

УДК 539.214; 539.374

© 1992 г. М. Ш. ШТЕЙН

К ОСЕСИММЕТРИЧНОМУ ТЕЧЕНИЮ ДЛЯ ГРАНИЦ ПРИЗМЫ ПЛАСТИЧНОСТИ ТРЕСКА — СЕН-ВЕНАНА

Течение идеально жесткопластической среды, ассоциированное условием максимального касательного напряжения, в случае осевой симметрии исследовалось в [1]–[4]. При этом для решения прикладных задач предпочтение отдавалось уравнениям, соответствующим ребрам призмы пластичности в пространстве главных напряжений. Ниже предлагается точная постановка осесимметричной задачи для грани призмы пластичности Треска – Сен-Венана, основанная на введении функции характеристических направлений, которая удовлетворяет квазилинейному гиперболическому уравнению второго порядка. Проанализированы возможные постановки краевых задач для указанного уравнения, предложена разностная схема второго порядка точности для построения численного решения, исследуются допустимые разрывы напряжений и скоростей перемещений. Изучена структура особых решений типа распада разрыва в окрестности изолированной особой точки и приведен пример расчета такого разрыва для особой точки, являющейся граничной по отношению к контактной поверхности с трением.

1. **Функция характеристических направлений.** Запишем условия пластичности $|\sigma_i - \sigma_\varphi| = 1$ ¹⁾ ($i=1, 2$; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_\varphi$ – главные компоненты тензора напряжений в меридиональной плоскости; r, z, φ – цилиндрическая система координат) в виде

$$\begin{aligned} \chi(\sigma_r + \sigma_z - 2\sigma_\varphi) + \sqrt{\Sigma} &= 2 & (1.1) \\ \chi &= \begin{cases} 1, & \sigma_1, \sigma_2 > \sigma_\varphi \\ -1, & \sigma_1, \sigma_2 < \sigma_\varphi \end{cases} & \Sigma = (\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2 \end{aligned}$$

Здесь и далее все компоненты тензора напряжений отнесены к $2\tau_s$. Тогда, согласно ассоциированного закона течения, для (1.1) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \partial u / \partial r = \lambda(\chi + \cos 2\Psi) \\ \varepsilon_z &= \partial v / \partial z = \lambda(\chi - \cos 2\Psi) & (1.2) \\ \varepsilon_\varphi &= u/r = -2\lambda\chi \\ \gamma_{rz} &= \partial u / \partial z + \partial v / \partial r = 2\lambda \sin 2\Psi \end{aligned}$$

где u, v – компоненты вектора скорости перемещения, $\lambda > 0$, а Ψ – угол между первым главным направлением тензора напряжений и осью r в плоскости r, z . Исключая λ из (1.2), σ_φ с помощью (1.1) из уравнений

¹⁾ Грани $|\sigma_1 - \sigma_2| = 1$ из рассмотрения опущены [3].

равновесия, используя при этом переменные Леви

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma_1 + \sigma_2)/2, \quad \tau = v(\sigma_1 - \sigma_2)/2; \quad v=1 \text{ при } \sigma_1 > \sigma_2 \\ \sigma_r &= \sigma + \tau \cos 2\Psi, \quad \sigma_z = \sigma - \tau \cos 2\Psi; \quad v=-1 \text{ при } \sigma_1 < \sigma_2 \\ \tau_{rz} &= \tau \sin 2\Psi \end{aligned} \quad (1.3)$$

приходим к квазилинейной системе относительно неизвестных функций σ , τ , Ψ , u , v [5]:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \cos 2\Psi \frac{\partial \tau}{\partial r} + \sin 2\Psi \frac{\partial \tau}{\partial z} - 2\tau \left(\sin 2\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \cos 2\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \frac{f_1}{r} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \sin 2\Psi \frac{\partial \tau}{\partial r} - \cos 2\Psi \frac{\partial \tau}{\partial z} + 2\tau \left(\cos 2\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \sin 2\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \frac{f_2}{r}$$

$$f_1 = -\kappa - (\cos 2\Psi - \kappa)\tau, \quad f_2 = -\tau \sin 2\Psi$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \kappa \frac{u}{r} \sin 2\Psi = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \cos 2\Psi - \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \sin 2\Psi = 0 \quad (1.5)$$

Совместно с соотношением (1.5) необходимо рассматривать и неравенства

$$u < 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 < 4 \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.6)$$

для граней $\sigma_1 - \sigma_0 = 1$, $\sigma_2 - \sigma_0 = 1$

$$u > 0, \quad (\partial u / \partial z + \partial v / \partial r)^2 > 4 \quad (1.7)$$

для граней $\sigma_0 - \sigma_1 = 1$, $\sigma_0 - \sigma_2 = 1$, которые следуют из соблюдения знаков главных скоростей деформаций.

Система (1.4), (1.5) является прямым следствием ассоциированного закона течения с условием (1.1) без типа [5]. Ее характеристический определитель тождественно равен нулю из-за вырожденности матриц при производных по r и z от искомым функций (два уравнения (1.4) содержат производные от трех функций σ , τ , Ψ , а три уравнения (1.5) — от двух функций u , v). Таким образом, допустимо предположение о существовании отдельных дифференциальных зависимостей, следующих из (1.5), для u , v и их производных и функции Ψ и ее производных. Связь между компонентами скоростей u , v устанавливается исключением $\cos 2\Psi$, $\sin 2\Psi$ из (1.5), что приводит к нелинейной гиперболической системе [3]:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{u}{r} \right)^2 = 0 \quad (1.8)$$

$$\partial u / \partial r + \partial v / \partial z - u / r = 0$$

с характеристиками

$$dz/dr = \operatorname{tg} \Psi, \quad dz/dr = -\operatorname{ctg} \Psi \quad (1.9)$$

Уравнения (1.9) определяют в плоскости r , z главные направления тензора напряжений (они же в силу соосности являются и главными траекториями тензора скоростей деформаций). Однако постановка краевых задач для системы (1.3) предполагает кинематическую определенность, что является нереализуемым условием при решении конкретных прикладных осесимметричных задач в жесткопластической постановке.

Поэтому представляется важным установить зависимость для функции $\Psi(r, z)$ и ее производных. Обратимся к соотношениям (1.2), откуда имеем

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{u}{2r}(1 + \kappa \cos 2\Psi), \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{u}{2r}(1 - \kappa \cos 2\Psi) \quad (1.10)$$

Следовательно, можно записать

$$u = r^{-1/2}\Phi(r, z), \quad v = -r^{-1/2} \int \left(\frac{1}{2} \frac{\Phi}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) dz + g(r) \quad (1.11)$$

$$\Phi(r, z) = f \exp \left(-\frac{\kappa}{2} \int \frac{\cos 2\Psi}{r} dr \right) \quad (1.12)$$

где $f = \text{const}$, а $g(r)$ произвольная функция из C^1 . Если теперь подставить явные выражения для скоростей перемещений (1.11) в последнее уравнение (1.2) и проделать ряд последовательных преобразований, то приходим к уравнению для функции $\Phi(r, z)$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - E \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{3}{4} \frac{\Phi}{r^2} = 0 \quad (1.13)$$

$$G = 4r \frac{\partial \Phi}{\partial r} / \Delta, \quad E = -2\kappa \Phi / (r\Delta); \quad \Delta = \left[\Phi^2 - \left(2r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Заметим, что из (1.12) следует

$$\Psi(r, z) = \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{2r}{\kappa} \frac{\partial \Phi}{\partial r} / \Phi \right) \quad (1.14)$$

а коэффициенты уравнения (1.13) G, E равны соответственно $G = -2 \operatorname{ctg} 2\Psi, E = 2/r \sin 2\Psi$.

Применяя стандартную процедуру исследования типа уравнения второго порядка [6], получаем, что квазилинейное уравнение второго порядка (1.13) — гиперболическое с характеристиками — главными направлениями тензора напряжений в плоскости r, z (1.9). В соответствии с (1.14) функцию $\Phi(r, z)$ (1.12) будем называть функцией характеристических направлений. Теперь остается рассмотреть два уравнения (1.4), считая что $\Psi(r, z)$ может быть определена из решения соответствующих краевых задач для функции характеристических направлений (1.12). При этом уравнения (1.4) относительно σ, τ становятся линейной гиперболической системой с характеристиками (1.9).

Таким образом, вырожденная квазилинейная система уравнений (1.4), (1.5) тождественно преобразуется: в уравнение (1.13) для определения функции характеристических направлений $\Phi(r, z)$, а следовательно, и $\Psi(r, z)$; в линейную систему (1.4) относительно σ, τ ; в соотношения (1.11) для определения скоростей перемещений.

Введем далее в плоскости r, z криволинейную ортогональную систему координат, связанную с главными направлениями тензора напряжений $r = r(\alpha, \beta), z = z(\alpha, \beta)$ ($\beta = \text{const}$ — α -линия; $\alpha = \text{const}$ — β -линия). Тогда операторы дифференцирования вдоль α - и β -линий примут вид

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha} = \cos \Psi \frac{\partial}{\partial r} + \sin \Psi \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial s_\beta} = -\sin \Psi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \Psi \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.15)$$

Переходя в (1.4), (1.5) к дифференцированию вдоль главных тра-

екторий, будем иметь после некоторых преобразований

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sigma + \tau)}{\partial s_\alpha} + 2\tau \frac{\partial \Psi}{\partial s_\beta} &= -\frac{\kappa + \tau(1 - \kappa)}{r} \cos \Psi \\ \frac{\partial(\sigma - \tau)}{\partial s_\beta} - 2\tau \frac{\partial \Psi}{\partial s_\alpha} &= -\frac{\kappa - \tau(1 + \kappa)}{r} \sin \Psi \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s_\alpha} - V \frac{\partial \Psi}{\partial s_\alpha} &= -(1 + \kappa) \frac{u}{2r}, \quad U = u \cos \Psi + v \sin \Psi \\ \frac{\partial V}{\partial s_\beta} + U \frac{\partial \Psi}{\partial s_\beta} &= -(1 - \kappa) \frac{u}{2r}, \quad V = -u \sin \Psi + v \cos \Psi \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь U, v — скорости вдоль α - и β -линий. Так из (1.17) следует, что для граней $\sigma_1 - \sigma_\varphi = 1, \sigma_2 - \sigma_\varphi = 1$ ($\kappa = 1$) «удлинение» элемента жестко пластической среды вдоль β -линии отсутствует, а для граней $\sigma_\varphi - \sigma_1 = 1, \sigma_\varphi - \sigma_2 = 1$ ($\kappa = -1$) такое же свойство имеет место вдоль α -линии. К соотношениям (1.17) следует присоединить условие равенства нулю скорости сдвига

$$\frac{\partial U}{\partial s_\beta} + \frac{\partial V}{\partial s_\alpha} + U \frac{\partial \Psi}{\partial s_\alpha} - V \frac{\partial \Psi}{\partial s_\beta} = 0 \quad (1.18)$$

Из сказанного выше следует, что конструктивный алгоритм решения реальных осесимметричных задач для жесткопластического тела, следующего грани условия пластичности Треска — Сен-Венана, сводится, по существу, к решению краевых задач для уравнения (1.13). После чего системы (1.16), (1.17) можно рассматривать как соотношения вдоль характеристик для определения напряженного и деформированного состояния.

2. Постановка краевых задач для уравнения (1.13). Рассмотрим возможность сформулировать граничную задачу для функции характеристических направлений $\Phi(r, z)$, исходя из задания на некоторой кривой в плоскости r, z (фиг. 1) напряжений, скоростей перемещений и их комбинаций. Будем считать, что кривая AB задана параметрически $r = r(t), z = z(t); t \in [t_1, t_2]$, причем $r(t), z(t) \in C^1[t_1, t_2]$, а значения функций на AB будем отмечать ноликом. Не ограничивая общности, остановимся на следующих трех случаях постановок задач, сводящихся к задаче Коши для уравнения (1.13).

Постановка 1. На AB заданы компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{n|AB} = \sigma_n^0, \quad \sigma_{s|AB} = \sigma_s^0, \quad \tau_{ns|AB} = \tau_{ns}^0 \quad (2.1)$$

Тогда $\operatorname{tg} 2(\psi^0 - \eta) = \frac{2\tau_{ns}^0}{\sigma_n^0 - \sigma_s^0}, \quad \operatorname{tg} \eta|_{AB} = -\frac{r'(t)}{z'(t)}$

$$\psi^0 = \eta + 0.5 \operatorname{arctg} \left(\frac{2\tau_{ns}^0}{\sigma_n^0 - \sigma_s^0} \right) \quad (2.2)$$

Из (1.12) определим $\Phi|_{AB}$ как

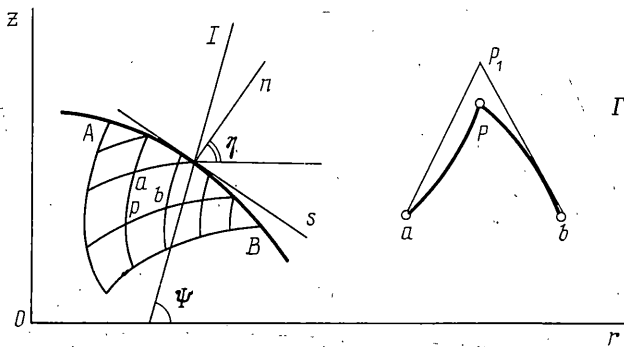
$$\Phi^0(t) = f \exp \left(-\frac{\kappa}{2} \int \frac{\cos 2\psi^0}{r} r'(t) dt \right) \quad (2.3)$$

Затем из (1.12) и производной функции (2.3) по t находим

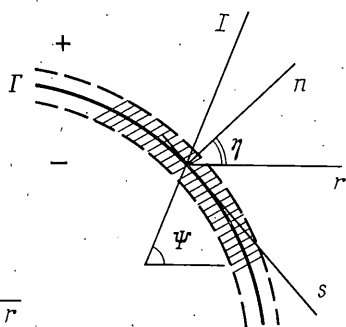
$$T|_{AB} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{AB} = -\frac{\kappa}{2} \frac{\Phi^0}{r} \cos \Psi^0 = T^0, \quad S|_{AB} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{AB} = 0 \quad (2.4)$$

Постановка 2. На AB заданы компоненты скорости перемещений:

$$u|_{AB} = u^0, \quad v|_{AB} = v^0 \quad (2.5)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Воспользуемся равенствами (1.2) и продифференцируем u^0 , v^0 вдоль AB , тогда

$$\cos 2(\Psi^0 - \eta) = \kappa - 2\kappa \frac{r}{u^0} \left(\cos \eta \frac{dv^0}{dt} - \sin \eta \frac{du^0}{dt} \right) \quad (2.6)$$

Следовательно, значение функции $\Phi(r, z)$ и ее первых производных на AB определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \Phi|_{AB} &= r^{1/2} u^0, & T|_{AB} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{AB} = -\frac{\kappa}{2} r^{3/2} u^0 \cos 2\Psi^0 \\ S|_{AB} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{AB} = r^{1/2} \left[\frac{1}{z'} \frac{du^0}{dt} + \kappa \frac{u^0}{2r} (\kappa + \cos 2\Psi^0) \frac{r'}{z'} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Постановка 3. На AB заданы смешанные условия

$$\sigma_{n|AB} = \sigma_n^0, \quad \tau_{ns|AB} = \tau_{ns}^0, \quad u|_{AB} = u^0 \quad (2.8)$$

Из (1.11) дифференцированием U^0 вдоль AB получаем

$$\cos 2\Psi^0 = -2\kappa \frac{r}{r'} \left(\frac{1}{u^0} \frac{du^0}{dt} + \frac{1}{2} \frac{r'}{r} \right) \quad (2.9)$$

После чего имеем значения для функции $\Phi(r, z)$ (2.7) и ее производных вдоль AB в виде

$$\begin{aligned} \Phi|_{AB} &= r^{1/2} u^0, & S|_{AB} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{AB} = 0 \\ T|_{AB} &= r^{1/2} u^0 \left(\frac{1}{u^0} \frac{du^0}{dt} + \frac{1}{2} \frac{r'}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Правые части равенств (2.6) и (2.9) по абсолютной величине не должны превышать единицы, что накладывает соответствующие ограничения в виде неравенств на скорости u^0 , v^0 и их первые производные. В случае, когда AB имеет характеристические направления ($\Psi^0 = \eta$), то из (2.2), (2.6), (2.9) имеем зависимости для начальных условий вдоль характеристик.

Итак, из соотношений (2.3), (2.7) и (2.10) следует, что, задавая вдоль AB напряжения, скорости перемещений или частично напряжения и компоненту скорости, можно определять функцию характеристических направлений Φ^0 и ее производные по r и z , а тем самым и производную по нормали к AB . Следовательно, приходим к задаче Коши для уравнения (1.13), теоремы единственности и существования реше-

ния которой для квазилинейного уравнения второго порядка приведены в [6].

3. Численный подход (метод характеристик). Перейдем от уравнения (1.13) к квазилинейной системе первого порядка, введя обозначения

$$\tau_1 = \Delta / (2rT + \Phi), \quad \tau_2 = \Delta / (2rT + \Phi), \quad T = \partial\Phi / \partial r, \quad S = \partial\Phi / \partial z \quad (3.1)$$

Тогда главные направления тензора напряжений, являющиеся характеристиками уравнения (1.13), и связанная с ними ортогональная система $\alpha(r, z)$, $\beta(r, z)$ криволинейных координат в плоскости r, z могут быть представлены

$$\begin{aligned} \partial z / \partial \alpha - \tau_1 \partial r / \partial \alpha &= 0, \quad \alpha(r, z) = \text{const} \\ \partial z / \partial \beta - \tau_2 \partial r / \partial \beta &= 0, \quad \beta(r, z) = \text{const} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Рассмотрим возможность определения вдоль α и β траекторий вторых производных

$$R = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad Q = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \quad P = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Для этого запишем (1.13) и производные от T и S по α , β вдоль одной из характеристик

$$\begin{aligned} -R + GQ + P + D &= 0 \\ r \cdot R + z \cdot Q - T &= 0 \\ r \cdot Q + z \cdot P - S &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $D = -ES + \frac{3}{4}\Phi$, а точкой обозначено дифференцирование вдоль характеристик. Таким образом, с одной стороны, производные R, Q, P нельзя однозначно определить из (3.3), а с другой стороны, система (3.3) должна быть совместной, чтобы существовало решение $\Phi(r, z)$. Следовательно, ранг расширенной матрицы коэффициентов системы (3.3) не должен превышать 2. Откуда, в частности, следуют уравнения характеристик (3.2) и соотношения вдоль характеристик в виде

$$D\tau_{kr} \cdot - \tau_k T_v \cdot + S_v \cdot = 0, \quad (v = \alpha, \beta; k = 1, 2) \quad (3.4)$$

($v = \alpha, k = 1$ — соответствуют α -линии; $v = \beta, k = 2$ — β -линии). К уравнениям (3.2), (3.4) следует присоединить два уравнения, выражающие значения первых производных Φ по α и β :

$$Tr_\alpha \cdot + Sz_\alpha \cdot - \Phi_\alpha \cdot = 0, \quad Tr_\beta \cdot + Sz_\beta \cdot - \Phi_\beta \cdot = 0 \quad (3.5)$$

Таким образом, в ортогональной системе координат α, β плоскости r, z имеем систему шести уравнений (3.2), (3.4), (3.5) для определения пяти неизвестных функций $r, z, \Phi, T, S(\alpha, \beta)$. Заметим, что одно из перечисленных уравнений является следствием остальных пяти уравнений.

Перейдем далее от дифференцирования по α и β к дифференцированию по длине дуги s_α, s_β в соответствии с (1.15), пользуясь следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} &= \frac{\cos \Psi}{h_\alpha} d_\alpha, & \frac{\partial}{\partial \beta} &= -\frac{\sin \Psi}{h_\beta} d_\beta \\ d_\alpha &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \text{tg } \Psi \frac{\partial}{\partial z} \right) dr_\alpha, & d_\beta &= \left(\frac{\partial}{\partial r} - \text{ctg } \Psi \frac{\partial}{\partial z} \right) dr_\beta \end{aligned}$$

Здесь h_α, h_β — коэффициенты первой квадратичной формы. Тогда из

(3.2), (3.4) и (3.5) имеем

$$\begin{aligned}d_{\alpha}z &= \tau_1 d_{\alpha}r, & d_{\beta}z &= \tau_2 d_{\beta}r, & d_{\alpha}S - \tau_1 d_{\alpha}T &= -\tau_1 Dd_{\alpha}r \\d_{\beta}S - \tau_2 d_{\beta}T &= -\tau_2 Dd_{\beta}r & & & & (3.6) \\d_{\alpha}\Phi &= Td_{\alpha}r + Sd_{\alpha}z, & d_{\beta}\Phi &= Td_{\beta}r + Sd_{\beta}z\end{aligned}$$

Теперь остается воспользоваться конечно-разностным аналогом для соотношений вдоль характеристик (3.6), из которых следуют (фиг. 1) расчетные формулы метода характеристик первого (3.7) и второго (3.3) порядка точности [7]:

$$\begin{aligned}z_{p_1} - \tau_{1a}r_{p_1} &= z_a - \tau_{1a}r_a, & z_{p_1} - \tau_{2b}r_{p_1} &= z_b - \tau_{2b}r_b & (3.7) \\S_{p_1} - \tau_{1a}T_{p_1} &= S_a - \tau_{1a}T_a - \tau_{1a}(r_{p_1} - r_a)D_a \\S_{p_1} - \tau_{2b}T_{p_1} &= S_b - \tau_{2b}T_b - \tau_{2b}(r_{p_1} - r_b)D_b \\ \Phi_{p_1} - \Phi_a &= T^1(r_{p_1} - r_a) + S^1(z_{p_1} - z_a) \\ \Phi_{p_1} - \Phi_b &= T^2(r_{p_1} - r_b) + S^2(z_{p_1} - z_b) \\ T^1 &= (T_a + T_{p_1})/2, & T^2 &= (T_b + T_{p_1})/2 \\ S^1 &= (S_a + S_{p_1})/2, & S^2 &= (S_b + S_{p_1})/2\end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}z_p - \tau_a^1 r_p &= z_a - \tau_a^1 r_a, & z_p - \tau_b^2 r_p &= z_b - \tau_b^2 r_b \\ S_p - \tau_a^1 T_p &= S_a - \tau_a^1 T_a - K_a(r_p - r_a) \\ S_p - \tau_b^2 T_p &= S_b - \tau_b^2 T_b - K_b(r_p - r_b) \\ \Phi_p - \Phi_a &= T^1(r_p - r_a) + S^1(z_p - z_a) \\ \Phi_p - \Phi_b &= T^2(r_p - r_b) + S^2(z_p - z_b) \\ \tau_a^1 &= (\tau_{1a} + \tau_{1p_1})/2, & \tau_b^2 &= (\tau_{2b} + \tau_{2p_1})/2 \\ K_a &= (\tau_{1a}D_a + \tau_{1p_1}D_{p_1})/2, & K_b &= (\tau_{2b}D_b + \tau_{2p_1}D_{p_1})/2 \\ T^1 &= (T_a + T_p)/2, & S^1 &= (S_a + S_p)/2 \\ T^2 &= (T_b + T_p)/2, & S^2 &= (S_b + S_p)/2\end{aligned}$$

Таким образом, полученные соотношения (3.7), (3.8) могут быть использованы для численного решения краевых задач, рассмотренных в предыдущем пункте.

4. Разрывы напряжений и скоростей перемещений. Исследуем возможность существования сильного разрыва напряжений и скоростей перемещений в окрестности некоторой кривой Γ плоскости r, z . Пусть напряженное состояние в окрестности Γ (фиг. 2) соответствует грани (1.1) и имеют место равенства (1.2). Введем локальную систему координат (n, s) , связанную с Γ как показано на фиг. 2. Тогда условия равновесия элемента среды в непосредственной близости к предполагаемой кривой разрыва напряжений Γ требуют, чтобы скачки $[\sigma_n] = [\tau_{ns}] = 0$. Разрывными могут быть σ_s и σ_{φ} . Запишем компоненты тензора напряжений в осях n, s :

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma + \tau \cos 2(\Psi - \eta), & \sigma_s &= \sigma + \tau \cos 2(\Psi - \eta) \\ \tau_{ns} &= \tau \sin 2(\Psi - \eta)\end{aligned} \quad (4.1)$$

Условие пластичности (1.1) в соответствии с (1.3) может быть записано как

$$\sigma_{\varphi} = \sigma + \kappa(\tau - 1) \quad (4.2)$$

На основании равенств $[\sigma_n] = [\tau_{ns}] = 0$ получаем уравнение, связывающее скачки Ψ , σ_{φ} и τ поперек Γ :

$$\cos(\Psi^+ - \Psi^- - 2\eta) + \frac{\kappa}{2} \frac{[\sigma_{\varphi}]}{\tau^-} \frac{\sin 2(\Psi^+ - \eta)}{\sin(\Psi^+ - \Psi^-)} = \kappa \cos(\Psi^+ - \Psi^-)$$

Имея тем самым значения Ψ , τ по одну из сторон от Γ и задаваясь скачком $[\sigma_\varphi]$, можно определить Ψ^+ , а затем и τ^+ , σ^+ по другую сторону Γ . Если принимается непрерывность σ_φ при переходе через Γ ($[\sigma_\varphi]=0$), то (4.3) упрощается и скачок $[\Psi]$ не зависит от τ , а следовательно, и от σ , что следует также из рассмотрения (4.2) по обе стороны от Γ .

Пусть теперь Γ представляет собой часть главной траектории, т. е. на участке Γ конечной длины $\eta=\Psi$. При этом (4.3) теряет смысл. Обратимся к соотношениям (1.16)–(1.18). Из них же следует, что $[\Psi]=0$. Вдоль первого главного направления (α -линия) разрывным может быть напряжение $\sigma_1([\sigma_2]=0)$; вдоль второго (β -линия) — разрывным может быть $\sigma_2([\sigma_1]=0)$. Соотношения для скачков принимают вид (вдоль α - и β -линии соответственно):

$$(1+\kappa)[\sigma_1] = -2\kappa[\sigma_\varphi], \quad (1-\kappa)[\sigma_2] = 2\kappa[\sigma_\varphi] \quad (4.4)$$

Заметим, что при $\kappa=1$ разрыв σ_φ вдоль β -линии исчезает и соответственно отсутствует разрыв σ_φ при $\kappa=-1$ вдоль α -линии, что согласуется с недеформируемостью элементов вдоль указанных направлений, о чем говорилось ранее (см. (1.17)).

Рассмотрим теперь возможность разрывов скоростей перемещений в окрестности Γ в плоскости r, z . Если Γ не имеет направлений, совпадающих с главными траекториями (1.15), то в [3] было установлено отсутствие разрывов скоростей. Поэтому остановимся на случае, когда Γ содержит одно из направлений (1.15). Из соотношений траекторий (1.17) вытекает, что поперек α -линии может быть разрывен тангенциальный компонент скорости перемещения U ; вдоль β -линии — V . Но так как (1.15) — траектории главных скоростей деформаций, то вдоль них должно выполняться условие равенства нулю главного сдвига (1.18), что накладывает специальные ограничения на разрыв скорости вдоль α - и β -линий. Действительно, пусть вдоль α -линии имеет место скачок касательной составляющей $[U] \neq 0$. Тогда из (1.18) с необходимостью следует, что и $[V] \neq 0$, причем радиусы кривизны R_α и R_β ($1/R_\alpha = \partial\Psi/\partial S_\alpha$; $1/R_\beta = -\partial\Psi/\partial S_\beta$) должны быть равны, а скачки компонент скорости перемещения удовлетворяют равенству

$$[U] = -[V] \quad \text{или} \quad U^+ + V^+ = U^- + V^- \quad (4.5)$$

Таким образом, в случае осевой симметрии при соответствии скоростей деформации (1.2) гралям (1.1) скорость перемещений может претерпевать разрыв только вдоль главных траекторий (1.15), при этом нормальная и касательная составляющие разрывны (4.5). Подобная ситуация имеет место в обобщенной плоской задаче [8]. И, наконец, проведя общие рассуждения аналогично [8], приходим к выводу: линия раздела жесткой области и соседней пластически деформируемой, согласно (1.2), является главной траекторией (1.15).

5. Структура распада разрыва. Решения задач математической теории пластичности требуют построения разрывных решений. Возможность существования сильного разрыва вдоль некоторой кривой исследовалась в предыдущем пункте. Однако при построении численных решений возникает также необходимость изучения структуры распада разрыва в окрестности изолированной особой точки. Предположим, что в точке A (фиг. 3) имеет место веер α - или β -линий, который может быть представлен пучком прямых $z-z_0 = \text{tg } \chi(r-r_0)$ в достаточно малой окрестности особой точки A , где χ — угол отсчитываемый против часовой стрелки от направления r , а ρ — радиус ($r=r_0+\rho \cos \chi$, $z=z_0+\rho \sin \chi$). Перей-

дем в операторах дифференцирования (4.15) к системе координат ρ, χ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s_\alpha} &= \cos(\Psi - \chi) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \sin(\Psi - \chi) \frac{\partial}{\partial \chi} \\ \frac{\partial}{\partial s_\beta} &= -\sin(\Psi - \chi) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos(\Psi - \chi) \frac{\partial}{\partial \chi}\end{aligned}$$

Тогда соотношения вдоль α - и β -линий примут вид

$$\begin{aligned}\cos(\Psi - \chi) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \sin(\Psi - \chi) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \chi} - \nu(\sigma_1 - \sigma_2) \left[-\sin(\Psi - \chi) \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \right. \\ \left. + \frac{\cos(\Psi - \chi)}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} \right] = \frac{\nu(\kappa - 1)(\sigma_1 - \sigma_2) - 2\kappa}{2(r_0 + \rho \cos \chi)} \cos \Psi\end{aligned}\quad (5.1)$$

$$\begin{aligned}-\sin(\Psi - \chi) \frac{\partial \sigma_2}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos(\Psi - \chi) \frac{\partial \sigma_2}{\partial \chi} - \nu(\sigma_1 - \sigma_2) \left[\cos(\Psi - \chi) \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \right. \\ \left. + \frac{\sin(\Psi - \chi)}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} \right] = \frac{\nu(\kappa + 1)(\sigma_1 - \sigma_2) - 2\kappa}{2(r_0 + \rho \cos \chi)} \sin \Psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\Psi - \chi) \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} - V \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\sin(\Psi - \chi)}{\rho} \left(\frac{\partial U}{\partial \chi} - V \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} \right) = \\ = -\frac{\kappa + 1}{2 \cos \Psi} \frac{U \cos \Psi - V \sin \Psi}{r_0 + \rho \cos \Psi}\end{aligned}\quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}-\sin(\Psi - \chi) \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} + U \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\cos(\Psi - \chi)}{\rho} \left(\frac{\partial V}{\partial \chi} + U \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} \right) = \\ = -\frac{\kappa - 1}{2 \sin \Psi} \frac{U \cos \Psi - V \sin \Psi}{r_0 + \rho \cos \Psi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\sin(\Psi - \chi) \frac{\partial U}{\partial \rho} + \cos(\Psi - \chi) \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cos(\Psi - \chi)}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \chi} + \\ + \frac{\sin(\Psi - \chi)}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \chi} + [U \cos(\Psi - \chi) + V \sin(\Psi - \chi)] \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \\ + \frac{1}{\rho} [-V \cos(\Psi - \chi) + U \sin(\Psi - \chi)] \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} = 0\end{aligned}$$

Далее будем исходить из конечности распада разрыва в окрестности особой точки (ограниченность скачков напряжений общепринята в математической теории пластичности). Поэтому естественно искать представление неизвестных искомым функций, удовлетворяющих системе уравнений (5.1), (5.2), в окрестности изолированной точки распада разрыва в виде

$$\sigma_1 = A_0(\chi) + A_1(\chi) + \rho^\alpha + \dots, \quad \sigma_2 = B_0(\chi) + B_1(\chi) \rho^\beta + \dots\quad (5.3)$$

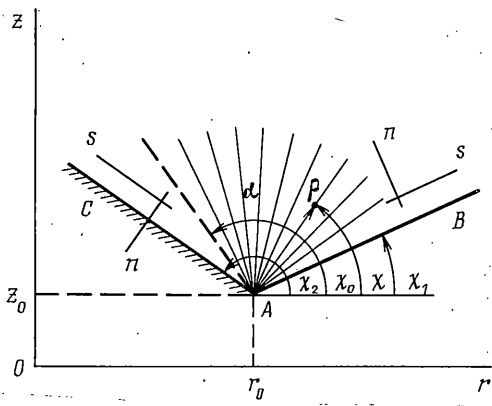
$$\Psi = C_0(\chi) + C_1(\chi) \rho^\gamma + \dots$$

$$U = U_0(\chi) + U_1(\chi) \rho^t + \dots, \quad V = V_0(\chi) + V_1(\chi) \rho^s + \dots; \quad \alpha, \beta, \gamma, t, s > 0$$

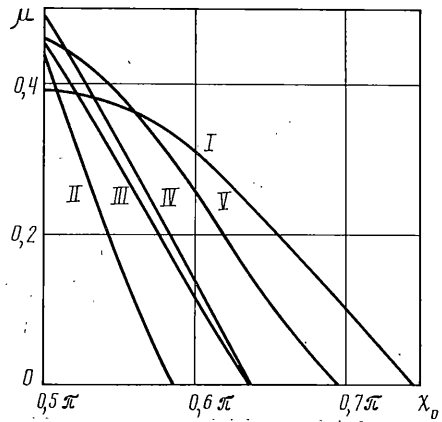
После подстановки (4.3) в уравнения (4.1), (4.2) и приравнивания нулю коэффициентов при степенях ρ^0, ρ^1 получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $A_0(\chi), B_0(\chi), C_0(\chi), U_0(\chi), V_0(\chi)$ в α -веере:

$$[\nu(\kappa - 1)(A_0 - B_0) - 2\kappa] \cos(C_0) = 0,\quad (5.4)$$

$$\sin(C_0 - \chi) A_0' - \nu(A_0 - B_0) \cos(C_0 - \chi) C_0' = 0$$



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\begin{aligned} (\kappa+1) [-U_0 \cos(C_0) + V_0 \sin(C_0)] &= 0, \\ (U_0' - V_0 C_0') \sin(C_0 - \chi) &= 0 \end{aligned}$$

в β -веере:

$$\begin{aligned} [v(\kappa+1)(A_0 - B_0) - 2\kappa] \sin(C_0) &= 0 \\ \cos(C_0 - \chi) B_0' + v(A_0 - B_0) \sin(C_0 - \chi) C_0' &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} (\kappa-1) [-U_0 \cos(C_0) + V_0 \sin(C_0)] &= 0, \\ (V_0' + U_0 C_0') \cos(C_0 - \chi) &= 0 \end{aligned}$$

Кроме того, последнее уравнение (5.2), выражающее равенство нулю главного сдвига, принимает вид

$$(U_0' - V_0 C_0') \cos(C_0 - \chi) + (V_0' + U_0 C_0') \sin(C_0 - \chi) = 0 \quad (5.6)$$

В уравнениях (5.4)–(5.6) штрих означает дифференцирование по χ .

Перейдем к анализу допустимых простейших решений (системы существенно нелинейны), рассматривая последовательно все возможные случаи.

Пусть $\kappa=1$, $v=1$ ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_0$; $\sigma_1 - \sigma_0 = 1$), тогда из (5.4) следует

$$\begin{aligned} C_0(\chi) &= \pm \pi/2 + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \dots) \\ A_0(\chi) &= \text{const}, \quad U_0 = \text{const}, \quad V_0 = 0 \end{aligned}$$

Следовательно пересечение α -линий не имеет места. Это же утверждение справедливо и при $\kappa=1$, $v=-1$ (грань $\sigma_2 - \sigma_0 = 1$, $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_0$). Для β -траекторий из первого уравнения (5.5) имеем $A_0 = B_0 + 1$, а второе и третье уравнения системы (5.5) удовлетворяются тождественно, если

$$\begin{aligned} B_0 &= b_0 \chi + b_1, \quad C_0 = \chi + \chi_0, \quad b_0, b_1 = \text{const} \\ \chi_0 &= \text{arccctg}(-1/b_0) + k\pi \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$b_0 > 0, \quad \pi/2(2k+1) < \chi_0 < \pi(k+1); \quad k=0, 1, \dots$$

$$b_0 < 0, \quad \pi(k-1) < \chi_0 < \pi/2(2k-1); \quad k=1, 2, \dots$$

т. е. имеет место β -веер. Из последнего уравнения (5.5) и уравнения (5.6) следуют выражения для компонент скоростей перемещений вдоль α - и β -линий в окрестности изолированной особой точки соответственно

$$U_0 = U_1 \sin \chi + U_2 \cos \chi, \quad V_0 = V_1 \sin \chi + V_2 \cos \chi \quad (5.8)$$

$$U_1, U_2, V_1, V_2 = \text{const}$$

Можно показать, что между постоянными U_1, \dots, V_2 существуют зависимости: $U_1=V_1, U_2=-V_2, V_1=V_2$, обусловленные тем, что для $\kappa=1$ вдоль β -линий $\varepsilon_\beta=0$ (1.17). При $\kappa=1, \nu=-1$ ($\sigma_2>\sigma_1>\sigma_\varphi, \sigma_2-\sigma_\varphi=1$) также имеют место соотношения (5.7), (5.8), лишь $A_0=-1+B_0$.

Перейдем теперь к значениям $\kappa=-1, \nu=1$ ($\sigma_2<\sigma_1<\sigma_\varphi, \sigma_\varphi-\sigma_2=1$). Тогда из первого уравнения (5.4) имеем $B_0=A_0-1$, а второе и третье уравнения (5.4) удовлетворяются, если

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0\chi + a_1, C_0 = \chi + \chi_0, a_0, a_1 = \text{const} \\ \chi_0 &= \text{arctg}(1/a_0) + k\pi, k = 0, \pm 1, \dots \\ a_0 > 0, \pi(k-1) < \chi_0 < \pi/2(2k-1), k &= 1, 2, \dots \\ a_0 < 0, \pi/2(2k+1)\chi_0 < \chi_0 < \pi(k+1), k &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

Для скоростей U_0, V_0 справедливы соотношения (5.8) с теми же соотношениями между постоянными U_1, \dots, V_2 ($U_1=V_1, U_2=-V_2, V_1=V_2$), которые в данном случае следуют из равенства $\varepsilon_\alpha=0$ ($\kappa=-1$) вдоль α -линий. Для значений $\kappa=-1, \nu=-1$, ($\sigma_1<\sigma_2<\sigma_\varphi, \sigma_\varphi-\sigma_1=1$) также справедливы соотношения (5.9), лишь $B_0=A_0+1$.

Далее из рассмотрения уравнений (5.5) со значениями $\kappa=-1$ и $\nu=1$ имеем

$$C_0 = k\pi, (k=0, \pm 1, \dots), B_0(\chi) = \text{const}, U_0 = \text{const}, V_0 = 0.$$

Пересечение β -линий не допускается. В таблице представлены решения (5.7)–(5.9) для наиболее употребительных случаев $a_0=b_0=\pm 1$. При этом строки 1–2 соответствуют α -вееру, а строки 3–4 – β -вееру, а также $U_0=V_1(\sin \chi - \cos \chi), V_0=V_1(\sin \chi + \cos \chi)$.

n	κ	ν	$\Psi_0(\chi)$	$\sigma_{01}(\chi)$	$\sigma_{02}(\chi)$
1	-1	1	$\chi + \frac{1}{4}\pi + k\pi$	$\chi + a$	$\chi + a - 1$
2	-1	-1	$\chi + \frac{3}{4}\pi + k\pi$	$-\chi + a$	$-\chi + a - 1$
3	1	1	$\chi + \frac{1}{4}\pi + k\pi$	$-\chi + b + 1$	$-\chi + b$
4	1	-1	$\chi + \frac{3}{4}\pi + k\pi$	$\chi + b + 1$	$\chi + b$

Таким образом, проведенный анализ решений уравнений (5.4)–(5.6) позволяет заключить: 1) в окрестности изолированной особой точки напряженного и деформированного состояния, соответствующего одной из граней призмы пластичности Треска – Сен-Венана, не могут существовать одновременно веера α и β -главных траекторий; 2) в изолированной особой точке всегда имеет место напряженное и деформированное состояние, описываемое ребром призмы пластичности.

Наконец, получим представление самой функции характеристических направлений (1.12) и ее первых производных в окрестности особой точки. Для этого по аналогии с (5.3) примем $\Phi = \Phi_0(\chi) + \rho^n \Phi_1(\chi) + \dots, \eta > 0$ и выразим дифференцирование по r и z через ρ и χ . Воспользуемся равенствами (1.11), (1.14), выражениями производных T, S в координатах ρ, χ и значениями функций $C_0(\chi), U_0(\chi), V_0(\chi)$ (см. таблицу). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi_0(\chi) &= 0, T_0(\chi) = \partial\Phi/\partial r|_{\rho \rightarrow 0} = 0 \\ S_0(\chi) &= \partial\Phi/\partial z|_{\rho \rightarrow 0} = S_0 = \text{const} \end{aligned}$$

В заключение проведенного анализа структуры распада разрыва отметим, что полученные ранее частные решения осесимметричной задачи теории идеальной пластичности [2] тривиально следуют без каких-либо дополнительных громоздких выкладок из уравнений (5.1), (5.2), в которых полагается $\Psi = \chi$, $r_0 = 0$.

6. Пример расчета распада разрыва. Не ограничивая общности, будем считать, что точка A представляет собой изолированную особую точку (фиг. 3), в окрестности BAC которой имеет место напряженное состояние $\sigma_\varphi > \sigma_1 > \sigma_2$ ($\sigma_\varphi - \sigma_2 = 1$) с параметрами $\kappa = -1$, $\nu = 1$. Граничные условия сформулируем в локальной системе координат n, t (см. фиг. 2). Со стороны контактной поверхности

$$\tau_{nt} = \mu \sigma_n, \quad u_t \sin \varphi_2 + U_n \cos \varphi_2 = v_0 \quad (6.1)$$

$$\mu, v_0 = \text{const}$$

где μ — коэффициент контактного трения, v_0 — вертикальная составляющая скорости перемещения. На участке BA имеет место свободная поверхность

$$\tau_{nt} = 0, \quad \sigma_n = 0 \quad (6.2)$$

Вспользуемся далее известными соотношениями для компонент тензора напряжений при повороте ортогональной системы координат на угол φ :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma - \tau \cos 2(\Psi - \varphi), & \tau_{nt} &= \tau \sin 2(\Psi - \varphi) \\ \sigma &= (\sigma_1 + \sigma_2)/2, & \tau &= \nu(\sigma_1 - \sigma_2)/2 \end{aligned}$$

Здесь φ принимает значения φ_1, φ_2 (фиг. 3), а для $\sigma_1, \sigma_2, \Psi, U, V$ примем их значения в α -веере (таблица). Тогда, в соответствии с (6.1), (6.2), окончательно будем иметь выражения для компонент тензора напряжений и скоростей перемещений в изолированной особой точке A :

$$\begin{aligned} \sigma_{10} &= -\chi + \varphi_1 + \pi/4, & \sigma_{20} &= -\chi + \varphi_1 + \pi/4 - 1, & \Psi_0 &= \chi + 3\pi/4 \\ U_0 &= -2^{-1/2} v_0 (\sin \chi - \cos \chi), & V_0 &= -2^{-1/2} v_0 (\sin \chi + \cos \chi) \\ \varphi_1 - \pi/4 &\leq \chi \leq \varphi_2 + \chi_0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Обратим особое внимание на угол χ_0 , возникающий при $\mu \neq 0$ ($\tau_{n|CA} = -\mu \sigma_{n|CA}$) и определяемый из уравнения

$$\mu = -\frac{2 \sin \gamma}{-4\chi_0 + 4\varphi_1 + \pi - 2 - 2 \cos \gamma}, \quad \gamma = 2\chi_0 - 1,5\pi - 2\varphi_2 \quad (6.4)$$

т. е. при фиксированных значениях $\varphi_1, \varphi_2, \mu$ существует значение $\Psi_0 = \chi_0 + 3\pi/4$ — угла раскрытия веера α -характеристик, внутри которого осуществляется распад разрыва при переходе через точку A . Так из (6.4) имеем два крайних случая:

$$\begin{aligned} \tau_{n|CA} &= 0, & \chi_0 &= \varphi_2 - \pi/4 & (\Psi_0 &= \varphi_2 + \pi/2) \\ \tau_{n|CA} &= 1/2, & \chi_0 &= \varphi_2 - \pi/2 & (\Psi_0 &= \varphi_2 + \pi/4) \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует диапазон изменения коэффициента контактного трения $0 \leq \mu \leq 2/[2 - 3\pi + 4(\varphi_2 - \varphi_1)]$, который может быть учтен в рамках идеально пластической модели. В качестве примера на фиг. 4 изображены зависимости $\mu(\chi_0)$ для различных значений углов свободной и контактной поверхностей (I — $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$; II — $\varphi_1 = \pi/36, \varphi_2 = 17\pi/18$; III — $\varphi_1 = \pi/36, \varphi_2 = 8\pi/9$; IV — $\varphi_1 = \pi/18, \varphi_2 = 8\pi/9$; V — $\varphi_1 = \pi/12, \varphi_2 = 5\pi/6$), из которых для заданного значения μ определяется соответст-

вующий угол $\chi_0(\mu)$ веера α -характеристик распада разрыва. После чего расчет самой особенности в точке A осуществляется по формулам (6.3).

В заключение не составляет труда понять, что после количественной оценки особенности можно переходить к численному решению контактной осесимметричной задачи теории идеальной пластичности с неизвестной заранее свободной поверхностью, отвечающей грани призмы пластичности Треска — Сен-Венана. При этом следует воспользоваться функцией характеристических направлений (1.12) и расчетными формулами (37), (38) метода характеристик первого и второго порядка точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shield R. T.* On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1955. No. 1193. P. 267–287.
2. *Липпман Г.* Теория главных траекторий при осесимметричной пластической деформации // Механика. Период. сб. перев., иностр. статей. 1963. № 3. С. 155–167.
3. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
4. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
5. *Штейн М. Ш.* Об одном варианте регуляризации уравнений идеальной пластичности в случае осевой симметрии // ПМТФ. 1984. № 3. С. 132–140.
6. *Курант Р.* Уравнение с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
7. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.
8. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математическая теория неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.

Тернополь

Поступила в редакцию
3.XII.1990