МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1992

УДК 539.3

© 1992 г. Л. Г. ЕНИКЕЕВА, А. А. ЛОКШИН

НЕЛИНЕЙНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ SH-ВОЛНЫ ОТ ГРАНИЦЫ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

Рассмотрим однородное полупространство $z>0$ (в пространстве xyz) с модулем сдвига, равным μ и плотностью ρ. В данной задаче будет исследоваться отражение SH-волны от границы этого полупространства. Напомним, что в SH-волне перемещение $\mathbf{u}$ всегда перпендикулярно направлению распространения волны. Поскольку в данной задаче рассматриваются только плоские SH-волны, без ограничения общности можно считать, что у этих волн вектор нормали к фронту лежит в плоскости xy и, следовательно, отлична от нуля только y-компонента перемещения.

Напомним также [1], что в плоской SH-волне напряжения связаны с перемещением $\mathbf{u}=(0, u, 0)$ по формуле

$$(\sigma_{zx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})=(0, \mu\partial u/\partial z, 0) \tag{1}$$

Будем предполагать, что граница $z=0$ полупространства испытывает нелинейное трение, рассчитанное на единицу поверхности и направленное в сторону, противоположную скорости горизонтального смещения

$$F=(0, -F(\partial u/\partial t), 0), \; F(0)=0, \; F'>0 \tag{2}$$

Ясно, что условие равенства нулю суммы сил, действующих на бесконечно тонкий элемент, примыкающий к границе $z=0$, запишется в виде $\sigma_{yz}+F=0$, откуда в силу (1), (2):

$$\mu\partial u/\partial z=F(\partial u/\partial t) \quad (z=0) \tag{3}$$

Поставим теперь следующую задачу. Пусть на границу $z=0$ нашего полупространства набегает плоская SH-волна перемещений.

$$\mathbf{u}_1=(0, u^{\text{пад}}, 0), \qquad u_1=f\left(t-\frac{\sin j}{\beta}x+\frac{\cos j}{\beta}z\right) \tag{4}$$

Здесь $\beta=\sqrt{\mu/\rho}$ — скорость сдвиговых волн; j — острый угол между направлением распространения волны и осью Oz. Кроме того, предполагается, что $f(\xi)=0$ при $\xi<0$. Требуется определить волну, отраженную от границы.

Как хорошо известно [1], y-компонента смещения в SH-волне, направление распространения которой лежит в плоскости xz, должна удовлетворять линейному волновому уравнению

$$\partial^2 u/\partial t^2-\beta^2(\partial^2 u/\partial x^2+\partial^2 u/\partial z^2)=0 \tag{5}$$

Ясно, что плоская волна (4) удовлетворяет этому уравнению. Будем искать отраженную волну в виде $(0, u_2, 0)$, где

$$u_2=\varphi\left(t-\frac{\sin j}{\beta}x-\frac{\cos j}{\beta}z\right) \tag{6}$$

Очевидно, что (6) также удовлетворяет волновому уравнению (5). В силу линейности волнового уравнения (5) сумма

$$u=u_1+u_2 \tag{7}$$

снова будет решением этого уравнения. Теперь, чтобы определить $u^{\text{отраж}}$, воспользуемся граничным условием (3). Имеем, подставляя (7) в (3),

$$\mu\frac{\partial}{\partial z}(u_1+u_2)=F\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial t}\right);\qquad z=0$$

или, что то же самое в силу (4), (6):

$$f'(\xi)-\varphi'(\xi)=\frac{\beta}{\mu\cos j}F(f'(\xi)+\varphi'(\xi)),\qquad \xi=t-\frac{\sin j}{\beta}x \tag{8}$$

Важной особенностью уравнения (8) является то, что функции f' и φ' входят в него с одинаковыми аргументами. Нетрудно видеть, что уравнение (8) относительно φ' однозначно разрешимо при каждом ξ. Действительно, фиксируем произвольное ξ. Тогда в силу монотонного возрастания функции φ' правая часть (8) является монотонно возрастающей функцией от φ', а левая часть (8) является монотонно убывающей функцией от φ'. Поэтому каждому значению f' соответствует одно и только одно значение φ', при котором равенство (8) удовлетворяется.

Обозначим полученное решение уравнения (8) через $\varphi'(\xi)=$ $=G(f'(\xi))$ и положим

$$\varphi(\xi)=\int\limits_0^\xi G(f'(\xi))\,d\xi \tag{9}$$

Такой выбор первообразной для функции φ' соответствует предположению о том, что в области, куда падающая волна еще не пришла, смещение равно нулю. Формулы (6), (9) и решают поставленную задачу о нахождении отраженной волны.

Замечание. Пусть функция $f(\xi)$ отлична от нуля лишь на промежутке $[0, A]$. Тогда, если функция G отлична от линейной (что соответствует случаю, когда функция F отлична от линейной), то функция (9) уже не будет сосредоточена на $[0, A]$, а будет на луче $[A, +\infty)$ тождественно равняться постоянной

$$\varphi(A)=\int\limits_0^A G(f'(\xi))\,d\xi$$

Величина $\varphi(A)$ представляет собой остаточное постоянное смещение, возникающее после прохождения падающей волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т. 1. М.: Мир, 1983.

Москва

Поступила в редакцию 5.IX.1990