

УДК 539.3

© 1992 г. А. Г. АКОПЯН, М. А. ЗАДОЯН

МАЛОНАПРЯЖЕННОСТЬ НЕОДНОРОДНО-СОСТАВНЫХ КЛИНЬЕВ

Рассматривается задача малонапряженности на крае контактной поверхности неоднородно-составного клина со степенным упрочнением материалов при продольном сдвиге и плоской деформации. Явление малонапряженности линейно-упругих кусочно-однородных тел впервые исследовано в работе [1]. Вопросы малонапряженности кусочно-однородных клиньев со степенным упрочнением материалов изучены в [2, 3].

1. **Продольный сдвиг.** Пусть два длинных цилиндрических тела из неоднородных материалов со степенным упрочнением, спаянные друг с другом по некоторой части боковых поверхностей полным прилипанием, подвергаются продольному сдвигу. Такое напряженное состояние, возникающее в угловой точке контактной поверхности, реализуется также и при кручении указанного цилиндрического тела.

В угловой точке контактной поверхности поместим начало цилиндрической системы координат, ось $\theta = 0$ проведем по контактной поверхности, ось z — по продольному направлению (фиг. 1).

1. *Общие уравнения и граничные условия.* В каждой области поперечного сечения имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \tau_{rz} = 0 \quad (1.1)$$

соотношения между компонентами напряжений, деформаций и перемещений

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= 2 \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \gamma_{rz}, \quad \tau_{\theta z} = 2 \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \gamma_{\theta z} \\ 2\gamma_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial r}, \quad 2\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.2)$$

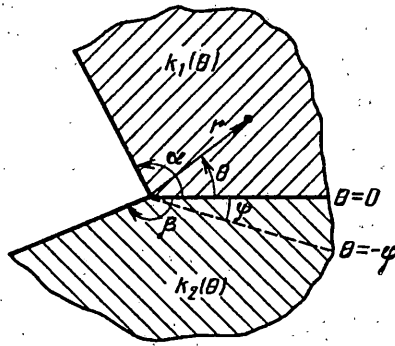
где σ_0 и ε_0 — интенсивности напряжений и деформаций:

$$\sigma_0 = (\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2)^{1/2}, \quad \varepsilon_0 = \left[\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2}$$

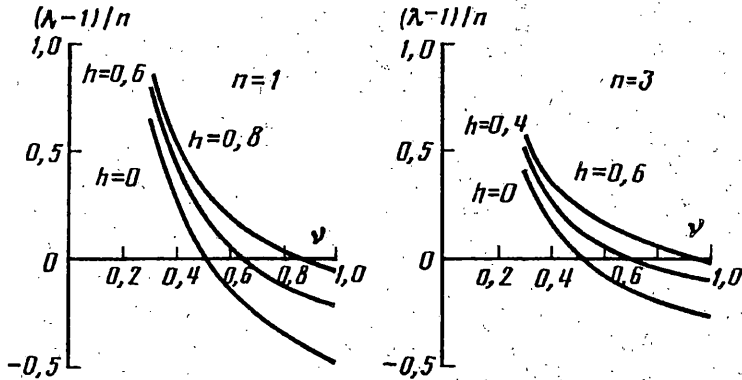
Между этими интенсивностями принимается зависимость

$$\sigma_0 = k \varepsilon_0^m, \quad k = k(\theta) \quad (1.3)$$

где функция $k(\theta)$ характеризует неоднородные деформативные свойства материалов и определяется из соответствующих экспериментов. Степени упрочнения m у обоих материалов принимаются одинаковыми, а функции $k(\theta)$ — различными.



Фиг. 1



Фиг. 2

Исключая компоненты напряжений из (1.1)–(1.3), приходим к дифференциальному уравнению относительно w :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r k \varepsilon_0^{m-1} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k}{r} \varepsilon_0^{m-1} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1.4)$$

Принимаем следующие граничные условия

$$\tau_{\theta z} = 0 \text{ при } \theta = \alpha, -\beta; w = 0 \text{ при } \theta = \theta_* \quad (1.5)$$

где θ_* — неизвестная постоянная, подлежащая определению. Рассматривая случай $\beta > \alpha$, положим $\theta_* = -\varphi$, где $\varphi > 0$.

2. Представление решения. Решение задачи будем строить в трех областях $0 \leq \theta \leq \alpha$, $-\varphi \leq \theta \leq 0$, $-\beta \leq \theta \leq -\varphi$. Величины в этих областях обозначим соответственно индексами $i = 1, 2, 3$.

Компоненты напряжений и перемещений представим в виде

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= \lambda k_i r^{(\lambda-1)m} f_i \chi_i, \quad \tau_{\theta z} = k_i r^{(\lambda-1)m} f_i' \chi_i \\ w_i &= r^\lambda f_i, \quad \chi_i = (f_i'^2 + \lambda^2 f_i^2)^{(m-1)/2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $f_i = f_i(\theta, \lambda)$ и λ — искомая собственная функция и собственное значение поставленной задачи.

Подставляя выражения перемещений из (1.6) в (1.4), приходим к дифференциальному уравнению

$$(k f_i' \chi_i)' + \eta k f_i \chi_i = 0, \quad \eta = \lambda [1 + (\lambda - 1) m] \quad (1.7)$$

Согласно условиям (1.5) и представлению (1.6) будем иметь граничные условия

$$f_1'(\alpha) = f_2(-\varphi) = f_3(-\varphi) = f_3'(-\beta) = 0, \quad f_2'(-\varphi) = f_3'(-\varphi) \quad (1.8)$$

а также условия сопряжения на контактной поверхности

$$f_1 = f_2, \quad f_1' \chi_1 = \gamma f_2' \chi_2 \quad \text{при } \theta = 0 \quad (1.9)$$

где $\gamma = k_2(0)/k_1(0)$. Таким образом, приходим к четырехточечной задаче на собственные значения для системы дифференциальных уравнений (1.7) при граничных условиях (1.8)—(1.9).

Вводя новую функцию $\psi_i(\theta, \lambda)$ —

$$f_i' = f_i \psi_i \quad (1.10)$$

из (1.7)—(1.9) приходим к дифференциальному уравнению

$$\psi_i' = -\frac{(\psi_i^2 + \lambda^2)(\psi_i^2 + 2nh_i\psi_i + s^2)}{\psi_i^2 + \lambda^2 n} \quad (1.11)$$

где $2h_i = k_i'/k_i$, $s^2 = \lambda(\lambda + n - 1)$, $n = 1/m$ при граничных условиях

$$\psi_1(\alpha) = \psi_3(-\beta) = 0, \quad \psi_2(-\varphi) = -\psi_3(-\varphi) = \infty \quad (1.12)$$

и условия на контактной поверхности

$$\mu_1(\mu_1^2 + \lambda^2)^{(m-1)/2} = \gamma \mu_2(\mu_2^2 + \lambda^2)^{(m-1)/2} \quad (1.13)$$

причем $\mu_i = \psi_i(0, \lambda)$.

В случае экспоненциального закона неоднородности, т. е. когда

$$k_i = k_i^* e^{2h_i \theta} \quad (1.14)$$

где k_i^* и h_i^* — постоянные материалов, имеем $h_i = \text{const}$.

Тогда общее решение уравнений (1.11) при $\Delta_i = s^2 - n^2 h_i^2 > 0$ представится в виде

$$\frac{E_i}{\sqrt{\Delta_i}} \operatorname{arctg} \frac{\psi_i + nh_i}{\sqrt{\Delta_i}} + G_i \operatorname{arctg} \frac{\psi_i}{\lambda} + Q_i \ln \left(\left(\frac{\psi_i^2 + 2nh_i\psi_i + s^2}{\psi_i^2 + \lambda^2} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{s} \right) = H_i - \theta \quad (1.15)$$

где H_i — произвольные постоянные

$$\begin{aligned} B_i G_i &= (n-1)^2, \quad B_i E_i = 2(n+1)n^2 h_i^2 + (1-\lambda)(n-1)^2 \\ B_i Q_i &= 2(n-1)nh_i, \quad B_i = (n-1)^2 + 4n^2 h_i^2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Используя граничные условия (1.12), из (1.15) для различных интервалов θ находим

$$H_1 = \alpha + \frac{E_1}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{arctg} \frac{nh_1}{\sqrt{\Delta_1}}, \quad H_2 = -\beta + \pi G_2 + \frac{E_2}{\sqrt{\Delta_2}} \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{nh_2}{\sqrt{\Delta_2}} \right),$$

$$H_3 = -\beta + \frac{E_2}{\sqrt{\Delta_2}} \operatorname{arctg} \frac{nh_2}{\sqrt{\Delta_2}}$$

$$\varphi = \beta - \frac{\pi}{2} G_2 - \frac{E_2}{\sqrt{\Delta_2}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{nh_2}{\sqrt{\Delta_2}} \right) + Q_2 \ln \frac{\lambda}{s}$$

Далее, принимая в (1.15) $\theta = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{E_1}{\sqrt{\Delta_1}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\mu_1 + nh_1}{\sqrt{\Delta_1}} - \operatorname{arctg} \frac{nh_1}{\sqrt{\Delta_1}} \right) + G_1 \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\lambda} + \\ &+ Q_1 \ln \left(\left(\frac{\mu_1^2 + 2nh_1\mu_1 + s^2}{\mu_1^2 + \lambda^2} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{s} \right) \\ \beta &= \pi \left(G_2 + \frac{E_2}{\sqrt{\Delta_2}} \right) - \frac{E_2}{\sqrt{\Delta_2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\mu_2 + nh_2}{\sqrt{\Delta_2}} - \operatorname{arctg} \frac{nh_2}{\sqrt{\Delta_2}} \right) - \\ &- G_2 \operatorname{arctg} \frac{\mu_2}{\lambda} - Q_2 \ln \left(\sqrt{\frac{\mu_2^2 + 2nh_2\mu_2 + s^2}{\mu_2^2 + \lambda^2}} \frac{\lambda}{s} \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Уравнения (1.17) совместно с (1.13) составляют систему уравнений относительно μ_1, μ_2 и λ .

Для случая $\beta < \alpha$, меняя местами α и β в (1.17) и заменяя γ на $1/\gamma$ в (1.13), убеждаемся, что система уравнений, определяющая λ , остается неизменной.

3. *Гиперповерхность конечных напряжений.* Условие $\lambda = 1$ в пространстве параметров $\alpha, \beta, \gamma, n, h_i$ определяет гиперповерхность конечных напряжений, отделяющую зону малонапряженности от зоны концентрации напряжений. Полагая $\lambda = 1$, из (1.13) и (1.17) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \mu_1 \left(\sqrt{\mu_1^2 + 1} \right)^{m-1} &= \gamma \mu_2 \left(\sqrt{\mu_2^2 + 1} \right)^{m-1} \\ \alpha &= \frac{E_1}{\sqrt{\Delta_1}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\mu_1 + nh_1}{\sqrt{\Delta_1}} - \operatorname{arctg} \frac{nh_1}{\sqrt{\Delta_1}} \right) + G_1 \operatorname{arctg} \mu_1 + \\ &+ Q_1 \ln \left(\frac{\mu_1^2 + 2nh_1\mu_1 + n}{n(\mu_1^2 + 1)} \right)^{1/2} \\ \beta &= \pi \left(G_2 + \frac{E_2}{\sqrt{\Delta_2}} \right) - \frac{E_2}{\sqrt{\Delta_2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\mu_2 + nh_2}{\sqrt{\Delta_2}} - \operatorname{arctg} \frac{nh_2}{\sqrt{\Delta_2}} \right) - \\ &- G_2 \operatorname{arctg} \mu_2 - Q_2 \ln \left(\frac{\mu_2^2 + 2nh_2\mu_2 + n}{n(\mu_2^2 + 1)} \right)^{1/2}, \quad h_i^2 < m \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь $B_i E_i = 2(n+1)n^2 h_i^2$, а значения G_i, B_i, Q_i остаются прежними, как в (1.16).

В случае, когда составной клин изготовлен из двух однородных материалов, полагая в системе уравнений (1.18) $h_i = 0$, приходим к уравнению [2]:

$$\operatorname{tg} \alpha \mid \cos \alpha \mid^{1-m} + \gamma \operatorname{tg} \beta \mid \cos \beta \mid^{1-m} = 0$$

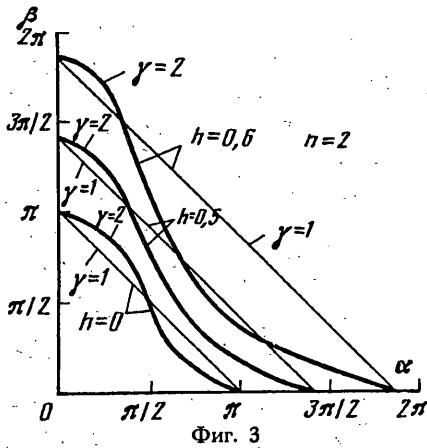
4. *Случай одного неоднородного клина.* Когда клин изготовлен из одного неоднородного материала, т. е. при $\gamma = 1, h_1 = h_2 = h$, полагая $\mu_1 = \mu_2$, из (1.17) находим

$$\alpha + \beta = \pi (G + E/\sqrt{\Delta}) \quad (1.19)$$

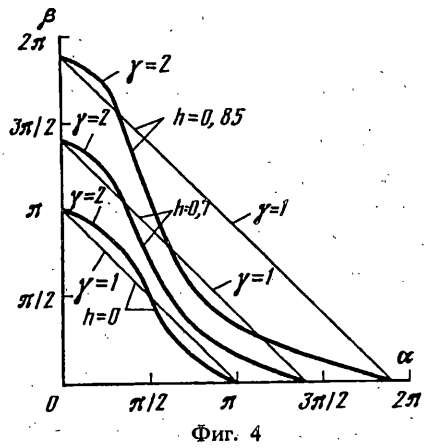
Вводя обозначения $\alpha + \beta = 2\alpha_*, \nu = \alpha^*/\pi$, из (1.19) с учетом (1.16) получим

$$\lambda = \frac{M \pm \{M^2 + 4 [N^2 - (n-1)^4] \{N^2 n^2 h^2 + [2(n+1)n^2 h^2 + (n-1)^2]\}^{1/2}}{2 [(n-1)^4 - N^2]}$$

$$M = (n-1)[N^2 + 4(n^2 - 1)n^2 h^2 + 2(n-1)^3]$$



Фиг. 3



Фиг. 4

$$N = (n - 1)^2(2\nu - 1) + 8n^2h^2\nu \quad (1.20)$$

В формуле (1.20) верхний знак соответствует значениям $\nu \leq \nu_0$ при которых $\lambda \geq 1$, а нижний — для $\nu \geq \nu_0$, при которых $\lambda \leq 1$. Здесь ν_0 — значение ν , соответствующее $\lambda = 1$. На фиг. 2 приведено семейство кривых $(\lambda - 1)m$ в зависимости от параметров ν, m, h . Отсюда следует, что для одних и тех же значений степени упрочнения и раствора угла клина, в зависимости от неоднородности материала, рассматриваемый край может находиться в состоянии малонапряженности или сильной концентрации напряжений.

Результаты численного исследования системы уравнений (1.18) приведены на фиг. 3, где показано изменение зоны малонапряженности в зависимости от неоднородности материала.

На основании общего решения системы дифференциальных уравнений (1.11) при $\Delta_i \leq 0$ составлена, аналогично (1.18), система уравнений. Численный анализ этой системы показывает, что она не имеет решения в интервале $0 < \alpha + \beta \leq 2\pi$. Это означает, что при $h_i^2 \geq m$ составной неоднородный клин всегда будет находиться в состоянии малонапряженности. К такому же выводу приходим также, анализируя зависимость $\lambda = \lambda(m, \nu, h)$ при $|h| \rightarrow \sqrt{m}$ (фиг. 2).

5. *Линейно-упругий неоднородно-составной клин.* Когда клин изготовлен из линейно-упругих неоднородных материалов, принимая в системе уравнений (1.13), (1.17) $n = 1$ и одинаковые показатели неоднородности $h_1 = h_2 = h$, приходим к уравнению относительно λ :

$$\operatorname{ctg}(\beta \sqrt{\lambda^2 - h^2}) + \gamma \operatorname{ctg}(\alpha \sqrt{\lambda^2 - h^2}) = \frac{h(\gamma - 1)}{\sqrt{\lambda^2 - h^2}} \quad (1.21)$$

определяющему $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, h)$.

Далее, полагая здесь $\lambda = 1$, определяем уравнение предельных кривых малонапряженности

$$\operatorname{ctg}(\beta \sqrt{1 - h^2}) + \gamma \operatorname{ctg}(\alpha \sqrt{1 - h^2}) = \frac{h(\gamma - 1)}{(1 - h^2)^{1/2}} \quad (1.22)$$

Здесь соблюдается условие $|h| < 1$. На фиг. 4 представлены следы этой гиперповерхности в плоскости $\alpha\beta$. В случае, когда клин изготовлен из одного сплошного материала, т. е. при $\gamma = 1$, согласно (1.21) имеем

$$\lambda = [h^2 + 1/(4\nu^2)]^{1/2}$$

Отсюда заключаем, что при растворе угла клина

$$2\alpha_* \leq \pi / \sqrt{1 - h^2}$$

соблюдается условие малонапряженности.

2. Плоская деформация. Рассмотрим теперь задачу малонапряженности, когда составной клин, изготовленный из неоднородных, несжимаемых материалов со степенным упрочнением, находится в состоянии плоской деформации. Полагаем, что окрестность рассматриваемой угловой точки на внешних краях клина свободна от нагрузки. Здесь используем схему, аналогичную схеме на фиг. 1, без луча $\theta = -\varphi$.

1. *Общие уравнения и соотношения.* В каждой клиновидной области имеем дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

соотношения между компонентами деформаций и перемещений

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

зависимости между компонентами напряжений и деформаций

$$\sigma_r - \sigma = 2 \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\varepsilon_r - \varepsilon), \quad \sigma_\theta - \sigma = 2 \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\varepsilon_\theta - \varepsilon)$$

$$\tau_{r\theta} = 2 \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \gamma_{r\theta}, \quad \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta)$$

$$\sigma_0 = 1/2 [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau_{r\theta}^2]^{1/2}, \quad \varepsilon_0 = [(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + 4\gamma_{r\theta}^2]^{1/2}$$

интенсивности напряжений и деформаций, между которыми принимается зависимость $\sigma_0 = k\varepsilon_0^m$, $k = k(\theta)$, где функция $k(\theta)$ характеризует неоднородные деформативные свойства материалов и определяется из экспериментов. Степени упрочнения у обоих материалов принимаются одинаковыми, а функции $k(\theta)$ — различными.

В каждой области допускается условие несжимаемости материала $\varepsilon = 0$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (2.2)$$

Величины в областях $0 \leq \theta \leq \alpha$, $-\beta \leq \theta \leq 0$ обозначим соответственно индексами $i = 1, 2$.

2. *Случай $\lambda \neq 1$.* Поле перемещений в каждой области, удовлетворяющее условию несжимаемости (2.2), представим в форме

$$u_i = r^\lambda f_i', \quad v_i = -(\lambda + 1) r^\lambda f_i$$

где $f_i = f_i(\theta, \lambda)$ и λ — соответственно, искомая собственная функция и собственное значение задачи. Компоненты напряжений представляются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ri} &= \sigma_{\theta i} + 4\lambda k_i r^{(\lambda-1)m} f_i' \chi_i, \quad \tau_{r\theta i} = k_i r^{(\lambda-1)m} [f_i'' + (1 - \lambda^2) f_i] \chi_i \\ \chi_i &= [f_i'' + (1 - \lambda^2) f_i]^2 + 4\lambda^2 f_i'^2 \quad (m-1)/2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в уравнения равновесия (2.1), приходим к выражениям

$$\sigma_{\theta r} = \frac{r^{(\lambda-1)m}}{(\lambda-1)m} \{ (k_1 [f_1'' + (1-\lambda^2) f_1] \chi_1)' + 4\eta k_1 f_1' \chi_1 \}, \lambda \neq 1$$

и к системе дифференциальных уравнений

$$(k_1 [f_1'' + (1-\lambda^2) f_1] \chi_1)'' + 4\eta (k_1 f_1' \chi_1)' + \left(1 - \frac{\eta^2}{\lambda^2}\right) k_1 [f_1'' + (1-\lambda^2) f_1] \chi_1 = 0 \quad (2.4)$$

Граничные условия будут: на внешних поверхностях клина

$$\begin{aligned} (k_1 [f_1'' + (1-\lambda^2) f_1] \chi_1)' + 4\eta k_1 f_1' \chi_1 &= 0 \\ f_1'' + (1-\lambda^2) f_1 &= 0 \text{ при } \theta = \alpha, -\beta \end{aligned} \quad (2.5)$$

на контактной поверхности

$$\begin{aligned} (k_1 [f_1'' + (1-\lambda^2) f_1] \chi_1)' + 4\eta k_1 f_1' \chi_1 &= (k_2 [f_2'' + (1-\lambda^2) f_2] \chi_2)' + 4\eta k_2 f_2' \chi_2 \\ [f_1'' + (1-\lambda^2) f_1] \chi_1 &= \gamma [f_2'' + (1-\lambda^2) f_2] \chi_2 \\ f_1 = f_2, f_1' = f_2' &\text{ при } \theta = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Система дифференциальных уравнений (2.4) с граничными условиями (2.5) — (2.6) — трехточечная задача на собственные значения для определения $f_1(\theta, \lambda)$ и λ .

Полуобратным способом, придавая различные значения $\lambda = \lambda_* < 1$, из (2.4) — (2.6) численным способом определяются, в конечном счете, соотношения между параметрами α, β, γ, m и параметрами неоднородности материалов для данной степени концентрации напряжений.

При условии $\lambda = \lambda_* > 1$ в пространстве этих параметров определится область малонапряженности.

3. *Случай* $\lambda = 1$. В случае конечных напряжений поле перемещений, удовлетворяющее условиям несжимаемости (2.2), представим в форме

$$u_i = Cr\psi_i, \quad v_i = -2Cf_i + Cr \ln r, \quad \psi_i = f_i'$$

где $f_i = f_i(\theta)$ — искомая функция θ , а C — произвольная постоянная. Соответственно, компоненты напряжений можно записать в виде

$$\sigma_{\theta i} = \sigma_{\theta i} + 4Bk_i \psi_i \chi_i, \quad \tau_{r, \theta i} = Bk_i (\psi_i' + 1) \chi_i$$

$$\chi_i = ((\psi_i' + 1)^2 + 4\psi_i^2)^{(m-1)/2}, \quad B = C | C |^{m-1}$$

Подставляя эти выражения напряжений в уравнения равновесия (2.1), приходим к выражениям

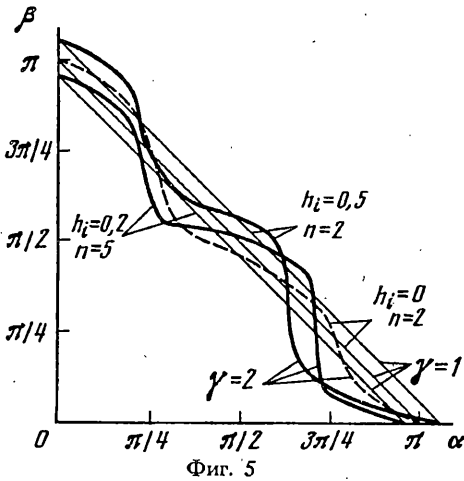
$$\sigma_{\theta 1} = 2B \int_{\theta}^{\alpha} k_1 (\psi_1' + 1) \chi_1 d\theta, \quad \sigma_{\theta 2} = -2B \int_{-\beta}^{\theta} k_2 (\psi_2' + 1) \chi_2 d\theta$$

где использованы условия отсутствия нормальных сил на внешних краях клина, и к системе дифференциальных уравнений

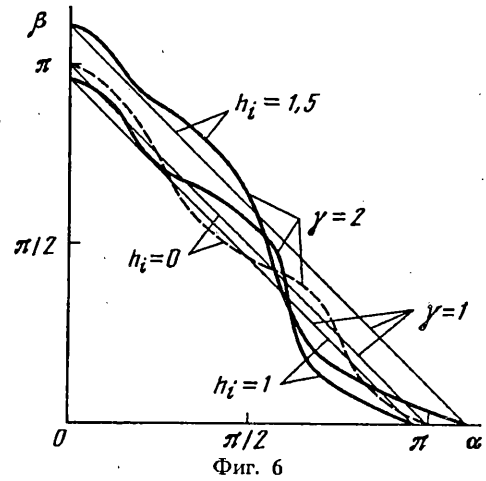
$$[k_i (\psi_i' + 1) \chi_i]' + 4k_i \psi_i \chi_i = 0 \quad (2.7)$$

с граничными условиями

$$\psi_i' = -1 \text{ при } \theta = \alpha, -\beta \quad (2.8)$$



Фиг. 5



Фиг. 6

и условиями на контактной поверхности

$$(\psi_1' + 1) \chi_1 = \gamma (\psi_2' + 1) \chi_2, \quad \psi_1 = \psi_2 \quad \text{при } \theta = 0 \quad (2.9)$$

Из требования непрерывности $\sigma_{\theta i}$ на этой поверхности имеем

$$\int_0^{\alpha} k_1 (\psi_1' + 1) \chi_1 d\theta + \int_{-\beta}^0 k_2 (\psi_2' + 1) \chi_2 d\theta = 0 \quad (2.10)$$

Имеем также условие $f_1(0) = f_2(0)$, следующее из требования непрерывности v на контактной поверхности.

Преобразованием из (2.7) приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$\psi_i'' = -4\psi_i \frac{4\psi_i^2 + (1 + \psi_i')(1 + m\psi_i')}{4\psi_i^2 + m(1 + \psi_i')^2} - h_i(1 + \psi_i') \frac{4\psi_i^2 + (1 + \psi_i')^2}{4\psi_i^2 + m(1 + \psi_i')^2} \quad (2.11)$$

где $h_i = k_i'/k_i$. Таким образом, система уравнений (2.11) с граничными условиями (2.8) — (2.10), в принципе, определяет гиперповерхность конечных напряжений с учетом неоднородности материалов. Следы этой поверхности в координатной плоскости $\alpha\beta$ отделяют зону малонапряженности от зоны сильной концентрации напряжений.

Далее рассмотрим экспоненциальный закон неоднородности материалов (1.14), при котором $h = \text{const}$. Для этого случая построено численное решение системы дифференциальных уравнений (2.11) при граничных условиях (2.8) — (2.10). На фиг. 5 построены предельные кривые $\beta = \beta(\alpha, \gamma, m, h)$, разделяющие область малонапряженности (ниже кривых) и область концентрации напряжений (выше кривых).

4. *Линейно-упругий неоднородно-составной клин.* Если составной клин изготовлен из линейно-упругих неоднородных материалов, принимая в уравнениях (2.11) $m = 1$ и экспоненциальный закон неоднородности (1.14) при $|h_i| < 2$, приходим к следующему трансцендентному уравнению

$$\left\{ \frac{2\Delta_1}{\Delta} \left[\frac{h_1}{p_1} (h_1 - \gamma h_2) + p_2 \right] + \frac{2\Delta_2}{\Delta} \gamma h_1 \frac{p_2}{p_1} + \frac{2h_1(\gamma - 1)}{p_1} - (h_1 - h_2) \left(\frac{2\gamma h_1 h_2}{p_1} - p_1 \right) \right\} \times \\ \times (E_1 e^{h_1 \alpha} + p_1) + [G + (h_1 - h_2)(h_1 + 2\gamma h_2) - 2(\gamma - 1)] (F_1 e^{h_1 \alpha} - h_1) + \\ + 2\gamma \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} p_2 + \frac{\Delta_2}{\Delta} h_2 \right) (F_2 e^{-h_2 \beta} - p_2) - G (E_2 e^{-h_2 \beta} - h_2) -$$

$$-4 \left[\frac{1}{h_1} (e^{2h_1\alpha} - 1) - \frac{\gamma}{h_2} (e^{-2h_2\beta} - 1) \right] = 0$$

Полученное уравнение определяет гиперповерхность конечных напряжений, следы которой на координатной плоскости $\alpha\beta$ представляют кривые $\beta = \beta(\alpha, \gamma, h_i)$, разделяющие зону малонапряженности (ниже кривых) и зону сильной концентрации (выше кривых). В (2.12) введены обозначения

$$p_i = \sqrt{4 - h_i^2}, \quad \Delta = E_1 E_2 \gamma \frac{p_2}{p_1} e^{h_2\beta - h_1\alpha} + F_2 [E_1 e^{p_1(h_1 - \gamma h_2)} + F_1] e^{h_2\beta - h_1\alpha}$$

$$\Delta_1 = -E_1 \gamma \frac{p_2}{p_1} [E_2 (h_1 - h_2) e^{h_2\beta} - 1] e^{-h_1\alpha} - F_2 (E_1 Q e^{-h_1\alpha} - 1) e^{h_2\beta}$$

$$\Delta_2 = \left[E_1 \frac{1}{p_1} (h_1 - \gamma h_2) + F_1 \right] [E_2 (h_1 - h_2) e^{h_2\beta} - 1] e^{-h_1\alpha} - E_2 (E_1 Q e^{-h_1\alpha} - 1) e^{h_2\beta}$$

$$E_1 = h_1 \sin(p_1\alpha) - p_1 \cos(p_1\alpha), \quad F_1 = p_1 \sin(p_1\alpha) + h_1 \cos(p_1\alpha)$$

$$E_2 = h_2 \cos(p_2\beta) - p_2 \sin(p_2\beta), \quad F_2 = p_2 \cos(p_2\beta) + h_2 \sin(p_2\beta)$$

$$Q = \frac{1}{p_1} [(\gamma - 1) - \gamma h_2 (h_1 - h_2)], \quad G = \frac{2\gamma}{\Delta} (\Delta_1 h_2 - \Delta_2 p_2)$$

$$\gamma = k_2(0)/k_1(0)$$

Численное решение трансцендентного уравнения (2.12) проведено на ЭВМ ЕС-1035, на основе которого на фиг. 6 построены предельные кривые малонапряженности в зависимости от неоднородности.

Гиперповерхности конечных напряжений при $|h_i| \geq 2$ в интервале $0 < \alpha + \beta \leq 2\pi$ не пересекаются с координатной плоскостью $\alpha\beta$ (это уравнение не приводится). Это означает, что при таких значениях параметра h_i , как в случае продольного сдвига, составной клин находится в состоянии малонапряженности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чобанян К. С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН Армении, 1987. 338 с.
2. Задоян М. А. Продольный сдвиг составного клина // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. № 2. С. 297—302.
3. Zadoyan M. A. Low-Stress Level of a Compound Wedge Under Steady Creep // Creep in Struct. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. P. 693—700.

Ереван

Поступила в редакцию
10.VI.1992