МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1992

УДК 539.3

 А. М. ФИЛИМОНОВ

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ ОДНОМЕРНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОСТЬЮ И ОСОБЕННОСТИ СООТВЕТСТВУЮЩИХ НЕЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Построены серии точных решений некоторых задач о продольных колебаниях одномерной сплошной среды с определяющими соотношениями, обобщающими на нелинейный случай соотношения линейной теории вязко-упругости. Рассмотрены особенности возникающих при этом нелинейных спектральных задач. Показано, что, несмотря на неоднозначность спектра соответствующего нелинейного оператора, можно однозначно построить серии точных решений. Эти решения представляют самостоятельный интерес (они являются нелинейными аналогами стоячих волн), а также могут быть использованы в качестве модельных примеров при анализе соответствующих разностных схем.

1. Введение. Линейный случай. Рассмотрим уравнение продольных колебаний одномерной сплошной среды

$$\rho\partial^2u/\partial t^2=\partial\sigma/\partial x-\eta\partial u/\partial t \tag{1.1}$$

где $u(x, t)$ — продольное перемещение сечения среды с лагранжевой координатой x в момент времени t; $\sigma(x, t)$ — сила, с которой правая часть среды в сечении x воздействует на левую часть; $\rho=\text{const}>0$ — линейная плотность; $\eta=\text{const}>0$.

Если рассматриваемая сплошная среда обладает свойствами ползучести и релаксации, то определяющее соотношение можно взять как в виде интегрального соотношения [1] типа

$$\sigma(x,t)=\varepsilon(x,t)+\int\limits_{-\infty}^{t} K(x,t-\tau)\varepsilon(x,\tau)\,d\tau \tag{1.2}$$

где $\varepsilon(x, t)=u_x(x, t)$, так и в виде дифференциального соотношения [2] типа

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{\partial^k\sigma}{\partial t^k}=\sum_{j=0}^{m} b_j\frac{\partial^j\varepsilon}{\partial t^j} \tag{1.3}$$

которое может быть переписано и в виде интегрального соотношения типа (1.2) за счет соответствующего выбора ядра $K(x, t)$.

Используя определяющее соотношение (1.3), из (1.1) можно получить уравнение продольных колебаний одномерной сплошной среды с линейным законом ползучести и релаксации. В случае $\eta=0$, $n=1$, $m=1$ такое уравнение было получено и исследовано А. Ю. Ишлинским в [3], а в более общем случае (1.3) [2].

2. Нелинейный случай. Для нелинейного случая интегральное соотношение (1.2) может быть обобщено различными способами, например в виде соотношения Работнова [1]:

$$\sigma(x,t)=\varphi\left(\varepsilon(x,t)+\int\limits_{-\infty}^{t} K(x,t-\tau)\,\varepsilon(x,\tau)\,d\tau\right)$$

или соотношения Лидермана — Розовского [4]:

$$\sigma(x,t)=\varphi(\varepsilon(x,t))+\int\limits_{-\infty}^{t} K(x,t-\tau)\,\psi(\varepsilon(x,\tau))\,d\tau$$

где φ, ψ — заданные функции.

Соотношение (1.3) также можно обобщить для нелинейного случая, например, следующим образом (F и G — заданные функции):

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{\partial^k\sigma}{\partial t^k}=F\left(\varepsilon,\frac{\partial\varepsilon}{\partial t},\ldots,\frac{\partial^m\varepsilon}{\partial t^m}\right) \tag{2.1}$$

$$G\left(\sigma,\frac{\partial\sigma}{\partial t},\ldots,\frac{\partial^n\sigma}{\partial t^n}\right)=\sum_{j=0}^{m} b_j\frac{\partial^j\varepsilon}{\partial t^j} \tag{2.2}$$

Эти дифференциальные соотношения могут быть записаны и в виде соответствующих интегральных зависимостей типа соотношения Лидермана — Розовского. Например, для (2.1) это соотношение имеет вид

$$\sigma(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\Phi(x,t-\tau)\,F\left(\varepsilon(x,\tau),\ldots,\frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\varepsilon(x,\tau)\right)d\tau$$

где Φ — фундаментальное решение линейного оператора, соответствующего левой части равенства (2.1).

Используя соотношения (2.1) и (2.2) можно получить уравнения продольных колебаний соответствующей одномерной среды.

Действительно, последовательно дифференцируя основное уравнение движения (1.1) по t и дифференцируя определяющее соотношение (2.1) по x, получаем уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\rho\frac{\partial^{k+2}u}{\partial t^{k+2}}+\eta\frac{\partial^{k+1}u}{\partial t^{k+1}}\right)=\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_j}\,\frac{\partial^{j+2}u}{\partial x^2\,\partial t^j} \tag{2.3}$$

где введено обозначение $\varepsilon_j=\partial^j\varepsilon/\partial t^j$.

В частном случае, когда $n=1$, $m=1$, $\eta=0$, а функция F — линейная: $F(\varepsilon,\varepsilon_t)=b_0\varepsilon+b_1\varepsilon_t$, уравнение (2.3) совпадает с уравнением Ишлинского [3].

Аналогично, дифференцируя уравнение движения (1.1) по x, а затем последовательно дифференцируя полученный результат по t и продифференцировав определяющее соотношение (2.2) по t, получим

$$\rho\partial^2\varepsilon/\partial t^2+\eta\,\partial\varepsilon/\partial t=\partial^2\sigma/\partial x^2$$

$$\sum_{j=0}^{n} b_j \frac{\partial^{j+1}\varepsilon}{\partial t^{j+1}} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial G}{\partial \sigma_k} \frac{\partial \sigma^{k+1}}{\partial t^{k+1}} \tag{2.4}$$

где введено обозначение $\sigma_k = \partial^k\sigma/\partial t^k$. Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \eta & \rho & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \eta & \rho & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

Если $\Delta \neq 0$, то из (2.4) можно найти величины ε_{j+1} $(j=0,\ldots,n)$ и, подставив их в последнее уравнение системы (2.4), получить уравнение для функции $\sigma(x,t)$. В случае когда $\eta=0$, результат упрощается и соответствующее уравнение для функции $\sigma(x,t)$ может быть записано в виде

$$\rho \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\partial^{j+2}\sigma}{\partial x^2\, \partial t^j} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial G}{\partial \sigma_k} \frac{\partial^{k+1}\sigma}{\partial t^{k+1}} \tag{2.5}$$

Если же $\Delta=0$, то также можно получить соответствующее уравнение для функции $\sigma(x,t)$, однако ввиду громоздкости окончательных формул ограничимся случаем, когда $m=1$, $\eta\neq 0$. В этом случае $\Delta=\rho b_0-\eta b_1$, так что, обозначив $\delta=b_0/\eta=b_1/\rho$, из последнего уравнения системы (2.4) получим

$$\delta \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial G}{\partial \sigma_k} \frac{\partial \sigma^{k+1}}{\partial t^{k+1}} \tag{2.6}$$

3. Точные решения нелинейных уравнений. В ряде случаев, если функции F, G принадлежат к некоторым определенным классам, соответствующие уравнения колебаний (2.3), (2.5), (2.6) допускают построение серий точных решений. При построении таких решений используется следующий вспомогательный простой результат.

Утверждение 1. Пусть функции R_p, S_q, W_p, V_q, Φ_n, Ψ_d являются однородными функциями своих аргументов, причем нижний индекс указывает на порядок однородности ($p>0$, $q>0$, $n>0$, $d>0$). Пусть для $l>0$ при любом значении параметра $\lambda>0$ существует решение $X_\lambda(x)$ краевой задачи

$$R_p(X_\lambda(x),\ldots,X_\lambda^{(k)}(x))+\lambda S_q(X_\lambda(x),\ldots,X_\lambda^{(k)}(x))=0 \tag{3.1}$$

$$\Phi_n(X_\lambda(0),\ X_\lambda(l),\ldots,\ X_\lambda^{(k)}(l))=0,\quad \Psi_d(X_\lambda(0),\ X_\lambda(l),\ldots,\ X_\lambda^{(k)}(l))=0 \tag{3.2}$$

Пусть при любом $\lambda>0$ для любых начальных условий существует решение $T_\lambda(t)$ задачи Коши для уравнения

$$V_q(T_\lambda(t),\ldots,T_\lambda^{(r)}(t))+\lambda W_p(T_\lambda(t),\ldots,T_\lambda^{(r)}(t))=0 \tag{3.3}$$

Для каждого $\lambda>0$ введем функцию $u_\lambda(x,t)=X_\lambda(x)T_\lambda(t)$. Фиксируем некоторое произвольное $\lambda=\mu$. Тогда если $p\neq q$, то для любого $\lambda=\nu>0$ существуют такие $X_\nu(x)$, $T_\nu(t)$, что $u_\mu(x,t)=u_\nu(x,t)$.

Доказательство. Для произвольной константы $D>0$ положим $Y(x)=X_\mu(x)/D$, $Z(t)=DT_\mu(t)$. Тогда $Z(t)Y(x)=X_\mu(x)T_\mu(t)$ и из (3.1) и (3.3) следует, что

$$D^pR_p(Y,\ldots,Y^{(k)})+\mu D^qS_q(Y,\ldots,Y^{(k)})=0 \tag{3.4}$$

$$D^{-q}V_q(Z,\ldots,Z^{(r)})+\mu D^{-p}W_p(Z,\ldots,Z^{(r)})=0$$

Для произвольного $\nu>0$, полагая $D=(\nu/\mu)^{1/(q-p)}$, получим, что $Y(x)=X_\nu(x)$, $Z(t)=T_\nu(t)$, что и завершает доказательство.

Определение. Пару, состоящую из задачи (3.1), (3.2) и уравнения (3.3), при выполнении условий утверждения 1, будем называть сопряженной парой.

Перейдем теперь к построению решений уравнения (2.3). Пусть функция F имеет вид

$$F(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_m)=\sum_{j=0}^{m} b_j \left|\frac{\partial^{m_j}}{\partial t^{m_j}}\varepsilon\right|^{p-1}\frac{\partial^j}{\partial t^j}\varepsilon \tag{3.5}$$

где $m_j\geqslant 0$ — целые числа, а $p>0$ — вещественное. Тогда уравнение (2.3) может быть переписано в виде

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\rho\frac{\partial^{k+2}}{\partial t^{k+1}}u+\eta\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}}u\right)=\frac{\partial}{\partial x}\sum_{j=0}^{m} b_j\left|\frac{\partial^{m_j+1}}{\partial t^{m_j}\partial x}u\right|^{p}\frac{\partial^{j+1}}{\partial t^j\partial x}u \tag{3.6}$$

Для этого уравнения можно поставить краевую задачу, например, с закрепленными границами. При этом в общем случае еще необходимо задать начальные условия

$$u(x,0)=\alpha_0(x),\ldots,\ \frac{\partial^{M-1}}{\partial t^{M-1}}u(x,0)=\alpha_{M-1}(x),\qquad M=\max\{m_j,m,n+2\} \tag{3.7}$$

где $\alpha_0(x),\ldots,\alpha_{M-1}(x)$ — заданные функции. Конечно, трудно надеяться получить точное решение такой задачи при достаточно произвольных функциях $\alpha_0,\ldots,\alpha_{M-1}$. Оказывается, однако, что если эти начальные функции имеют специальный вид, то построение таких точных решений возможно. При этом для обычного линейного волнового уравнения эти точные решения соответствуют стоячим волнам.

В начале в качестве примера рассмотрим уравнение (2.3) при $n=0$, $m=0$, $\eta=0$, $m_j=0$. В этом случае уравнение (2.3) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u=a^2\left|\frac{\partial}{\partial x}u\right|^{p-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u,\qquad a^2=b_0p/\rho \tag{3.8}$$

Заметим, что если положить $a^2=Bph^{p+1}/M_0$, то это же уравнение (3.8) можно рассматривать в качестве континуального аналога задачи о продольных колебаниях одномерной цепочки дискретных материальных точек, масса каждой из которых равна M_0. При этом расстояние между соседними точками в статически равновесном состоянии равно h, а сила σ, возникающая при изменении расстояния между смежными точками на величину Δ, изменяется по закону

$$\sigma=B|\Delta|^p\operatorname{sgn}\Delta,\qquad B=\text{const}>0,\qquad p>0 \tag{3.9}$$

В этом случае $u(jh,t)$ — это продольное перемещение j-й точки в момент времени t.

Примечание. В отличие от зависимости $\sigma=C\Delta+B|\Delta|^p\operatorname{sgn}\Delta$, рассмотренной в [5, 6] в связи с проблемой Ферми, Пасты, Улама [7], в случае соотношения (3.9) континуальный аналог цепочки, получающийся с помощью формулы Тейлора путем отбрасывания малых высших порядков по h [8], совпадает с уравнением колебаний сплошной среды с определяющим сотношением, аналогичным (3.9).

Уравнение (3.8) имеет решения в виде стоячих волн $u=X(x)T(t)$

[9, 10], причем

$$d(|X'(x)|)^{p-1}X'(x)/dx+\lambda X(x)=0 \qquad (3.10)$$

$$d^2T(t)/dt^2+a^2\lambda|T(t)|^{p-1}T(t)=0 \qquad (3.11)$$

где λ — произвольный параметр. Если $\lambda>0$, то решения уравнений (3.10), (3.11) будут периодическими функциями [10].

Пусть A_X, Π_X — амплитуда (т. е. максимальное значение) и период функции $X(x)$, а A_T, Π_T — амплитуда и период функции $T(t)$. Обозначим $A=A_xA_T$. Тогда имеет место следующий результат.

Утверждение 2. Справедливы следующие равенства:

$$\lambda=\frac{A_X^{p-1}}{\Pi_X^{p+1}}D_1=\frac{D_2}{a^2A_T^{p-1}\Pi_T^2}, \qquad A^{p-1}=\frac{\Pi_X^{p+1}}{\Pi_T^2}\frac{D_2}{a^2D_1} \qquad (3.12)$$

$$D_1=\frac{2}{p+1}\left(\frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-1/(p+1))}{\Gamma(3/2-1/(p+1))}\right)^{p+1}, \qquad D_2=\frac{8\pi}{p+1}\left(\frac{\Gamma(1/(p+1))}{\Gamma(1/2+1/(p+1))}\right)^2 \qquad (3.13)$$

Доказательство. Достаточно заметить, что первые интегралы уравнений (3.10), (3.11):

$$\frac{1}{p+1}|X'(x)|^{p+1}+\frac{1}{2}\lambda X^2(x)=C_1, \qquad \frac{1}{2}\dot{T}^2(t)+\frac{a^2\lambda}{p+1}|T(t)|^{p+1}=C_2$$

соответствуют замкнутым траекториям на фазовых плоскостях. Поэтому, найдя выражение для величин A_X, Π_X, A_T, Π_T через λ, C_1, C_2, можно выразить параметр λ через A_X, Π_X, A_T, Π_T. Таким образом получаются соотношения (3.12), (3.13).

Следствие. Для каждых фиксированных $l>0$, $A>0$, $p>0$ существует счетный набор периодических по t решений уравнения (3.8) в виде стоячих волн $u(x,t)=X(x)T(t)$.

Действительно, для построения периодической по t и x стоячей волны нужно знать значения A_X, Π_X, A_T, Π_T. Поэтому если заданы краевые условия, например $u(0,t)=u(l,t)=0$, то они позволяют определить счетный набор значений величины $\Pi_X=\Pi_X(N)=2l/N$, где натуральное число N задает основной тон ($N=1$) или высшие тоны колебаний ($N>1$). Если, кроме того, известна амплитуда A в пучности стоячей волны, то из (3.12) можно определить значение $\Pi_T=\Pi_T(N)$. Таким образом, при заданных величинах A, l можно однозначно построить счетный набор решений указанного вида для уравнения (3.8).

При этом значение λ остается неопределенным (если $p\neq1$), так как оно зависит от неизвестной величины A_X, определяющей нормировку функции $X(x)$. Тем не менее серия решений $u=X(x)T(t)$ при заданных величинах $l>0$, $A>0$ строится однозначно.

Непосредственно видно, что уравнения (3.10), (3.11) образуют сопряженную пару. Поэтому, в силу утверждения 1, можно положить $\lambda=D_1/\Pi_X^{p-1}$, так что $A_X=1$.

В этом случае амплитуда A_T функции $T(t)$ становится равной величине A — амплитуде стоячей волны $u=X(x)T(t)$ в ее пучности. Отметим, что «наблюдаемой» физической величиной является именно константа $A=A_XA_T$, а не величины A_X, A_T по отдельности. Поэтому такой выбор нормировки функции $X(x)$ позволяет придать непосредственный физический смысл величине A_T.

Из разобранного примера, в частности, вытекает возможность построения периодических по t решений уравнения (3.8) при немонотонных начальных условиях. Более подробный анализ показывает, что для таких решений возникает ветвление характеристик, причем это явление происходит таким образом, что ударная волна не образуется.

Оказывается, что и в общем случае для уравнения (2.3) можно построить решения аналогичного вида. Рассмотрим, например, задачу с закрепленными границами $u(0,t)=u(l,t)=0$, $l>0$.

Утверждение 3. Для каждых фиксированных $l>0$, $A_0,\dots,A_{M-1}$ существует счетный набор решений $u=X(x)T(t)$ уравнения (2.3), где функции $X(x)$, $T(t)$ — это решения задач

$$\frac{d}{dx}(|X'(x)|^{p-1}X'(x))+\frac{D_1}{\Pi_X^{p-1}}X(x)=0$$

$$X(0)=X(l)=0,\qquad \Pi_X=2l/N$$

$$\sum_{k=0}^{n}a_k(\rho T^{(k+2)}(t)+\eta T^{(k+1)}(t)+\frac{D_1}{\Pi_X^{p-1}}\sum_{j=0}^{m}b_j|T^{(m_j)}(t)|^pT^{(j)}(t)=0,$$

$$T(0)=A_0,\dots,\quad T^{(M-1)}(0)=A_{M-1}$$

где D_2 вычисляется по формуле (3.13).

Доказательство. Непосредственно проверяется, что уравнение (2.3) допускает решения вида $u=X(x)T(t)$, причем соответствующие уравнения для $X(x)$, $T(t)$ образуют сопряженную пару, причем уравнение для $X(x)$ совпадает с уравнением (3.10). Поэтому можно положить $\lambda=D_1/\Pi_X^{n-1}$, так что требуемый результат вытекает из следствия утверждения 2.

Обращаясь к анализу уравнения (1.1) с определяющим соотношением (2.2), ограничимся рассмотрением уравнений (2.5) и (2.6). Пусть

$$G(\sigma_0,\dots,\sigma_n)=\sum_{k=0}^{n}a_k\left|\frac{\partial^{n_k}}{\partial t^{n_k}}\sigma\right|^{p-1}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\sigma \tag{3.14}$$

где $n_k\geqslant 0$ — целые числа, а $p>0$ — вещественное. Обозначим через $L=\max\{n_k,n,m+2\}$. Тогда уравнения (2.5) и (2.6) примут соответственно вид

$$\rho\sum_{j=0}^{m}b_j\frac{\partial^{j+2}}{\partial x^2\,\partial t^j}\sigma=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{k=0}^{n}a_k\left|\frac{\partial^{n_k}}{\partial t^{n_k}}\sigma\right|^{p_1}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\sigma \tag{3.15}$$

$$\delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma=\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=0}^{n}a_k\left|\frac{\partial^{n_k}}{\partial t^{n_k}}\sigma\right|^{p}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\sigma \tag{3.16}$$

Рассмотрим, например, задачу с свободными границами, т. е. случай, когда силы, приложенные к концевым сечениям среды, равны нулю: $\sigma(0,t)=\sigma(l,t)=0\quad(l>0)$.

Утверждение 4. При каждых фиксированных $l>0$, $A_0,\dots,A_{L-1}$ для уравнения (3.15) существует счетный набор решений вида $\sigma(x,t)=Y(x)R(t)$, где функции $Y(x)$ и $R(t)$ — это решения задач

$$Y''(x)+\frac{D^2}{\Pi_Y^2}|Y(x)|^{p-1}Y(x)=0,\quad Y(0)=Y(l)=0,\quad \Pi_Y=2l/N \tag{3.17}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_{k=0}^{n} a_k\,|R^{(n_k)}(t)|^p R^{(k)}(t)+$$

$$+\rho\frac{D_2}{\Pi_Y^2}\sum_{j=0}^{m} b_j R^{(j)}(t)=0,\qquad R(0)=A_0,\ldots,R^{(L-1)}(0)=A_{L-1}$$

где D_2 вычисляется по формуле (3.13).

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что уравнение (3.15) допускает решения в виде стоячих волн $\sigma=Y(x)R(t)$, причем уравнение для функции $Y(x)$ совпадает с уравнением (3.11) при $a^2=1$. Кроме того, соответствующие уравнения для $Y(x)$ и $R(t)$ образуют сопряженную пару. Поэтому из утверждения 2 следует, что можно выбрать такую нормировку функции $Y(x)$, чтобы $\max|Y(x)|=1$. Для этого достаточно положить $\lambda=D_2/\Pi_Y^2$, что и завершает доказательство.

Поскольку $\sigma(x,0)=A_0Y(x)$, отметим, что выбранная таким образом нормировка функции $Y(x)$ позволяет считать, что физический смысл константы A_0 — это максимальное значение силы $\sigma(x,t)$ в пучности стоячей волны $\sigma=Y(x)R(t)$.

Утверждение 5. При каждых фиксированных $l>0$, $A_0,\ldots,A_{L-1}$ для уравнения (3.16) существует счетный набор решений вида $\sigma=Y(x)S(t)$, где $Y(x)$ — это решение задачи (3.17), а $S(t)$ — решение задачи

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{n} a_k\,|S^{(n_k)}(t)|^p S^{(k)}(t)+$$

$$+\frac{D_2}{\Pi_Y^2}\delta\ddot{S}(t)=0,\qquad S(0)=A_0,\ldots,S^{(L-1)}(0)=A_{L-1}.$$

Доказательство этого утверждения совершенно аналогично доказательству утверждения 4.

Общее замечание. Известно, что спектр нелинейного оператора, вообще говоря, может не однозначно определяться граничными условиями. Примерами могут служить обобщение проблемы Лагранжа об оптимизации формы колонны [11], а также некоторые экстремальные задачи теории приближений [12—14].

Однако в упомянутых задачах имеются дополнительные условия нормировки собственной функции, причем эти условия естественно возникают в связи с самой постановкой задачи. Так, при решении проблемы Лагранжа возникает необходимость в отыскании первого собственного значения в следующей задаче [11]:

$$Y''(x)+\lambda Y^{(n+1)/(n-1)}(x)=0,\quad Y(0)=Y(1)=0,\quad \int_0^1 Y^{2n/(n-1)}(x)\,dx=1 \qquad (3.18)$$

При отыскании колмогоровских поперечников соболевских классов возникают задачи, например, типа следующей [14]:

$$\frac{d}{dx}\left(|X'(x)|^{p-1}X'(x)\right)+\lambda\,|X(x)|^{q-1}X(x)=0$$

$$X(0)=X(1)=0,\qquad \int_0^1 |X'|^{p-1}\,dx=1 \qquad (3.19)$$

Дополнительное интегральное условие в (3.18) или в (3.19) позволяет однозначно определить соответствующие собственные значения и собственные функции.

Однако в рассмотренных нами задачах (3.4), (3.8), (3.15), (3.16) условие нормировки отсутствует в постановке исходного вопроса. Тем не менее, хотя спектр соответствующего нелинейного оператора не определяется однозначно краевыми условиями, благодаря свойствам сопряженной пары уравнений (3.6), (3.7) оказывается возможным однозначное построение решения исходного уравнения с частными производными.

Наконец, отметим, что степенные зависимости типа (3.5) и (3.14) встречаются в различных задачах механики. Так, например, в [15] приведено построение приближенного решения задачи о колебаниях стержня конечной длины с определяющим соотношением вида $\sigma=b_0|\varepsilon|^p \operatorname{sgn} \varepsilon+$ $+b_1|\dot\varepsilon|^q \operatorname{sgn} \dot\varepsilon$, которое при $p=q$ является частным случаем соотношения (3.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
2. *Бленд Д.* Теория линейной вязко-упругости. М.: Мир, 1965. 199 с.
3. *Ишлинский А. Ю.* Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 79–92.
4. *Локшин А. А., Сагомонян Е. А.* Нелинейные волны в механике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1989. 144 с.
5. *Zabusky N. J.* Exact solution for the vibrations of a nonlinear continuous model string // J. Math. Phys. 1962. V. 3. № 5. P. 1028–1039.
6. *Mac-Camy R. C., Mizel V. J.* Existence and nonexistence in the large of solutions of quasilinear wave equations // Arch. Rat. Mech. Analus. 1967. V. 25. № 4. P. 299–320.
7. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies of nonlinear problems // Collected works of E. Fermi. Chicago: Univ. Press, 1965. V. 2. P. 978–988.
8. *Додд Р. К., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
9. *Похожаев С. И.* О периодических решениях некоторых нелинейных гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1971. Т. 198. № 6. С. 1274–1277.
10. *Филимонов А. М.* Периодические решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 11. С. 2076–2084.
11. *Tadibakhsh I., Keller J.* Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues // Trans. ASME. Ser. E. 1962. V. 29. № 1. P. 159–164.
12. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 304 с.
13. *Буслаев А. П.* Экстремальные задачи теории приближений и нелинейные колебания // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 6. С. 1289–1294.
14. *Буслаев А. П., Тихомиров В. М.* Спектры нелинейных дифференциальных уравнений и поперечники соболевских классов // Мат. сб. 1990. Т. 181. № 12. С. 1587–1606.
15. *Пальмов В. А.* Колебания упругопластических тел. М.: Наука, 1976. 328 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.XII.1990