МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1992

УДК 539.3

© 1992 г. А. А. КАСУМОВ, Д. Н. СОБОЛЕВ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Вопрос о введении обобщенной переменной жесткости в оператор стохастической краевой задачи для расширения области с целью перехода в ней к детерминированным граничным условиям исследовался в [1]. В [2] методика развивалась в направлении применения конечных интегральных преобразований Фурье для расчета изолированных балок и плит на дискретных упругих опорах со случайными жесткостными характеристиками[1]. Дальнейшее развитие методика получила в [3—5], на примере решения задач об изгибе изолированных балок и прямоугольных плит на упругом основании, приводящих краевую задачу к граничным интегральным уравнениям.

В публикуемой работе рассматривается применение двустороннего преобразования Лапласа к решению наиболее характерных краевых задач об изгибе прямоугольных плит на упругом основании. Приводится способ вычисления интеграла Меллина с помощью ортогонального разложения неизвестных изображений на контуре области, что сильно облегчает процесс получения оригинала искомой функции. С помощью этой методики построено решение задачи об изгибе изолированной прямоугольной плиты на деформируемом основании от действия произвольной внешней нагрузки.

1. Функциональные интегральные преобразования в ограниченных областях. Введем интеграл Лапласа ($p=\sigma+is$ — комплексное переменное):

$$f(p)=\int_{a_1}^{a_2} F(x)\,e^{-px}dx \tag{1.1}$$

С помощью функции Хевисайда H интеграл (1.1) можно записать в форме двустороннего преобразования

$$f(p)=\int_{-\infty}^{\infty} I(x,a_1,a_2)\,F(x)\,e^{-px}dx \tag{1.2}$$

$$I(x,\ a_1,\ a_2)=H(x-a_1)-H(x-a_2)$$

Изображение производной функции получаем интегрированием по частям подынтегральной функции

$$f_*(p)=\int_{-\infty}^{\infty} I(x,a_1,a_2)\,F^{(M)}(x)\,e^{-px}dx=p^M f(p)+\left[e^{-px}\sum_{m=1}^{M}p^{m-1}F^{(M-m)}(x)\right]_{a_1}^{a_2} \tag{1.3}$$

[1] См. также: *Касумов А. А.* Расчет плит на дискретных упругих опорах со случайными жесткостными характеристиками.— Деп. в ВНИИС, 1982, № 3522—82.— С. 10.

$$f(p)=\int_{a_1}^{a_2} F(x)\, e^{-px}dx$$

где $[\psi(x)]_{x_1}^{x_2}$ имеет явную форму (скобки типа Лагранжа) $[\psi(x)]_{x_1}^{x_2}=\psi(x_2)-\psi(x_1)$.

Формула (1.2) позволяет использовать для обратного преобразования формулу Меллина, т. е.

$$F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(p)\, e^{px}dp \tag{1.4}$$

Формулы (1.3), (1.4) представляют совокупность функциональных интегральных преобразований на ограниченном отрезке. Из них, в частности, получаются: при $a_1=0$, $a_2=\infty$ — классическое одностороннее преобразование Лапласа; при $a_1=-\infty$, $a_2=\infty$ — двустороннее преобразование Лапласа в бесконечной области [6]; если в последнем случае принять $p=i\varphi$, то она преобразуется в классическое интегральное преобразование Фурье.

Обобщая (1.3), (1.4) на двумерную прямоугольную область $[a_1;\ a_2,\ b_1;\ b_2]$, соответственно получим

$$\begin{aligned}
f_*(p_1,p_2)&=\int\int_{-\infty}^{\infty} I_1(x,a_1,a_2)\, I_2(y,b_1,b_2)\, F_{x,y}^{(M),(N)}(x,y)\exp(-p_1x-p_2y)\,dxdy=\\
&=p_1^Mp_2^Nf(p_1,p_2)+p_1^M\left[e^{-p_2y}\sum_{n=1}^{N} p_2^{n-1}f_y^{(N-n)}(p_1,y)\right]_{b_1}^{b_2}+\\
&+p_2^N\left[e^{-p_1x}\sum_{m=1}^{M} p_1^{m-1}f_x^{(M-m)}(x,p_2)\right]_{a_1}^{a_2}+\\
&+\left[\exp(-p_1x-p_2y)\sum_{m,}^{M}\sum_{n=1}^{N} p_1^{m-1}p_2^{n-1}F_{x,y}^{(M-m),(N-n)}(x,y)\right]_{a_1,b_1}^{a_2,b_2}\quad (m=\overline{1,M},\ n=\overline{1,N})
\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$F(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} f(p_1,p_2)\exp(p_1x+p_2y)\,dp_1dp_2 \tag{1.6}$$

$$f(p_1,p_2)=\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} F(x,y)\exp(-p_1x-p_2y)\,dxdy,$$

$$f_y^{(N-n)}(p_1,y)=\int_{a_1}^{a_2} F_y^{(N-n)}(x,y)\, e^{-p_1x}dx$$

$$f_x^{(M-m)}(x,p_2)=\int_{b_1}^{b_2} F_x^{(M-m)}(x,y)\, e^{-p_2y}dy,\quad F_{x,y}^{(M),(N)}(x,y)=\frac{\partial^M}{\partial x^M}\left(\frac{\partial^N F(x,y)}{\partial y^N}\right)$$

2. Построение изображений и вычисление оригиналов при решении краевых задач. Рассмотрим уравнение с дифференциальным оператором L_0 порядка J:

$$L_0W(z)=Q_0(z),\ z\in s \tag{2.1}$$

На контуре Γ_s области s заданы условия

$$l_kW(z)=0,\ z\in\Gamma_s \tag{2.2}$$

Построение функции изображения в общем виде рассматриваемой краевой задачи (1.1), (2.2) можно осуществить следующими способами: формулу (1.5) непосредственно применяем к (2.1), (2.2); в оператор (L_0) заданного уравнения вводим разрывную функцию $D(z)$ («обобщенную жесткость»), учитывающий граничные условия (2.2) на Γ_s. С помощью полученного таким образом оператора L_D краевая задача (2.1), (2.2) записывается так

$$L_D W(z) = Q(z), \quad |z| < \infty \tag{2.3}$$

Применяя формулу преобразования (1.5) к (2.3), получим функцию-изображение краевой задачи (2.1), (2.2).

В результате использования обоих способов получим функцию — изображение краевой задачи (2.1), (2.2) в виде

$$w(p) = f\left(q(p),\ \Delta_0(p),\ w_\nu^{(j)}(p, \Gamma_s),\ W_\nu^{(j)}(\Gamma_{ks})\right) \left(j = \overline{1, (J-1)}\right) \tag{2.4}$$

где $\Delta_0(p)$ — изображение оператора L_0 в бесконечной области.

Далее покажем вычисление оригинала функции (2.4), удовлетворяющей граничным условиям (2.2). Сначала рассмотрим частный случай, предположив в (2.4)

$$w_\nu^{(j)}(p, \Gamma_s) = W_\nu^{(j)}(\Gamma_s) \equiv 0 \tag{2.5}$$

В этом случае поиск оригинала приводит к вычислению интеграла

$$W(z) = \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} f(q(p), \Delta_0(p))\, e^{pz} dz \tag{2.6}$$

что не представляет принципиальных трудностей (возможны трудности вычислительного характера).

Теперь перейдем к вычислению оригинала (2.4) краевой задачи. В рассматриваемом случае вычисление оригинала по формуле (1.6) приводит к принципиальным трудностям, связанным с тем, что в подынтегральное выражение входят неизвестные изображения $w_\nu^{(j)}(p, \Gamma_s)$ искомой функции и ее производных на контуре Γ_s области s. Для устранения этой трудности проведем следующий анализ. Для простоты изложения предположим, что контур Γ_s области s прямоугольный ($s \in x,\ y$: $|x| < a$, $|y| < b$).

Обозначим оригинал вышеуказанных неизвестных изображений в символической форме через $A_{xj}\,[w_x^{(j)}(\pm a, p_2)]$, $A_{yj}\,[w_y^{(j)}(p_1, \pm b)]$. Из физической сущности решаемой краевой задачи можно утверждать, что функции A_{xj}, A_{yj} на сегментах $[-b; b]$, $[-a; a]$ удовлетворяют всем условиям (кусочно-непрерывны, кусочно-монотонны, ограничены) теоремы Дирихле о разложимости их в тригонометрический ряд Фурье. Следовательно, на $[-b; b]$, $[-a, a]$ возможны их следующие представления:

$$A_{x0}(\mp a, y) = W_{0,2}\left(1 - \frac{y + 2b}{2b}\right) + W_{3,1}\frac{y + 2b}{2b} + \sum_n X_{\mp 0n} \sin\psi_n (y + b)$$

$$A_{xj}(\mp a, y) = \sum_n X_{\mp jn} \sin\psi_n (y + b), \quad \psi_n = \frac{n\pi}{2b}$$

$$A_{y0}(x, \mp b) = W_{0,3}\left(1 - \frac{x + 2a}{2a}\right) + W_{2,1}\frac{x + a}{2a} + \sum_m X_{\mp 0m} \sin\varphi_m (x + a)$$

$$A_{yj}(x, \mp b) = \sum_m X_{\mp jm} \sin\varphi_m (x + a), \quad \varphi_m = \frac{m\pi}{2a} \tag{2.7}$$

Если представление оригиналов в ряд задано в виде разложения по ортогональным функциям (2.7), то сходимость рядов для изображения определяется утверждением, вытекающим из теоремы Абеля (т. е. почленное преобразование рядов возможно, если он сходится равномерно к некоторой предельной функции), что здесь и имеет место. Почленным преобразованием Лапласа рядов (2.7) получим сходящиеся (асимптотические) представления неизвестных изображений функции прогибов на контуре Γ_s области s в виде

$$
\begin{aligned}
& w(\mp a, p_2) = e^{p_2 b}\left\{\frac{W_{0,2}}{p_2} + \frac{W_{3,1} - W_{0,2}}{2bp_2^2} + \sum_n X_{\mp 0n}\frac{\psi_n}{p_2^2 + \psi_n^2}\right\}\\
& w_x^{(j)}(\mp a, p_2) = e^{p_2 b}\sum_n X_{\mp jn}\frac{\psi_n}{p_2^2 + \psi_n^2}\\
& w(p_1, \mp b) = e^{p_1 a}\left\{\frac{W_{0,3}}{p_1} + \frac{W_{2,1} - W_{0,3}}{2ap_1^2} + \sum_m X_{\mp 0m}\frac{\varphi_m}{p_1^2 + \varphi_m^2}\right\}\\
& w_y^{(j)}(p_1, \mp b) = e^{p_1 a}\sum_m X_{\mp jm}\frac{\varphi_m}{p_1^2 + \varphi_m^2}
\end{aligned}
\qquad (2.8)
$$

Подставив (2.8) в (2.4) по формуле Меллина (1.6) и используя теоремы о вычетах, найдем искомый оригинал функции прогибов в виде функций от неизвестных коэффициентов разложения начальных параметров, т. е.

$$
W(x, y) = F(X_{\mp jm}, X_{\mp jn}, Q_{mn}(x, y), x, y) \qquad (2.9)
$$

Далее, подставляя полученное решение в граничные условия (2.2) и разлагая их по тем же базисным функциям на контуре Γ_s области s, получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения $X_{\mp jm}$, $X_{\mp jn}$.

3. Изгиб свободной от закрепления краями прямоугольной плиты на деформируемом основании. Для удобства изложения и дальнейшего анализа при составлении граничных уравнений начало координат переместим в левый нижний угол плиты.

В рассматриваемом случае операторы граничных условий имеют вид:

$$
\begin{aligned}
& l_1 = \partial^2/\partial x^2 + \mu\partial^2/\partial y^2,\ l_2 = \partial^3/\partial x^3 + (2-\mu)\partial^3/\partial x\partial y^2\\
& l_3 = \partial^2/\partial y^2 + \mu\partial^2/\partial x^2,\ l_4 = \partial^3/\partial y^3 + (2-\mu)\partial^3/\partial y\partial x^2
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

Произвольную внешнюю нагрузку $Q_0(x, y)$ представим в области $S = s + \Gamma_s$ в виде следующего разложения (фигура):

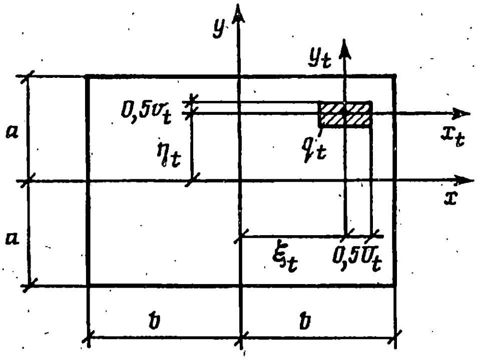
$$
\begin{aligned}
& Q_0(x, y) = \sum_{m,}^{M}\sum_{n,}^{N}\sum_{t=1}^{T} C_{mnt}\sin(\varphi_m x)\sin(\psi_n y)\\
& C_{mnt} = \frac{4}{ab}\frac{q_t}{\varphi_m\psi_n}\sin(\varphi_m x_t)\sin(\psi_n y_t)\sin\frac{\varphi_m a_t}{2}\sin\frac{\psi_n b_t}{2}
\end{aligned}
\qquad (3.2)
$$

Для непосредственного вычисления изображения функции (2.1), содержащей все условия (3.1), накладываемые на искомую функцию W, в оператор задачи $L_0 = \Delta^2 + k_0/D_0$ вводим переменную жесткость $D(x, y)$:

$$
D(x, y) = D_0 I_1(x, 0, 2a)\, I_2(y, 0, 2b) = \begin{cases} D_0 & (x, y \in s)\\ 0 & (x, y \notin s)\end{cases} \qquad (3.3)
$$

Далее уравнение (2.1) с оператором жесткости $L_D(L_D W = Q)$ преобразуем по формуле (1.5) и получим изображение в виде

$$
w(p_1, p_2) = \Delta_0^{-1}(p_1, p_2)\{q(p_1, p_2) D_0^{-1} + w(0, p_2)[p_1^2 + (2-\mu)p_2^2]p_1 +
$$



$$+ w_x'(0, p_2)(p_1^2 + \mu p_2^2) + w(p_1, 0)\,[p_1^2(2-\mu) + p_2^2]\,p_2 +$$

$$+ w_y'(p_1, 0)(\mu p_1^2 + p_2^2) + W(0,0)\,2(1-\mu)\,p_1p_2\} \tag{3.4}$$

$$w(p_1, p_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int I_1(x, 0, \infty)\, I_2(y, 0, \infty)\, W(x, y) \exp(-p_1x - p_2y)\, dxdy$$

$$q(p_1, p_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int I_1(x, 0, \infty)\, I_2(y, 0, \infty)\, Q_0(x, y) \exp(-p_1x - p_2y)\, dxdy =$$

$$= \sum_{m,}^{M}\sum_{n,}^{N}\sum_{t=1}^{T} C_{mnt} \frac{\varphi_m\psi_n}{(p_1^2 + \varphi_m^2)(p_2^2 + \psi_n^2)}$$

$$w(0, p_2) = \int_{-\infty}^{\infty} I_2(y, 0, \infty)\, W(x, y)\, e^{-p_2y} dy \Big|_{x=0},$$

$$w_x'(0, p_2) = \int_{-\infty}^{\infty} I_2(y, 0, \infty) \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} e^{-p_2y} dy \Big|_{x=0} \tag{3.5}$$

$$w_y'(p_1, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(x, 0, \infty) \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} e^{-p_1x} dx \Big|_{y=0},$$

$$w(p_1, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(x, 0, \infty)\, W(x, y)\, e^{-p_1x} dx \Big|_{y=0}$$

$$\Delta_0 = (p_1^2 + p_2^2)^2 + \alpha_0^4, \quad \alpha_0^4 = k_0/D_0$$

$$p_{1,2} = \sigma_{1,2} + is_{1,2}, \quad i = \sqrt{-1}$$

Оригинал изображения (3.4) вычисляем по формуле (1.6):

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} e^{p_2y} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} w(p_1, p_2)\, e^{p_1x} dp_1 dp_2 = \sum_{\nu=0}^{5} W_\nu \tag{3.6}$$

$$W_0(x, y) = \frac{1}{D_0}\sum_{m,}^{M}\sum_{n,}^{N}\sum_{t=1}^{T} C_{mnt} \frac{1}{\Delta_{mn}^2 + \alpha_0^4}\Big\{ \sin(\varphi_m x)\sin(\psi_n y) +$$

$$+ \frac{\varphi_m}{\alpha_0^2\sqrt{\psi_n^4 + \alpha_0^4}} \sin\psi_n y\, [U_{mn}\Phi_{3n}(x) - V_{mn}\Phi_{1n}(x)] +$$

$$+ \frac{\psi_n}{\alpha_0^2\sqrt{\varphi_m^4 + \alpha_0^4}} \sin\varphi_m x\, [U_{*mn}\Phi_{3m}(y) - V_{*mn}\Phi_{1m}(y)]\Big\} \times$$

$$\times H(x - x_{*t}) H(y - y_{*t}) \tag{3.7}$$

$$U_{mn} = \beta_n \Delta_{mn} - \gamma_n \alpha_0^2, \quad U_{*mn} = \xi_m \Delta_{mn} - \eta_m \alpha_0^2$$

$$V_{mn} = \beta_n \alpha_0^2 + \gamma_n \Delta_{mn}, \quad V_{*mn} = \xi_m \alpha_0^2 + \eta_m \Delta_{mn}$$

$$\Delta_{mn} = \varphi_m^2 + \psi_n^2, \quad q_t = P_{0t}/a_t b_t$$

$$\Phi_{1n}(x) = \mathrm{sh}(\beta_n x) \cos(\gamma_n x), \Phi_{1m}(y) = \mathrm{sh}(\xi_m y) \cos(\eta_m y)$$

$$\Phi_{3n}(x) = \mathrm{ch}(\beta_n x) \sin(\gamma_n x), \Phi_{3m}(y) = \mathrm{ch}(\xi_m y) \sin(\eta_m y)$$

$$\varphi_m = {}^1/_2 m\pi/a, \psi_n = {}^1/_2 n\pi/b$$

$$x_{*+} = x_t - 0{,}5a_t, y_{*t} = y_t - 0{,}5b_t$$

$$\beta_n, \gamma_n = (1/2\ [(\psi_n^4 + \alpha_0^4)^{1/2} \pm \psi_n^2])^{1/2}$$

$$\xi_m, \eta_m = (1/2\ [(\varphi_m^4 + \alpha_0^4)^{1/2} \pm \varphi_m^2])^{1/2}$$

При подстановке (3.7) в (2.1) уравнение превращается в тождество, т. е. по терминологии теории дифференциальных уравнений, W_0 является частным решением (2.1), соответствующим правой части в виде (3.2).

Второй член в (3.6) вычисляем по формуле

$$W_1(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{1}{2i\alpha_0^2} \{[p_2^2(\mu - 1) - i\alpha_0^2] \cos x \sqrt{p_2^2 - i\alpha_0^2} -$$

$$- [p_2^2(\mu - 1) + i\alpha_0^2] \cos x \sqrt{p_2^2 + i\alpha_0^2}\}\, w(0, p_2)\, e^{p_2 y} dp_2 \tag{3.8}$$

где $p_{1\nu} = \pm i (p_2^2 \mp i\alpha_0^2)^{1/2}$, $(\nu = \overline{1,4})$ — изолированные особые точки (полюсы) функции $F_0(p_1, p_2)$.

На основе анализа (2.7), (2.8) (с учетом того, что край $x = 0$ свободен от закрепления) неизвестное изображение w $(0, p_2)$ в (3.8) представляем в виде разложения

$$W(0, p_2) = \frac{h_{*y}}{p_2^2} + \frac{h_0}{2p_2} + \sum_{n=1}^{N} X_{1n} \frac{\psi_n}{p_2^2 + \psi_n^2}$$

$$h_0 = W(0,0),\ h_{*y} = {}^1/_2 [W(0,2b) - {}^1/_2 W(0,0)]/b \tag{3.9}$$

Подставив (3.9) в (3.8), получим

$$W_1(x,\ y) = W_{1,1} + W_{1,2} + W_{1,3} \tag{3.10}$$

$$W_{1,1} = -\frac{h_{*y}}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{1}{2i\alpha_0^2} \{ (\mu - 1) \cos x (p_2^2 - i\alpha_0^2)^{1/2} - \frac{i\alpha_0^2 \cos x (p_2^2 - i\alpha_0^2)^{1/2}}{p_2^2} -$$

$$- (\mu - 1) \cos x (p_2^2 + i\alpha_0^2)^{1/2} - \frac{i\alpha_0^2 \cos x (p_2^2 + i\alpha_0^2)^{1/2}}{p_2^2} \} e^{p_2 y} dp_2 \tag{3.11}$$

Учитывая, что первое и третье выражения в (3.11) не имеют особых точек, будем иметь

$$W_{1,1} = \frac{1}{2} h_{*y} \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{1}{2\pi i} \{ \frac{\cos x (p_2^2 - i\alpha_0^2)^{1/2}}{p_2^2} + \frac{\cos x (p_2^2 + i\alpha_0^2)^{1/2}}{p_2^2} \} e^{p_2 y} dp_2 \tag{3.12}$$

Для обеих подынтегральных функций $(f_{01}\ (p_2),\ f_{02}\ (p_2))$ $p_{2,1} \equiv p_{2,2} = p_0 = 0$ является особой точкой кратностью два, следовательно

$$\operatorname{res} f_{01}(p_2) = y \cos x \sqrt{-i\alpha_0^2} \qquad (3.13)$$

Аналогично для второго подынтегрального выражения имеем

$$\operatorname{res} f_{02}(p_2) = y \cos x \sqrt{i\alpha_0^2} \qquad (3.14)$$

С учетом (3.13) и (3.14) из (3.12) получим

$$W_{1,1} = h_{*y} y \cos(2^{-1/2} x\alpha_0) \operatorname{ch}(2^{-1/2} x\alpha_0) \qquad (3.15)$$

Аналогично из (3.10) будем иметь

$$W_{1,2} = 1/2 h_0 \cos(2^{-1/2} x\alpha_0) \operatorname{ch}(2^{-1/2} x\alpha_0) \qquad (3.16)$$

Третье составляющее ($W_{1,3}$) в (3.10) представляется интегралом, из которого следует

$$W_{1,3} = \frac{1}{\alpha_0^2} \sum_{n=1}^{N} X_{1n} \sin(\psi_n y) \left[\psi_n^2 (\mu - 1) \operatorname{sh}(x\beta_n) \sin(x\gamma_n) + \alpha_0^2 \operatorname{ch}(x\beta_n) \cos(x\gamma_n)\right] \qquad (3.17)$$

Подставив (3.17), (3.16), (3.15) в (3.10), получим второе выражение искомого оригинала, вычисляемого по формуле (3.6):

$$W_1 = \left(\frac{1}{2} h_0 + h_{*y} y\right) \operatorname{ch}(2^{-1/2} x\alpha_0) \cos(2^{-1/2} x\alpha_0) +$$

$$+ \frac{1}{\alpha_0^2} \sum_{n=1}^{N} X_{1n} \sin(\psi_n y) \left[\psi_n^2 (\mu - 1) \operatorname{sh}(x\beta_n) \sin(x\gamma_n) + \alpha_0^2 \operatorname{ch}(x\beta_n) \cos(x\gamma_n)\right] \qquad (3.18)$$

Аналогичным образом вычисляются W_ν ($\nu = \overline{2,4}$):

$$W_5 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{2(1-\mu) p_1 p_2}{(p_1^2 + p_2^2)^2 + \alpha_0^4} e^{p_1 x} dp_1\right] w(0, 0)\, e^{p_2 y} dp_2 \qquad (3.19)$$

Произведем в (3.19) преобразование координат по формулам

$$p_1 = r \cos\chi, \quad (xy)\ (p_1 p_2)^T = r_a r \cos\chi$$

$$p_2 = r \sin\chi, \quad r_a = \|xy\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \|p_1 p_2\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \qquad (3.20)$$

где $|d| = r$ — якобиан преобразования. Подставив (3.20) в (3.19), получим

$$W_5 = w(0, 0) \frac{2(1-\mu)}{4\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{r^3}{r^4 + \alpha_0^4} \int_0^{2\pi} \exp(r_a r \cos\chi) \cos\chi\, d\cos\chi\right] dr = \infty \cdot 0 \qquad (3.21)$$

Таким образом, в угловой точке функция прогиба остается неопределенной, как это и должно быть в рамках рассматриваемой теории.

Подставляя найденные результаты в (3.6), получим искомое решение в виде

$$W(x, y) = \frac{1}{D_0} \sum_{m,}^{M} \sum_{n,}^{N} \sum_{t=1}^{T} C_{mnt} \frac{1}{\Delta_{mn}^2 + \alpha_0^4} \left[\sin(\varphi_m x) \sin(\psi_n y) + H_*(x, y)\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \left[X_{1n} \Pi_{*1n}(x) + X_{2n} \Pi_{*2n}(x)\right] \sin(\psi_n y) + \sum_{m=1}^{M} \left[X_{3m} \Pi_{*3m}(y) +\right.$$

$$\left. + X_{4m} \Pi_{*4m}(y)\right] \sin(\varphi_m x) + \frac{1}{2} h_0 \left[A_{01}(x) + A_{01}(y)\right] + h_{*x} x A_{01}(y) + h_{*y} y A_{01}(x) \qquad (3.22)$$

$$\Pi_{*1n}(x) = (\psi_n/\alpha_0)^2(\mu-1)\Phi_{4n}(x) + \Phi_{2n}(x),\ \Pi_{*3m}(x) = (\varphi_m/\alpha_0)^2(\mu-1)\Phi_{1m}(y) + \Phi_{2m}(y)$$

$$\Pi_{*2n}(x) = -[\beta_{*n}\Phi_{3n}(x) - \gamma_{*n}\Phi_{1n}(x)]\lambda_n/\alpha_0^2,$$

$$\Pi_{*4m}(y) = -[\xi_{*m}\Phi_{3m}(y) - \eta_{*m}\Phi_{1m}(y)]\lambda_{0m}/\alpha_0^2$$

$$\Phi_{2n}(x) = \mathrm{ch}(\beta_n x)\cos(\gamma_n x),\ \Phi_{2m}(y) = \mathrm{ch}(\xi_m y)\cos(\eta_m y)$$

$$\Phi_{4n}(x) = \mathrm{sh}(\beta_n x)\sin(\gamma_n x),\ \Phi_{4m}(y) = \mathrm{sh}(\xi_m y)\sin(\eta_m y)$$

$$\beta_{*n} = (\mu-1)\psi_n^2\beta_n - \alpha_0^2\gamma_n,\ \ \xi_{*m} = (\mu-1)\varphi_m^2\xi_m - \alpha_0^2\eta_m$$

$$\gamma_{*n} = (\mu-1)\psi_n^2\gamma_n + \alpha_0^2\beta_n,\ \ \eta_{*m} = (\mu-1)\varphi_m^2\eta_m + \alpha_0^2\xi_m$$

$$\lambda_n = \sqrt{\psi_n^4+\alpha_0^4},\ \ \lambda_{0m} = \sqrt{\varphi_m^4+\alpha_0^4}$$

$$A_{01}(\ \ ) = \mathrm{ch}[(\ \ )/L]\cos[(\ \ )/L],\ L = (4D_0/k_0)^{1/4}$$

$$H_* = (\varphi_m/\alpha_0^2\sqrt{\psi_4^4+\alpha_0^4})\sin\psi_n y\,[U_{mn}\Phi_{3n}(x) - V_{mn}\Phi_{1n}(x)] +$$

$$+ (\psi_n/\alpha_0^2\sqrt{\varphi_m^4+\alpha_0^4})\sin\varphi_m x\,[U_{*mn}\Phi_{3m}(y) - V_{*mn}\Phi_{1n}(y)]$$

$$h_0 = W(0,\ 0),\ h_{*x} = {}^1/_2[W(2a,\ 0) - {}^1/_2W(0,\ 0)]/a,$$

$$h_{*y} = {}^1/_2[W(0,\ 2b) - {}^1/_2W(0,\ 0)]/b$$

$$W(0,0),\ W(2a,0),\ W(0,2b) = W_{sp} + W_{sR},\ a_0 = 2a,\ b_0 = 2b \tag{3.23}$$

$$W(0,0) = \frac{1}{k_0a_0b_0}\left[\sum_{t=1}^{T} P_{0t}\left(5-6\frac{x_t}{a_0} - 6\frac{y_t}{b_0}\right) + (7R_0+R_2+R_3-5R_1)\right]$$

$$W(2a,0) = \frac{1}{k_0a_0b_0}\left[\sum_{t=1}^{T} P_{0t}\left(1+6\frac{x_t}{a_0} - 6\frac{y_t}{b_0}\right) + (R_0+7R_2-5R_3+R_1)\right]$$

$$W(0,2b) = \frac{1}{k_0a_0b_0}\left[\sum_{t=1}^{T} P_{0t}\left(1-6\frac{x_t}{a_0} + 6\frac{y_t}{b_0}\right) + (R_0-5R_2+R_3+R_1)\right]$$

$$R_j = -2(1-\mu)D_0\frac{\partial^2W(x,y)}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=0,2a\\ y=0,2b}}\ (j=\overline{0,3})$$

Каждая из функций $W_\nu\ (\nu = \overline{1,5})$ в (3.22) удовлетворяет уравнению $L_0W_\nu = 0$, т. ė. сумма $\Sigma W_\nu = W_*$ в (3.22) является общим решением, соответствующего (2.1) однородного уравнения ($L_0W_* = 0$).

4. Граничные условия. Для определения неизвестных коэффициентов (X_{1n}, X_{2n}, X_{3m}, X_{4m}) разложения начальных функций в решении (3.22), подставим (3.22) в граничные условия (2.2) при $x = 2a$, $y = 2b$ и разложим их по тем же базисным функциям на отрезках $[0;\ 2b]$, $[0,\ 2a]$:

$$\int_0^{2b} l_1 l_2\,[W(x,y)]\sin(\psi_n y)\,dy\,|_{x=2a} = 0,\ \ \int_0^{2a} l_3,\ l_4\,[W(x,y)]\sin(\varphi_m x)\,dx\,|_{y=2b} = 0 \tag{4.1}$$

В результате получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения (X) в виде

$$X_{1n}a_{11}(n) + X_{2n}a_{12}(n) = \sum_m\sum_t Q_1(n,m,t) \tag{4.2}$$

$$X_{1n}a_{21}(n) + X_{2n}a_{22}(n) + \sum_m X_{3m}a_{23}(m,n) + \sum_m X_{4m}a_{24}(m,n) =$$

$$= \sum_m \sum_t Q_2(m, n, t)$$

$$X_{3m}a_{33}(m) + X_{4m}a_{34}(m) = \sum_n \sum_t Q_3(m, n, t)$$

$$\sum_n X_{1n}a_{41}(m, n) + \sum_n X_{2n}a_{42}(m, n) + X_{3m}a_{43}(m) + X_{4m}a_{44}(m) =$$

$$= \sum_n \sum_t Q_4(m, n, t) \quad (m = \overline{1, M}, \quad n = \overline{1, N})$$

$$a_{11}(n) = -(b/\alpha_0^2) F_9(n) \Phi_{4n}(2a), \quad F_9(n) = \alpha_0^4 + (1-\mu)^2 \psi_n^4$$

$$a_{12}(n) = -(b\lambda_n/\alpha_0) \{[F_{11}(n)\beta_n - F_{12}(n)\gamma_n] \Phi_{3n}(2a) -$$

$$- [F_{11}(n)\gamma_n + F_{12}(n)\beta_n] \Phi_{1n}(2a)\}$$

$$F_{11}(n) = \alpha_0^4 - (1-\mu)^2 \psi_n^4, \quad F_{12}(n) = 2(1-\mu)\alpha_0^2\psi_n^2$$

$$Q_1(n) = (4/L^2) \{C_{01}(a_0) [0{,}5h_0 - (-1)^n h_3]/\psi_n + \mu h_2 f_{4n}^*\} + Z_{*1}(m, n, t)$$

$$C_{01}(a_0) = {}^1/_2 \mathrm{sh}(a_0/L) \mathrm{sm}(a_0/L), \quad h_0 = W_s, \quad h_2 = W_s(0, 2a)$$

$$h_3 = W_s(2b, 0), \quad Z_{*1} = D_0^{-1} C_{mnt} (\Delta_{mn}^2 + \alpha_0^4)^{-1} Z_1$$

$$Z_1 = \int_0^{b_0} l_1 [H_*(x, y)] \sin \psi_n y dy \,|_{x=a_0}$$

$$f_{4n}^* = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{A_0^2 + \theta_n^2} [A_0 (\mathrm{ch}(A_0b_0) \cos(\theta_n b_0) - 1) + \theta_n \mathrm{sh}(A_0b_0) \sin(\theta_n b_0)] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{A_0^2 + \theta_{1n}^2} [A_0 (\mathrm{ch}(A_0b_0) \cos(\theta_n b_0) - 1) + \theta_{1n} \mathrm{sh}(A_0b_0) \sin(\theta_{1n} b_0)] \right\}$$

$$A_0 = 1/L, \quad \theta_n = A_0 - \psi_n, \quad \theta_{1n} = A_0 + \psi_n$$

. . . .

$$a_{44}(m) = (a\lambda_{0m}/\alpha_0^2) \{[\lambda_{0m}(\xi_{*m}\xi_m - \eta_{*m}\eta_m) - \mu\varphi_m^2(\xi_{*m}\xi_m + \eta_{*m}\eta_m)] \times$$

$$\times \Phi_{4m}(2b) - [\lambda_{0m}(\xi_{*m}\eta_m + \eta_{*m}\xi_m) + \mu\varphi_m^2(\xi_{*m}\eta_m - \eta_{*m}\xi_m)] \Phi_{2m}(2b)\}$$

Для уточнения достаточности числа приближений M, N воспользуемся уравнением статики

$$k_0 \int_0^{2a} \int_0^{2b} W(x, y)\, dxdy = \sum_{t=1}^{T} q_t$$

Подставив решение (4.2) в выражение для W_*, вычисляем R_j $(j = \overline{0,3})$ по формуле (3.23); затем подставляя R_j в (3.22), получим искомое решение W рассматриваемой краевой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев Д. Н., Юсупов А. К.* Изгиб плиты с отверстиями, лежащей на статистически неоднородном основании: Некоторые вопросы прочности строительных конструкций/Сб. трудов № 156. М.: МИСИ. С. 47—55.
2. *Касумов А. А.* Об упругих деформациях конечных балок в статистически неоднородном грунте/Материалы VI Республиканской конференции молодых ученых по матем. и мех.— ИММ АН Азерб. ССР, ЭЛМ, Ч. 2.— 6—8 мая 1985.— С. 51—55.

3. *Касумов А. А.* К решению обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами/Матер. VII Респ. конф. по матем. и мех., ИММ АН Азерб. ССР, ЭЛМ. Ч. 2.— Баку, 12—15 мая 1986.— С. 177—179.
4. *Касумов А. А.* Расчет конечных балок на упругом основании интегральным преобразованием Фурье/Матер. VIII Респ. конф. по матем. и мех., ИММ АН Азерб. ССР, ЭЛМ.— 26—29 октября 1987.— С. 123—126.
5. *Касумов А. А.* Количество необходимых условий на контуре прямоугольной изолированной плиты на деформируемом упругом основании/Матер. IX Респ. конф. по матем. и мех., ИММ АН Азерб. ССР, ЭЛМ.— 9—13 мая 1988.— С. 111—113.
6. *Б. ван дер Поль и X. Бреммер.* Операционное числение на основе двустороннего преобразования Лапласа.— М.: Изд-во иностр. лит., 1952.— С. 506.
7. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа.— М.: Наука, 1974.— С. 223.
8. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении.— М.: Мир, 1985.— С. 264, 400.

Москва

Поступила в редакцию
12.IV.1991