МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1992

УДК 539.3

© 1992 г. В. М. АЛЕКСАНДРОВ

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ИЗНОСА

Рассмотрена осесимметричная контактная задача термоупругости для шероховатого полупространства с учетом тепловыделения от трения и абразивного износа при вращении кольцевого штампа. Предполагается, что коэффициент трения является линейной функцией температуры. В несколько иной постановке плоская задача исследована в [1].

1. Пусть в упругое полупространство (тело 2) вдавливается силой P осесимметричный кольцевой штамп (тело 1). Сила P приложена по оси симметрии штампа, который вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω (фигура). Допустим, что область контакта штампа с полупространством определяется неравенством $a \leq r \leq b$ и она не изменяется с течением времени $t(a = b = 0)$. В области контакта кроме давления $q(r, t) = -\sigma_z(r, 0, t)$ действует касательное усилие $\tau(r, t) = \tau_{\varphi z}(r, 0, t)$, связанное с $q(r, t)$ законом Кулона

$$\tau(r, t) = kq(r, t) \tag{1.1}$$

где k — коэффициент трения. Его далее будем считать зависящим линейным образом от температуры T_* поверхностей тел в области контакта, т. е.

$$k = k_1 + k_2 T_*(r, t) \tag{1.2}$$

Касательными усилиями $\tau_{rz}(r, 0, t)$ в области контакта пренебрегаем. Заметим, что в области контакта будет еще отлична от нуля функция

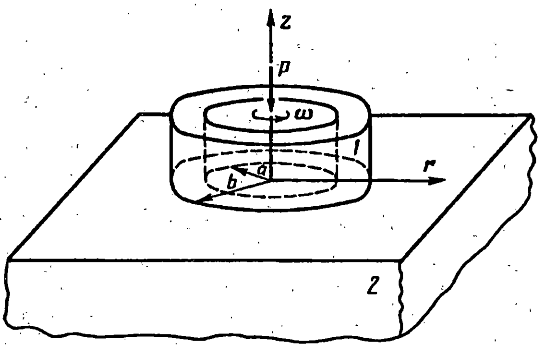
$$p_2(r, t) = (\partial T_2/\partial z + \varkappa_2 T_2)_{z=0} \tag{1.3}$$

где $T_2(r, z, t)$ — температура тела 2, $\varkappa_2$ — коэффициент теплообмена его с окружающей средой, температура которой принята равной нулю. Вне области контакта граница полупространства не нагружена и функция $p_2(r, t)$ равна нулю. Под влиянием $q(r, t)$, $\tau(r, t)$ и $p_2(r, t)$ полупространство находится в состоянии осесимметричной деформации и деформации кручения, причем эти напряженно-деформированные состояния не взаимосвязаны.

Касательные усилия $\tau(r, t)$ совершают в единицу времени работу

$$Q(r, t) = \omega r\tau(r, t) \tag{1.4}$$

которая расходуется на износ поверхности полупространства (предполагаем, что штамп не изнашивается) и на тепловыделение в области контакта. Тепловыделение приводит к нагреву тел. В [2] показано, что долей мощности энергии (1.4),



идущей на износ можно пренебречь. Итак, будем считать, что вся мощность энергии (1.4) идет на теплообразование.

Условие контакта тел 1 и 2 запишем в виде

$$w_1 + w_2 + w_3 = -\,[\delta(t) - f(r)](a \le r \le b) \tag{1.5}$$

где w_1 — перемещение границы $z = 0$ полупространства вследствие смятия микронеровностей, w_2 — термоупругое перемещение точек поверхности полупространства, w_3 — перемещение границы $z = 0$ полупространства вследствии ее износа, $\delta(t)$ — жесткое перемещение штампа по действием силы P, $f(r)$ — функция, описывающая форму основания штампа.

Перемещение w_1 примем линейно зависимым [3] от контактного давления $q(r, t)$, т. е.

$$w_1 = -\,lq(r, t) \tag{1.6}$$

Перемещение w_3 в силу абразивного износа [4] можно представить в форме

$$w_3 = -\,\omega r \int_0^t m\,[T_*(r, \eta)]\,[k_1 + k_2 T_*(r, \eta)]\,q(r, \eta)\,d\eta \tag{1.7}$$

где $m(T_*)$ — коэффициент износостойкости.

2. Чтобы получить выражение для w_2 рассмотрим следующую вспомогательную осесимметричную задачу термоупругости для полупространства

$$\sigma_z(r, 0, t) = \begin{cases} 0 & (0 \le r < a) \\ -\,q(r, t) & (a \le r \le b), \\ 0 & (b < r < \infty) \end{cases} \quad \tau_{rz}(r, 0, t) = 0 \tag{2.1}$$

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial z} + \varkappa_2 T_2\right)_{z=0} = \begin{cases} 0 & (0 \le r < a) \\ p_2(r, t) & (a \le r \le b) \\ 0 & (b < r < \infty) \end{cases}$$

на бесконечности перемещения и температура исчезают. Будем предполагать, что изменение температуры во времени является медленным, поэтому функцию T_2 можно считать гармонической. Инерционными эффектами, связанными с изменением напряженно-деформированного состояния во времени, также будем пренебрегать.

Применяя к уравнениям Ламе — Неймана, а также уравнению для функции T_2, интегральное преобразование Ханкеля, найдем в трансформантах Ханкеля следующее общее решение задачи термоупругости для полупространства [5]:

$$T^* = Ce^{\gamma z},\ U = (A + \gamma z B)e^{\gamma z} - 2\beta C\kappa^{-1} z e^{\gamma z} \tag{2.2}$$

$$W = (\varkappa B - A - \gamma z B)e^{\gamma z} + 2\beta C\varkappa^{-1} z e^{\gamma z}$$

Здесь γ — параметр интегрального преобразования, $\varkappa = 3-4\nu, \beta = (1+\nu)\alpha$, ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного расширения, A, B и C функции от γ и t, подлежащие определению из граничных условий (2.1). Окончательно в ходе решения вспомогательной задачи найдем

$$w_2(r, 0, t) = -\frac{2}{\pi\theta}\int_a^b q(\rho, t)\frac{\rho}{r+\rho}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)d\rho + \beta\int_a^b p_2(\rho, t)\,k(r, \rho)\,\rho d\rho \tag{2.3}$$

Здесь $K(e)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $\theta = G(1-\nu)^{-1}$, G — модуль сдвига

$$k(r, \rho) = \int_0^\infty \frac{J_0(\gamma r)\,J_0(\gamma\rho)}{\gamma + \kappa_2}\,d\gamma \tag{2.4}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя. Нетрудно убедиться, что $k(r, \rho)$ представляет собой в квадрате $a \le r \le b, a \le \rho \le b$ непрерывную по обоим переменным функцию.

Подставляя (1.6), (1.7) и (2.3) в условиях (1.5), получим относительно функции $q(r, t)$ следующее интегральное уравнение:

$$\begin{gathered} lq(r, t) + \frac{2}{\pi\theta}\int_a^b q(\rho, t)\frac{\rho}{r+\rho}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)d\rho + \\ + \omega r\int_0^t m\,[T_*(r, \eta)]\,[k_1 + k_2T_*(r, \eta)]\,q(r, \eta)\,d\eta = \\ = \delta(t) - f(r) + \beta\int_a^b p_2(\rho, t)\,k(r, \rho)\,\rho d\rho \quad (a \le r \le b,\ 0 \le t \le t_* < \infty) \end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь предполагаем, что величина t_* достаточно велика, но такая, что $\delta(t_*)$ имеет порядок перемещения в линейной теории упругости.

3. Для определения функций $T_*(r, t)$ и $p_2(r, t)$ будем считать штамп массивным теплопроводящим телом (полупространством) и рассмотрим задачу теплопроводности для двух полупространств ($z \ge 0$ — тело 1 и $z \le 0$ — тело 2), между которыми осуществляется идеальный тепловой контакт по кольцу $a \le r \le b$, а вне кольца имеет место теплообмен с окружающей средой. Такая задача сводится к определению температур — гармонических функций $T_1(r, z, t)$ и $T_2(r, z, t)$ при граничных условиях

$$\begin{gathered} T_1(r, 0, t) = T_2(r, 0, t) = T_*(r, t) \quad (a \le r \le b) \\ \left(\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial z} - \lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)_{z=0} = \omega r\,[k_1 + k_2T_*(r, t)]\,q(r, t) \quad (a \le r \le b) \\ \left[(-1)^i\frac{\partial T_i}{\partial z} + \kappa_iT_i\right]_{z=0} = 0 \quad (0 \le r < a, b < r < \infty) \end{gathered} \tag{3.1}$$

на бесконечности T_1 и T_2 исчезают. Здесь λ_i — коэффициенты теплопроводности, κ_i — коэффициенты теплообмена.

Заметим, что задача (2.5), (3.1) является нелинейной. Однако ее можно упростить следующим образом. Заменим во втором условии (3.1) функцию $q(r, t)$ ее средним значением

$$q^{\vee} = \frac{P}{\pi(b^2 - a^2)}, \quad P = 2\pi\int_a^b q(\rho, t)\,\rho\,d\rho \tag{3.2}$$

которое кстати не зависит от t. Тогда задача определения температур T_1 и T_2 станет линейной и к тому же эти температуры не будут уже зависеть от времени. Для дальнейшего упрощения введем коэффициент разделения потока тепла в области контакта, предположив, что при $z = 0$:

$$\partial T_1/\partial z = -\lambda \partial T_2/\partial z \quad (a \le r \le b) \tag{3.3}$$

Тогда задача теплопроводности (3.1) распадается на две независимые с граничными условиями при $z = 0$:

$$-\lambda_1 (1+\mu) \frac{\partial T_1}{\partial z} = \omega r (k_1 + k_2 T_1)\, q \quad \left(a \le r \le b, \mu = \frac{\lambda_2}{\lambda \lambda_1}\right) \tag{3.4}$$

$$-\frac{\partial T_1}{\partial z} + \kappa_1 T_1 = 0 \quad (0 \le r < a, b < r < \infty)$$

$$\lambda_2 \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \frac{\partial T_2}{\partial z} = \omega r (k_1 + k_2 T_2)\, q \quad (a \le r \le b) \tag{3.5}$$

$$\partial T_2/\partial z + \kappa_2 T_2 = 0 \quad (0 \le r<a, b<r<\infty)$$

где T_1 и T_2 — исчезают на бесконечности. После решения задач (3.4) и (3.5) коэффициент разделения потока тепла λ должен быть найден из первого граничного условия (3.1), записанного в интегральной форме

$$T_1 = T_2 = T_*, \quad T_i = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b T_i(\rho, 0)\, \rho d\rho \tag{3.6}$$

При помощи интегрального преобразования Ханкеля задачи теплопроводности (3.4) и (3.5) приводятся к определению функций

$$p_i(r) = \left[(-1)^i \frac{\partial T_i}{\partial z} + \kappa_i T_i\right]_{z=0} \quad (a \le r \le b) \tag{3.7}$$

из интегральных уравнений

$$p_i(r) - (g_2^{(i)} r + \kappa_i) \int_a^b p_i(\rho)\, l_i(r,\rho)\, \rho d\rho = g_1^{(i)} r \quad (a \le r \le b) \tag{3.8}$$

$$g_j^{(i)} = \frac{\omega \bar{q} k_j \lambda^{1-i}}{\lambda_1 (1+\mu)}, \quad l_i(r,\rho) = \int_0^\infty \frac{J_0(\gamma r) J_0(\gamma \rho)\, \gamma}{\gamma + \kappa_i}\, d\gamma \tag{3.9}$$

Заметим, что

$$l_2(r,\rho) + \kappa_2 k(r,\rho) = \frac{2}{\pi (r+\rho)} K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) \tag{3.10}$$

где $k(r,\rho)$ дается формулой (2.4). Отсюда видно, что ядра $l_i(r,\rho)$ имеют логарифмическую особенность при $r = \rho$. После решения интегральных уравнений (3.8) температуры поверхностей тел на границе $z = 0$ найдем по формулам

$$T_i(r, 0) = \int_a^b p_i(\rho)\, l_i(r,\rho)\, \rho d\rho \tag{3.11}$$

Далее нетрудно найти средние по области контакта температуры, чтобы из условия (3.6) определить λ.

4. С помощью интегрального представления осесимметричной дельта-функции

$$\delta(r,\rho) = \int_0^\infty J_0(\gamma r)\, J_0(\gamma\rho)\, \gamma d\gamma \tag{4.1}$$

представим интегральные уравнения (3.8) при $k_2 = 0$ в форме

$$\int_a^b p_i(\rho)\, m_i(r,\rho)\, \rho d\rho = g_1^{(i)} r \quad (a \le r \le b) \tag{4.2}$$

где ядра даются формулами

$$m_i(r,\rho) = \int_0^\infty \frac{\gamma^2}{\gamma + \kappa_i} J_0(\gamma r)\, J_0(\gamma\rho)\, d\gamma \tag{4.3}$$

Умножая (4.2) почленно на $p_i(r) r$ и интегрируя в пределах от a до b, получим эквивалентные (4.2) функциональные уравнения

$$\int_a^b \int_a^b p_i(r)\, p_i(\rho)\, m_i(r,\rho)\, r\rho dr d\rho = g_1^{(i)} \int_a^b p_i(r)\, r^2 dr \tag{4.4}$$

Введя в рассмотрение трансформанту Ханкеля

$$P_i(\gamma) = \int_a^b p_i(\rho)\, J_0(\gamma\rho)\, \rho d\rho \tag{4.5}$$

с учетом (4.3) придадим (4.4) вид

$$\int_0^\infty \frac{\gamma^2}{\gamma + \kappa_i} P_i^2(\gamma)\, d\gamma = g_1^{(i)} \int_a^b p_i(r)\, r^2 dr \tag{4.6}$$

Пусть $H_i(S)$, где S — кольцо $a \le r \le b$, гильбертовы пространства с нормой

$$\|p_i\|^2_{H_i} = \int_0^\infty \frac{\gamma^2}{\gamma + \kappa_i} P_i^2(\gamma)\, d\gamma \tag{4.7}$$

На основании равенства Парсеваля из (4.7) имеем

$$\|p_i\|^2_{H_i} \le \int_0^\infty P_i^2(\gamma)\, \gamma d\gamma = \|p_i\|^2_{L_2} \tag{4.8}$$

откуда следует, что $L_2(S) \subset H_i(S)$. С учетом (4.7) перепишем функциональные уравнения (4.6) следующим образом:

$$\|p_i\|^2_{H_i} = g_1^{(i)} \int_a^b p_i(r)\, r^2 dr \tag{4.9}$$

Назовем обобщенными решениями интегральных уравнений (3.8) функции $p_i(r) \in H_i(S)$, которые обращают в тождества интегральные соотношения (4.9). Докажем далее, что правая часть в (4.9) является линейным ограниченным функционалом в $H_i(S)$. Для этого введем трансформанту Ханкеля

$$R(\gamma) = \int_a^b r^2 J_0(\gamma r)\, dr \tag{4.10}$$

Нетрудно показать, что [6]:

$$R(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\left\{b^3\left[-\frac{2}{\gamma b} J_2(\gamma b) + J_1(\gamma b)\right] - a^3\left[-\frac{2}{\gamma a} J_2(\gamma a) + J_1(\gamma a)\right]\right\} \tag{4.11}$$

где $J_n(x)$ $(n = 1,2)$ — функции Бесселя. Для дальнейшего важно отметить, что $R(0)$ — ограничено и $R(\gamma) \sim O(\gamma^{-3/2})$ при $\gamma \to \infty$.

С помощью равенства Парсеваля и формул (4.5), (4.10) преобразуем интеграл в правой части (4.9) следующим образом:

$$\int_a^b p_l(r)\, r^2 dr = \int_0^\infty P_l(\gamma)\, R(\gamma)\, \gamma d\gamma = \tag{4.12}$$

$$= \int_0^\infty P_l(\gamma) \sqrt{K_l(\gamma)\gamma}\, R(\gamma) \sqrt{\frac{\gamma}{K_l(\gamma)}}\, d\gamma \quad \left(K_l(\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma + \kappa_l}\right)$$

Далее с помощью неравенства Коши — Буняковского и с учетом (4.7) найдем

$$\left|\int_a^b p_l(r)\, r^2 dr\right| \le M_l \|p_l\|_{H_l}, \quad M_l = \left(\int_0^\infty R^2(\gamma)\,(\gamma + \kappa_l)\, d\gamma\right)^{1/2} \tag{4.13}$$

Заметим, что в силу указанных свойств функции $R(\gamma)$ постоянные M_l — ограничены.ı. Теперь из теоремы Рисса о форме линейного ограниченного функционала следует, что правую часть в (4.9) можно единственным образом представить в виде

$$g_1^{(l)} \int_a^b p_l(r)\, r^2 dr = (p_l, p_l^\circ)_{H_l} \tag{4.14}$$

Подставляя (4.14) в (4.9) видим, что существуют единственные элементы $p_l^\circ \in H_l(S)$, обращающие (4.9) в тождества. Таким образом, решения интегральных уравнений (3.8) при $k_2 = 0$ существуют и единственны в $H_l(S)$.

Что касается интегральных уравнений (3.8) при $k_2 < 0$, то по физическому смыслу их решения существуют и единственны в $L_2(S)$. В то же время решения интегральных уравнений (3.8) при $k_2 > 0$, т. е. при растущем с температурой коэффициенте трения, могут не существовать, что будет означать невозможность осуществимости квазистационарного режима теплопроводности (явление теплового взрыва).

5. Для линеаризации интегрального уравнения (2.5) подставим вместо $T_*(r, t)$ его среднее значение (3.6), заметим также, что при этом $p_2(r, t)$, определяемое из уравнения (3.8), не будет зависеть от t. С учетом сказанного перепишем интегральное уравнение (2.5) в форме

$$lq(r,t) + \frac{2}{\pi\theta}\int_a^b q(\rho,t)\,\frac{\rho}{r+\rho}\,K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) d\rho + m_* r \int_0^t q(r,\eta)\, d\eta = \tag{5.1}$$

$$= \delta(t) - f_*(r) \quad (a \le r \le b,\ 0 \le t \le t_* < \infty)$$

$$m_* = \omega m(T_*)(k_1 + k_2 T_*), \quad f_*(r) = f(r) - \beta \int_a^b p_2(\rho)\, k(r,\rho)\, \rho d\rho \tag{5.2}$$

Перейдем далее в (5.1) к безразмерным переменным и величинам согласно формулам

$$\frac{r}{b} = r', \quad \frac{t}{t_0} = t', \quad \frac{a}{b} = \varepsilon, \quad \frac{l\theta}{b} = l', \tag{5.3}$$

$$t_0 = \frac{1}{m_*\theta}, \quad \frac{q}{\theta} = \varphi, \quad \frac{\delta}{b} = \delta', \quad \frac{f_*}{b} = g$$

В результате, опуская штрихи, получим

$$l\varphi(r,t)+\frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon}^{1}\varphi(\rho,t)\frac{\rho}{r+\rho}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)d\rho+r\int_{0}^{t}\varphi(r,\eta)\,d\eta= \tag{5.4}$$

$$=\delta(t)-g(r)\quad(\varepsilon\le r\le 1,\ 0\le t\le t_*t_0^{-1}<\infty)$$

К интегральному уравнению (5.4) нужно еще добавить условие квазистатики (3.2), записанное в безразмерном виде

$$\frac{P}{\theta b^2}=2\pi\int_{\varepsilon}^{1}\varphi(\rho,t)\,\rho d\rho \tag{5.5}$$

Разложим функцию $\varphi(r,t)$ в степенной ряд по малому временному параметру y:

$$\varphi(r,t)=\sum_{i=o}^{\infty}\varphi_i(r)\,y^i,\ y=1-e^{-st} \tag{5.6}$$

Здесь s — произвольное число, назначение его величины зависит от того, какой диапазон изменения безразмерного времени t представляется желательным изучить [7]. В силу (5.5) имеем

$$\frac{P}{\theta b^2}=\sum_{i=o}^{\infty}N_i\,y^i,\ N_i=2\pi\int_{\varepsilon}^{1}\varphi_i(\rho)\,\rho d\rho \tag{5.7}$$

Представим также функцию $\delta(t)$ в виде следующего ряда

$$\delta(t)=\delta_\infty t+\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i\,y^i \tag{5.8}$$

Подставляя теперь (5.6) и (5.8) в (5.4), вычисляя интеграл по времени и приравнивая затем члены при t и степенях y, получим бесконечную систему интегральных уравнений для последовательного определения функций $\varphi_i(r)$:

$$r\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i(r)=\delta_\infty \tag{5.9}$$

$$l\varphi_0(r)+\frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon}^{1}\varphi_0(\rho)\frac{\rho}{r+\rho}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)d\rho=\delta_0-g(r)$$

$$l\varphi_n(r)+\frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon}^{1}\varphi_n(\rho)\frac{\rho}{r+\rho}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)d\rho+\frac{1}{ns}\left[r\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_i(r)-\delta_\infty\right]=\delta_n\quad(n\ge 1)$$

Эти условия служат для определения после решения уравнений (5.9) величин δ_0 и δ_i $(i\ge 1)$. Из первого соотношения (5.9) следует

$$\lim\varphi(r,t)=\delta_\infty r^{-1}\quad(t\to\infty)$$

Отсюда с учетом (5.5) найдем

$$\delta_\infty=P\,[2\pi(1-\varepsilon)\,\theta b^2]^{-1}$$

В заключение отметим, что приближенные решения интегральных уравнений (3.8) и (5.9) могут быть, например, найдены путем разложения искомых функций в ряды по ортогональной на отрезке [0, 1] с весом r системе полиномов

$$P_m\left(\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}-\frac{2r^2}{1-\varepsilon^2}\right)$$

где $P_m(x)$ — полиномы Лежандра, и использования процедуры Бубнова — Галеркина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Методы решения контактных задач термоупругости с учетом износа взаимодействующих поверхностей//ПМТФ. 1985. № 3. С. 129—131.
2. *Александров В. М., Аннакулова Г. К.* Взаимодействие покрытий тел с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения//Трение и износ. 1992. Т. 13. № 1. С. 154—160.
3. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.: Гостехиздат, 1949. 272 с.
4. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
5. *Бородачев Н. М.* О решении контактной задачи термоупругости в случае осевой симметрии//Изв. АН СССР, отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1962. № 5. С. 86—90.
6. *Бейтман Г., Эргейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. М.: Наука, 1970. 328 с.
7. *Александров В. М.* Контактные задачи в трибологии//Механика и научно-технический прогресс. Т. 3. М.: Наука, 1988. С. 170—180.

Москва

Поступила в редакцию
10.VI.1992