) \quad (9)$$

Хотя предел функции  $e_*(h_1, h_2)$  при стремлении аргументов к нулю не существует, значение этой функции в нуле легко вычислить. Для этого положим в системе (1)  $h_1 = h_2 = 0$  и найдем выражение для собственных частот

$$\lambda^2 = \frac{-k(J_1 + J_2) \pm \sqrt{k^2(J_1 - J_2)^2 - 4J_1 J_2 e^2}}{2J_1 J_2}$$

Откуда следует критическое значение  $e$ , при котором наступает потеря устойчивости, совпадающее с (9). Последнее означает, что диссипация в рассматриваемой задаче играет дестабилизирующую роль: сколь угодно малые  $h_1$  и  $h_2$  сколь угодно сильно (в зависимости от отношения  $h_1/h_2$ ) меняют границу области устойчивости по  $e$ . Откуда следует некорректность задачи вычисления этой границы для недемпфированной системы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климов Д. М., Харламов С. А. Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978. 208 с.
2. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
3. Пинегин С. В. Трение качения в машинах и приборах. М.: Машиностроение, 1976. 262 с.

Москва.

Поступила в редакцию  
9.1.1992