

УДК 539.3

© 1992 г. В. С. ТОНОЯН

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ  
 О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГИХ  
 КОНЕЧНЫХ СООСНЫХ ЦИЛИНДРОВ

Рассматриваются осесимметричные контактные задачи теории упругости для двух и трех соосных конечных цилиндров разных диаметров с различными упругими свойствами. Цилиндры контактируют между собой торцами. Контакт между цилиндрами предполагается гладким (без трения и сцепления). Внешние нагрузки на свободных торцах цилиндров во всех задачах выбраны таким образом, что образуемая контактная область имеет форму круга или кольца. Неизвестные радиусы области контакта определяются из условия непрерывности контактного нормального напряжения. Боковые поверхности цилиндров или свободны от внешних нагрузок, или находятся в условиях скользящей заделки. Все задачи решены методом Фурье. Смешанным задачам для одного и двух цилиндров посвящены работы [1—9].

Как известно, поставленные задачи сводятся к нахождению функций Лява  $\Phi^{(i)}(r, z)$ , которые удовлетворяют бигармоническому уравнению при следующих граничных условиях:

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i) = \begin{cases} f(r), & 0 \leq r \leq a \\ 0, & a \leq r < R_i \end{cases} \quad (1)$$

или

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < a \\ f_1(r), & a \leq r \leq R_i \end{cases} \quad (2)$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(r, l_i) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_i \quad (3)$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(R_i, z) = \sigma_z^{(i)}(R_i, z) = 0, \quad 0 \leq z \leq l_i \quad (4)$$

или

$$\tau_{rz}^{(i)}(R_i, z) = 0, \quad u_r^{(i)}(R_i, z) = 0, \quad 0 \leq z \leq l_i \quad (5)$$

условиях контакта

$$\tau_{rz}^{(i)}(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_i \quad (6)$$

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0), \quad 0 < r < c$$

$$u_z^{(1)}(r, 0) = -u_z^{(2)}(r, 0), \quad 0 \leq r \leq c \quad (7)$$

$$\sigma_z^{(2)}(r, 0) = 0, \quad c < r < R_i$$

или

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0), \quad c \leq r \leq R_1; \quad \sigma_z^{(1)}(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq c$$

$$u_z^{(1)}(r, 0) = -u_z^{(2)}(r, 0), \quad c \leq r \leq R_1; \quad \sigma_z^{(2)}(r, 0) = 0, \quad R_1 < r \leq R_2$$

и условиях симметрии

$$\tau_{rz}^{(2)}(r, l_2) = 0, \quad u_z^{(2)}(r, l_2) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_2 \quad (9)$$

где  $l_i$  — длины цилиндров,  $R_i$  — радиусы цилиндров ( $i = 1, 2$ ),  $c$  — радиус области контакта или ее внутренний радиус. Граничные условия (1), (3)—(7) относятся к задаче контакта двух цилиндров, когда контактная область имеет форму круга, а граничные условия (2)—(6) — к случаю контакта двух цилиндров, когда контактная область имеет форму кольца. При контакте трех цилиндров принимается, что крайние цилиндры имеют одинаковые длины  $l_1$  и радиусы  $R_1$  и изготовлены из одинаковых материалов, а средний цилиндр имеет длину  $2l_2$ , радиус  $R_2$  и изготовлен из другого материала. Поэтому задачи о контакте трех цилиндров можно рассматривать как задачи для двух цилиндров с условиями симметрии (9) на нижнем торце. Условия (4) и (5) относятся соответственно к свободной и скользящей боковой поверхности как для случая двух, так и для случая трех цилиндров. Функции Лява  $\Phi^{(i)}(r, z)$  ( $i = 1, 2$ ) ищем в виде суммы рядов Фурье и Фурье — Дини

$$\Phi^{(i)}(r, z) = z(A_i r^2 + B_i z^2 + C_i z) + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k^{(i)} I_0(\lambda_{ki} r) + G_k^{(i)} \lambda_{ki} r I_1(\lambda_{ki} r)] \sin(\lambda_{ki} z) + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(i)} \operatorname{sh}(\beta_{ki} z) + B_k^{(i)} \operatorname{ch}(\beta_{ki} z) + \beta_{ki} z (C_k^{(i)} \operatorname{sh}(\beta_{ki} z) + D_k^{(i)} \operatorname{ch}(\beta_{ki} z))] J_0(\beta_{ki} r) \quad (0 \leq r \leq R_i, 0 \leq z \leq l_i) \quad (10)$$

где  $\lambda_{ki} = k\pi/l_i$ ,  $J_n(x)$  и  $I_n(x)$  — функции Бесселя первого рода соответственно действительного и мнимого аргументов, а  $\beta_{ki}$  — корни уравнения  $J_1(\beta_{ki} R_i) = 0$ .

Напряжения и перемещения при осесимметричной деформации выражаются через функцию Лява  $\Phi(r, z)$  по формулам

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right), \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]$$

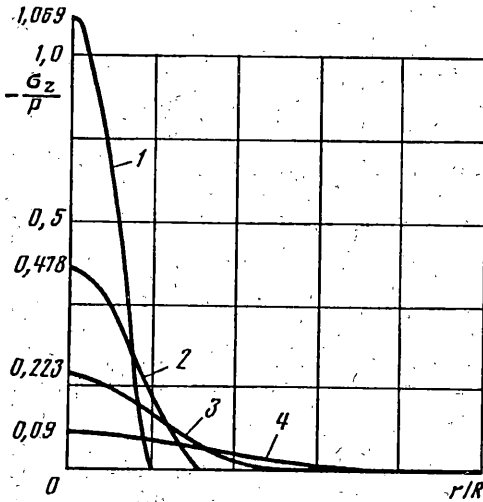
$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \quad u_r = -\frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \quad (11)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \Delta \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \quad u_z = \frac{1}{2G} \left[ 2(1 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]$$

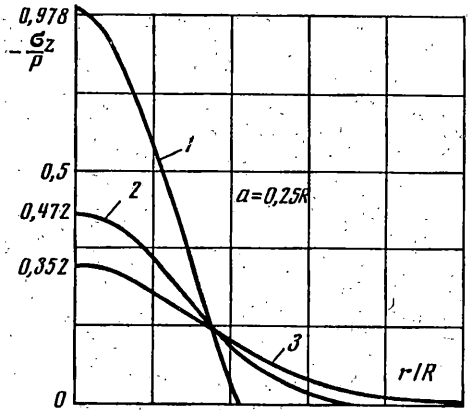
где  $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Вычислив по формулам (11) с помощью (10) напряжения и перемещения, удовлетворив граничным условиям, условиям контакта и условиям симметрии, для определения неизвестных коэффициентов ряда Фурье и Фурье — Дини для всех задач получим парные рядовые уравнения в виде

$$a_{0i} + \sum_{k=1}^{\infty} (1 + M_{ki}) \frac{X_{ki}}{\beta_{ki}} J_0(\beta_{ki} r) = \varphi_i(r), \quad 0 \leq r \leq c$$

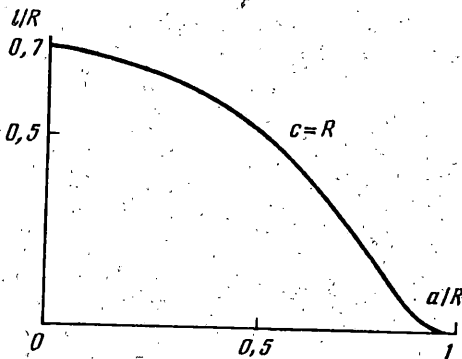
$$a_{0i} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{ki} J_0(\beta_{ki} r) = g_i(r), \quad c < r \leq R_i \quad (12)$$



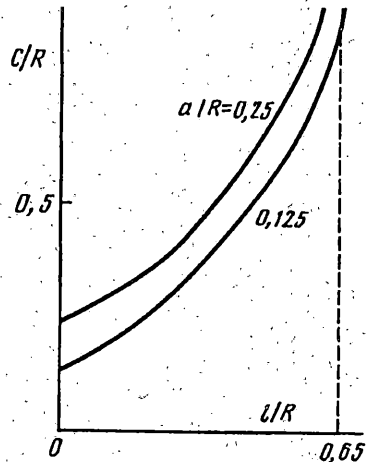
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

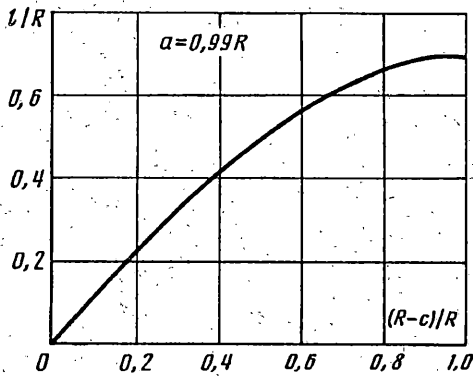
или

$$\begin{aligned}
 a_{0i} + \sum_{k=1}^{\infty} (1 + M_{ki}) \beta_{ki} X_{ki} J_0(\beta_{ki} r) &= \varphi_i(r), \quad 0 \leq r < c \\
 a_{0i} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{ki} J_0(\beta_{ki} r) &= g_i(r), \quad c \leq r \leq R_i
 \end{aligned} \tag{13}$$

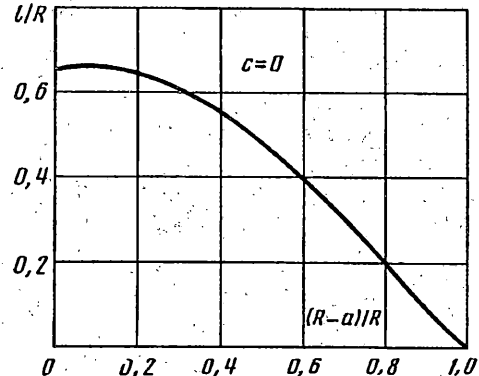
и некоторые конечные соотношения между этими коэффициентами, где  $a_{0i}$ ,  $a_{0i}$ ,  $X_{ki}$  выражаются через эти коэффициенты. При этом уравнения (12) относятся к задачам, когда контактная область — круг, а (13) — к задачам, когда контактная область — кольцо. Применяя известный метод решения парных рядов — уравнений (12) и (13), приводим их к решению следующих бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$b_s^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{sn}^{(0)} b_n^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{sn}^{(0)} b_n^{(2)} + d_s^{(0)}$$

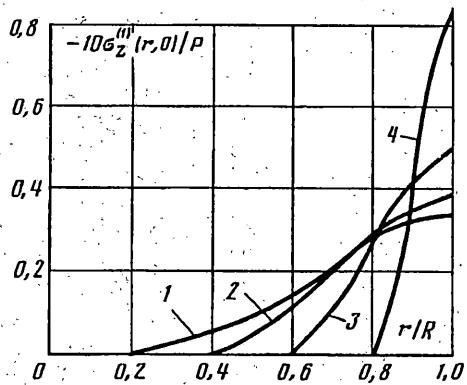
где  $b_s^{(0)}$  и  $X_{ki}$  связаны между собой некоторым соотношением. Доказывается, что эта система регулярна [10, 11]. Получена формула для контактного нормального напряжения с выделенной особенностью. Коэффициент при особенностях



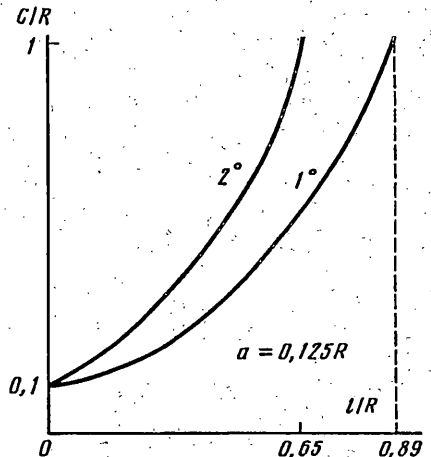
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

В окрестности точки  $r = c$  имеет вид

$$K = f_2(c, R) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n^{(0)}$$

Из условий непрерывности контактного нормального напряжения получим формулу для определения области контакта

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n^{(0)} = 0$$

При контакте по всему торцу ( $c = R$  или  $c = 0$ ) зависимость между геометрическими и физическими параметрами контактирующих цилиндров и размерами площади приложения внешней нагрузки выражается формулой

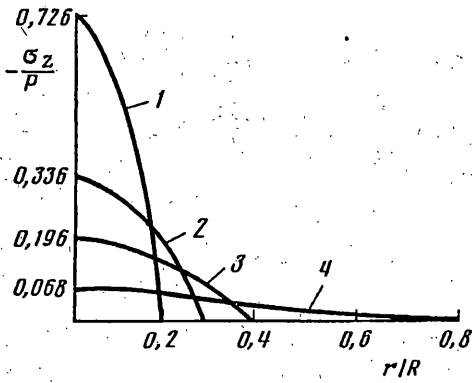
$$a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} N_k = 0$$

В этом случае для контактных нормальных напряжений получаем

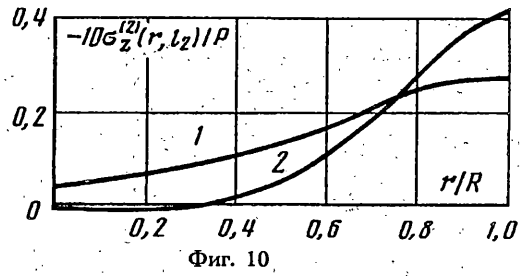
$$\sigma_z = a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} N_k J_0(\beta_k r)$$

где  $N_k$  выражается через  $b_k$  и заданные граничные функции.

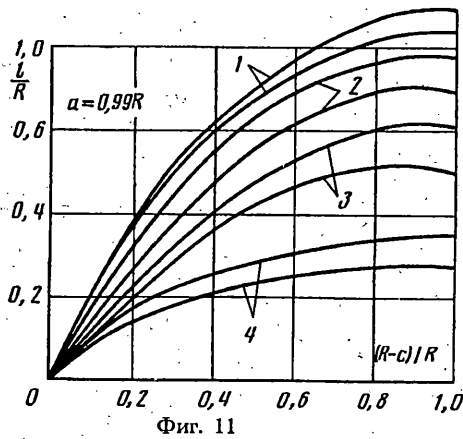
Приведем результаты расчетов по определению области контакта и контактных напряжений, когда  $f(r) = -P$ ,  $f(r) = -Pr$ ,  $f(r) = -Pr^2$  в зависимости от размера



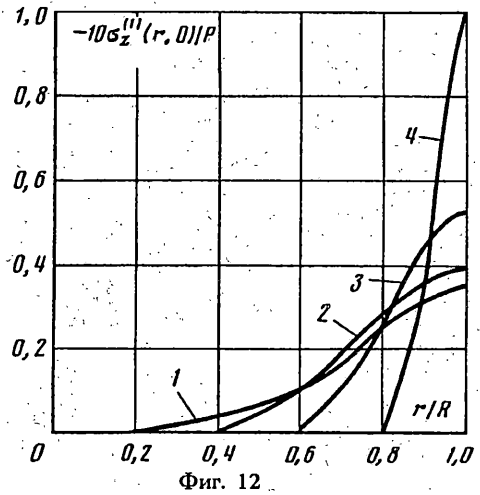
Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12

области приложения внешней нагрузки при различных значениях упругих констант и размеров цилиндров.

1°. Для случая контакта двух цилиндров с граничными условиями (1), (3), (5)–(7), когда  $l_1 = l_2 = l$ ,  $R_1 = R_2 = R$  и

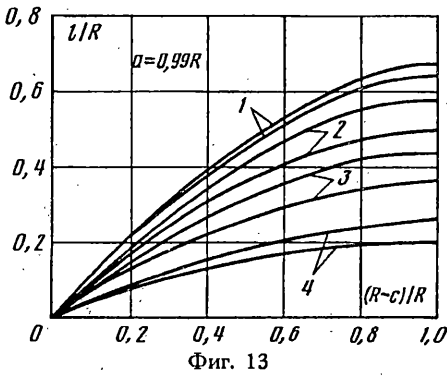
$$\sigma_z^{(0)}(r, l) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\beta_k r) = \begin{cases} -P, & 0 \leq r \leq a \\ 0, & a < r \leq R \end{cases}$$

$$a_0 = -\frac{a^2 P}{R^2}, \quad a_k = -\frac{2a J_1(\beta_k a) P}{R^2 \beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)}$$

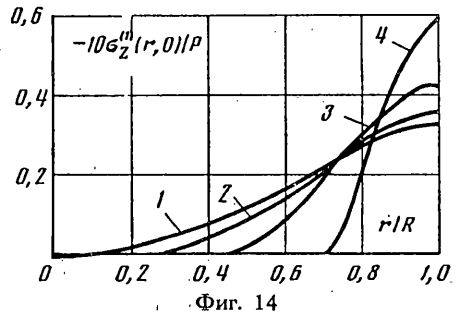
на фиг. 1, 2 приведены графики нормального контактного напряжения, а на фиг. 3, 4 — графики радиуса области контакта. При расчете данных, приведенных на фиг. 1; принято  $a/R = 0,125$ ; кривая 1 соответствует случаю  $l = 0,1 R$ , 2 —  $l = 0,25 R$ , 3 —  $l = 0,4 R$ , 4 —  $l = 0,65 R$ . Кривые 1–4 пересекают ось абсцисс в точках 0,176; 0,31; 0,48 и 1,0 соответственно. Кривые 1–3 на фиг. 2 ( $l/R = 0,25$ ; 0,5; 0,6 соответственно) рассчитаны при  $a/R = 0,25$  и пересекают ось абсцисс в точках 0,391; 0,66 и 1,0 соответственно.

2°. Для случая контакта двух цилиндров с граничными условиями (2), (3), (5), (6), (8), когда  $l_1 = l_2 = l$ ,  $R_1 = R_2 = R$  и

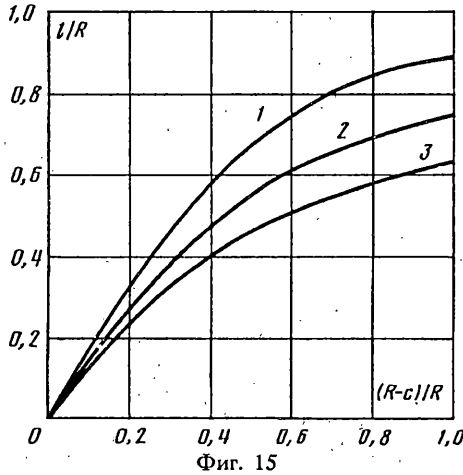
$$\sigma_z^{(0)}(r, l) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\beta_k r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < a \\ -P, & a < r \leq R \end{cases}$$



Фиг. 13



Фиг. 14



Фиг. 15

$$a_0 = -\frac{(R^2 - a^2) P}{R^2}, \quad a_k = \frac{2aJ_1(\beta_k a) \Gamma}{R^2 \beta_k J_0^2(\beta_k r)}$$

на фиг. 5, 6 приведены зависимости радиуса области контакта, а на фиг. 7 — распределения нормального контактного напряжения (принято  $\nu_1 = 0,1$ ;  $\nu_2 = 0,4$ ;  $a/R = 0,99$ ; кривые 1—4 рассчитаны для  $c/R = 0,2$ ;  $0,4$ ;  $0,6$ ;  $0,8$  соответственно).

3°. Для задачи, аналогичной 1° и 2°, с той разницей, что граничное условие (5) заменено условием (4), на фиг. 8 приведены зависимости размера области контакта для случая, когда боковая поверхность цилиндра свободна, а контактная область — круг (кривая 1°), а также для случая, когда боковая поверхность также свободна, а контактная область — кольцо (кривая 2°); на фиг. 9—11 приведены распределения нормального контактного напряжения. Кривые 1—4 на фиг. 9 ( $c/R = 0,2$ ;  $0,3$ ;  $0,4$  и  $0,8$  соответственно) получены при  $a/R = 0,125$ . Кривые 1 и 2 на фиг. 10 ( $c/R = 0,6$  и  $0,8$  соответственно) рассчитаны при  $\nu_1 = \nu_2 = 0,1$ ;  $a/R = 0,99$ ;  $\gamma \equiv G_1/G_2 = 0,05$ . Пары кривых 1—4 на фиг. 11 рассчитаны при  $\gamma = 0,05$ ;  $0,5$ ;  $2$  и  $20$  соответственно; при этом каждая верхняя кривая соответствует значениям  $\nu_1 = 0,1$  и  $\nu_2 = 0,3$ , а каждая нижняя —  $\nu_1 = 0,3$  и  $\nu_2 = 0,1$ .

4°. Для задачи контакта трех цилиндров с граничными условиями задачи 2° или 3°, когда на нижнем торце цилиндра удовлетворяются условия симметрии (9), на фиг. 12—15 приведены графики зависимостей размера области контакта и распределений нормального контактного напряжения. Кривые 1—4 ( $c/R = 0,2$ ;  $0,4$ ;  $0,6$ ;  $0,8$  соответственно) рассчитаны при  $a/R = 0,99$ ;  $\gamma = 0,5$ ;

$\nu_1 = 0,1; \nu_2 = 0,4$ . Пары кривых 1—4 на фиг. 13 рассчитаны соответственно для  $\gamma = 0,05; 0,5; 2$  и  $20$ ; при этом каждая верхняя кривая соответствует  $\nu_1 = 0,1$  и  $\nu_2 = 0,4$ , а каждая нижняя —  $\nu_1 = 0,4$  и  $\nu_2 = 0,1$ . Кривые 1—4 на фиг. 14 рассчитаны при  $\nu_1 = \nu_2 = 0,1; \gamma = 0,5; a/R = 0,99; c/R = 0,1; 0,3; 0,5$  и  $0,7$  соответственно. Кривые 1—3 на фиг. 15 соответствуют значениям  $\gamma = 0,05; 0,5; 1,0$  и получены при  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3; a/R = 0,99$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамян Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра//Докл. АН АрмССР. 1954. Т. 19. № 1. С. 3—12.
2. Баблоян А. А., Тоноян В. С. Об одной задаче для полого конечного цилиндра//Изв. АН АрмССР. Механика. 1970. Т. 23. № 6.
3. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. О точном решении осесимметричной задачи теории упругости для круглой жестко-закрепленной плиты//Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. н. 1963, Т. 16. № 5.
4. Попов Г. Я., Ростовцев Н. А. Контактные (смешанные) задачи теории упругости//Труды II съезда по механике. Обзорные доклады. Механика твердого тела. Вып. 3. М.: Наука, 1966.
5. Проценко В. С., Фесенко Е. Д. Определение давления в области контакта и области контакта в случае сжатия двух круговых цилиндров, радиусы которых почти равны//Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. Т. 31. № 5.
6. Мартиросян З. А., Тоноян В. С. О контактном взаимодействии трех соосных упругих цилиндров конечных длин//Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 94—102.
7. Мартиросян З. А., Нерсисян Г. Г. Некоторые контактные задачи для двух конечных цилиндров из различных материалов//Изв. АН АрмССР. Сер. техн. н. 1980. № 1. С. 40—46.
8. Нерсисян Г. Г. Об одной контактной задаче для двух упругих конечных цилиндров//Механика. Сб. тр. Вып. 1. Ереван: Изд-во Ереванск. гос. ун-та. 1982. С. 108—118.
9. Тоноян В. С. Осесимметричная контактная задача для двух конечных цилиндров//Выездн. засед. по соврем. пробл. теории контактных взаимодействий. Тез. докл. Ереван, 1988. С. 135—138.
10. Баблоян А. А., Тоноян В. С. Изгиб двухслойной толстой круглой плиты осесимметричной нагрузкой//Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. н. 1963. Т. 16. № 1.
11. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра//Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 6.

Ереван

Поступила в редакцию  
17.VI.1992