

УДК 539.3

© 1992 г. В. В. ДОЛГОВ, Л. В. НИКИТИН

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ СИНЬОРИНИ С ТРЕНИЕМ

Приведены результаты численного решения методом конечных разностей плоской задачи Синьорини для однородного линейно-упругого тела прямоугольной формы, контактирующего под действием квазистатической альтернирующей прижимающей нагрузки с абсолютно жестким основанием.

Определена последовательность возникающих конфигураций точек смены граничных условий, разделяющих области сцепления и проскальзывания при монотонном квазистатическом нагружении и последующей разгрузке.

Обнаружено изменение типа конфигураций точек смены граничных условий при различных модулях упругости и коэффициентах трения на первоначальном этапе нагружения.

1. Введение. Впервые рассмотренная Синьорини задача об одностороннем контакте упругого тела с абсолютно жесткой и гладкой поверхностью была изучена с помощью вариационных неравенств в [1].

Статическая постановка задачи Синьорини с учетом трения и указанием причин затруднений доказательства существования и единственности ее решения представлена в [2]. Вопросы существования решения задачи остаются открытыми, за исключением частных случаев [3] малых значений коэффициента трения.

Вопросы численного решения вытекающих из постановки контактных задач с трением в виде вариационных неравенств рассматривались в [4—6].

К предмету настоящей статьи имеют отношение аналитические решения задач о внедрении жесткого штампа в упругую поделуплоскость без учета трения [7], с полным сцеплением [8, 9], с учетом образования зон проскальзывания и сцепления [10, 11], а также асимптотические оценки поведения решения в окрестности вершины клиновидной области с граничными условиями, отражающими различные ситуации при взаимодействии упругих тел, в том числе и жесткой поделуплоскостью [12—18]. О каких-либо результатах, связанных с разгрузкой при учете трения, не известно.

Численное решение поставленной контактной задачи с учетом закона трения Кулона позволяет расширить представление о возникновении, существовании и взаимодействии зон сцепления и проскальзывания в контактной области.

2. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу для тела прямоугольной формы, занимающего область D ($0 < x_1 < l_1$; $0 < x_2 < l_2$). Поведение однородного изотропного линейно-упругого материала без учета объемных сил описывается системой уравнений Ламе

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

где $\lambda > 0$, $\mu > 0$ модули упругости, ∇ — оператор Лапласа. Наличие трения требует рассмотрения задачи в приращениях смещений $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$.

Пусть тело покоится на абсолютно жесткой шероховатой плоскости ($x_2 = 0$) и прижимается к ней действующими на верхней границе нормальными равномерно распределенными нагрузками $\sigma_{22} = -p$, которые сначала монотонно возрастают ($\delta p > 0$), а затем с некоторого конечного значения уменьшаются до нуля ($\delta p < 0$).

Боковая поверхность свободна от напряжений

$$\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0; x_1 = 0, 0 < x_2 < l_2 \quad (2.2)$$

На оси симметрии имеем

$$u_1 = 0; \sigma_{12} = 0; x_1 = l_1/2, 0 < x_2 < l_2 \quad (2.3)$$

Нижняя граница тела находится в контакте с полуплоскостью так, что там должны выполняться условия

$$u_2 = 0; \sigma_{22} < 0; 0 \leq x_1 \leq l_1, x_2 = 0 \quad (2.4)$$

На границе контакта может быть r зон сцепления, в которых касательное напряжение не превосходит силы сухого кулонова трения

$$\delta u_1 = 0; |\sigma_{12}| < f|\sigma_{22}|, a_r < x_1 < b_r \quad (2.5)$$

где f — коэффициент трения, и столько же или на одну меньше зон проскальзывания (с учетом симметрии), в которых выполняется закон сухого трения

$$|\sigma_{12}| = f|\sigma_{22}|; b_{r-1} \leq x_1 \leq a_r \quad (2.6)$$

Приращение смещения в зоне проскальзывания должно быть направлено в сторону противоположную касательному напряжению так, что

$$\text{sign}(\sigma_{12} \cdot \delta u_1) \geq 0 \quad (2.7)$$

Число зон r и их координаты a_r, b_r должны быть определены в процессе решения.

3. Численный метод решения задачи. Задача (2.1)—(2.7) решалась методом конечных разностей на равномерной квадратной сетке. Аппроксимация частных производных второго порядка внутри области осуществлялась со вторым порядком точности, а для аппроксимации частных производных, входящих в граничные условия, использовались выражения первого и второго порядка точности [19].

Результирующая система уравнений представляла собой систему линейных алгебраических уравнений с блочной трехдиагональной матрицей коэффициентов, решение которой осуществлялось блочным методом матричной прогонки [20], с последующим итерационным уточнением [21].

Для определения заранее неизвестной конфигурации проводилась последовательность расчетов с различными координатами a_r и b_r и последующей проверкой выполнения неравенств (2.4), (2.5) и (2.7). Сходимость построенной разностной схемы проверялась на последовательности сгущающихся сеток.

При построении разностной схемы явным образом не учитывалось наличие сингулярных точек в области контакта, поэтому поведение численного решения в окрестностях сингулярных точек сравнивалось с имеющимися асимптотическими оценками (п. 5).

4. Результаты численных экспериментов. Результаты определения конфигураций представлены в табличной форме с использованием следующих обозначений: C° — узел разностной схемы, принадлежащий зоне сцепления ($u_1 = 0, \delta u_1 = 0$); C — узел, принадлежащий зоне сцепления ($u_1 \neq 0, \delta u_1 = 0$); D — узел зоны прямого проскальзывания; I — узел зоны обратного проскальзывания.

Все полученные результаты проверялись на единственность в рамках построенной разностной схемы. Модули упругости отнесены к модулю λ .

Таблица 1

№ конфигурации	Узлы разностной схемы										Интервалы f	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		10
1	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	C°	$0,000 \leq f \leq 0,011$
2	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	C°	$0,012 \leq f \leq 0,016$
3	D	D	D	D	D	D	D	D	D	C°	C°	$0,017 \leq f \leq 0,019$
4	D	D	D	D	D	D	D	D	C°	C°	C°	$0,020 \leq f \leq 0,023$
5	D	D	D	D	D	D	D	C°	C°	C°	C°	$0,024 \leq f \leq 0,027$
6	D	D	D	D	D	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,028 \leq f \leq 0,031$
7	D	D	D	D	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,032 \leq f \leq 0,036$
8	D	D	D	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,037 \leq f \leq 0,042$
9	D	D	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,043 \leq f \leq 0,052$
10	D	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,053 \leq f \leq 0,069$
11	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,070 \leq f$

Таблица 2

№ конфигурации	Узлы разностной схемы										Интервалы f	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		10
1	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	C°	$0,000 \leq f \leq 0,073$
2	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	C°	$0,074 \leq f \leq 0,107$
3	D	D	D	D	D	D	D	D	D	C°	C°	$0,108 \leq f \leq 0,133$
4	D	D	D	D	D	D	D	D	C°	C°	C°	$0,134 \leq f \leq 0,155$
5	D	D	D	D	D	D	C°	C°	C°	C°	C°	$0,156 \leq f \leq 0,177$
6	D	D	D	D	D	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,178 \leq f \leq 0,199$
7	D	D	D	D	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,200 \leq f \leq 0,218$
8	C°	D	D	D	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,219 \leq f \leq 0,221$
9	C°	D	D	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,222 \leq f \leq 0,247$
10	C°	D	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,248 \leq f \leq 0,266$
11	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,267 \leq f$

Таблица 3

№ конфигурации	Узлы разностной схемы										Интервалы f	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		10
1	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	C°	$0,000 \leq f \leq 0,093$
2	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	C°	$0,094 \leq f \leq 0,095$
3	C°	D	D	D	D	D	D	D	D	D	C°	$0,096 \leq f \leq 0,130$
4	C°	D	D	D	D	D	D	D	C°	C°	C°	$0,131 \leq f \leq 0,163$
5	C°	D	D	D	D	D	D	C°	C°	C°	C°	$0,164 \leq f \leq 0,190$
6	C°	D	D	D	D	D	C°	C°	C°	C°	C°	$0,191 \leq f \leq 0,212$
7	C°	D	D	D	D	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,213 \leq f \leq 0,230$
8	C°	D	D	D	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,231 \leq f \leq 0,235$
9	C°	C°	D	D	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,236 \leq f \leq 0,247$
10	C°	C°	D	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,248 \leq f \leq 0,257$
11	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	C°	$0,258 \leq f$

		ν					
		0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,45
C°	0,10						0
D			0—02	0—15	0—21	0—22	1—22
C°		0—24	3—24	16—24	22—24	23—24	23—24
C°	0,15						0
D				0—07	0—16	0—20	1—19
C°		0—24	0—24	8—24	17—24	21—24	20—24
C°	0,20					0	0
D				0—02	0—10	1—14	1—15
C°		0—24	0—24	3—24	11—24	15—24	16—24
C°	0,25				0	0	0
D					1—5	1—10	1—10
C°		0—24	0—24	0—24	6—24	11—24	11—24
C°	0,30					0	0—1
D						1—6	2—5
C°		0—24	0—24	0—24	0—24	7—24	6—24
C°	0,40						
D							
C°		0—24	0—24	0—24	0—24	0—24	0—24

4.1. *Нагружение.* Расчеты при нагрузке проводились для коэффициентов Пуассона {0,05; 0,10; 0,20; 0,30; 0,40; 0,45} и интервалов коэффициентов трения, допускающих существование только одной зоны проскальзывания. Определена последовательность возникающих конфигураций при увеличении коэффициента трения. Результаты для $\nu = \{0,05; 0,30; 0,45\}$ представленные в табл. 1—3 и 4 с использованием разностных сеток, соответственно, 10×10 и 24×24 .

В предельных случаях малого и большого трения зоны проскальзывания и сцепления, соответственно, полностью охватывают область контакта (1 и 2 конфигурации табл. 1—3). В правых частях табл. 1—3 приведены коэффициенты трения, для которых реализуется та или иная конкретная конфигурация.

В решении [10, 22], подтвержденном экспериментальными данными [23] для малых значений коэффициентов трения, конфигурация содержит центральную зону сцепления, а по краям зоны проскальзывания.

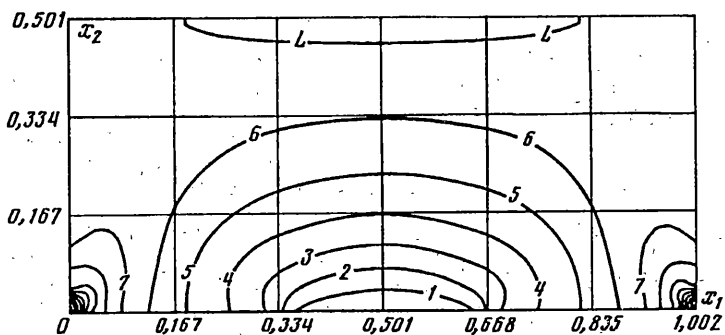
При малых значениях коэффициента трения его рост приводит к уменьшению размеров зон проскальзывания.

Для значений коэффициента Пуассона {0,20; 0,30; 0,40; 0,45} и коэффициентов трения, начиная, соответственно, с {0,194; 0,219; 0,166; 0,096}, появляются окаймляющие зоны сцепления. При больших значениях коэффициента трения зоны сцепления соединяются, полностью занимая контактную область.

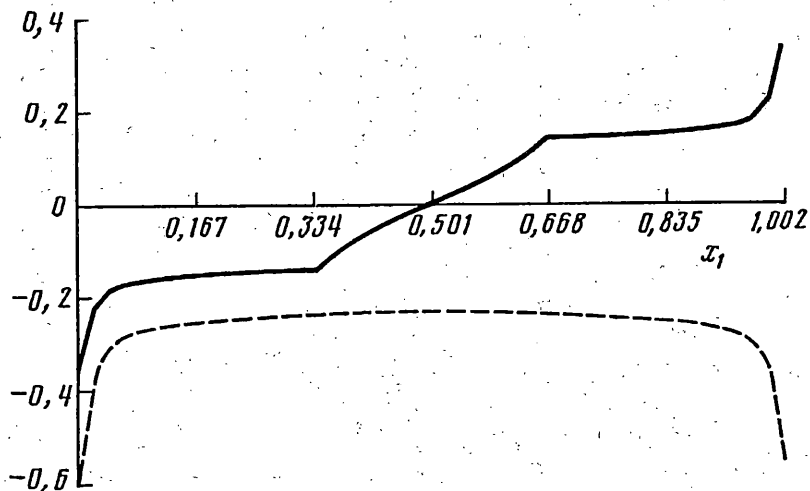
В табл. 4 представлены конфигурации для значений коэффициента трения {0,10; 0,15; 0,20; 0,25; 0,30; 0,40}. При одних и тех же значениях коэффициента трения с увеличением коэффициента Пуассона размер зоны проскальзывания увеличивается.

При монотонном нагружении конфигурация точек смены граничных условий не зависит от величины нагрузки.

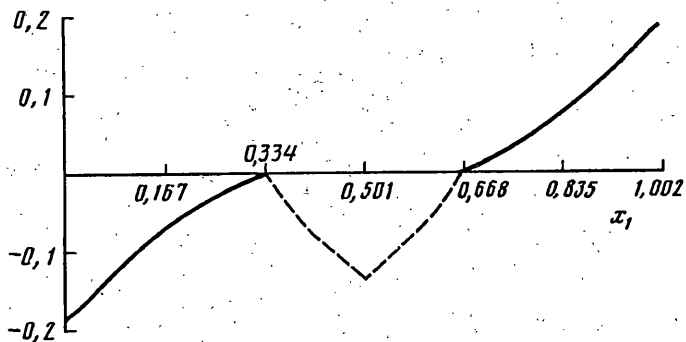
На фиг. 1 поле максимальных касательных напряжений представлено в виде изолиний 16 уровней со значениями {0,300; 0,335; 0,370; 0,406; 0,441; 0,476; 0,512; 0,547; 0,582; 0,618; 0,653; 0,689; 0,724; 0,759; 0,795; 0,830}. Верхняя часть цифры номера уровня изолиний указывает направление увеличения градиента. На фиг. 2 сплошной линией обозначено $\sigma_{21}(x_1)$, штриховой —



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$4^{-1} \times \sigma_{22}(x_1)$, а на фиг. 3 — сплошная линия $4 \times u_1(x_1)$ и штриховая — величина $\sigma_{21} - f \sigma_{22}$ при x_1 . Все эпюры на фиг. 2, 3 построены при $x_2 = 0$. Масштабные множители выбраны для лучшего визуального восприятия.

Графические результаты получены для прямоугольного тела при $\lambda = 1$, $\nu = 0,3$, $f = 0,15$, $p = 1$, сетке 48×24 с конфигурацией: {0—16}, {32—48} зоны проскальзывания, {17—31} центральная зона сцепления.

4.2. Разгрузка. Рассмотрим теперь разгрузку, начинающуюся со значения нормального напряжения на верхней границе тела $\sigma_{22} = -1$ при коэффициенте трения $f = 0,15$ и коэффициенте Пуассона 0,3, для которых при нагрузке кон-

№ конфигурации	Узлы разностной схемы											$\delta\sigma_{22}$	σ_{22}
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	D	D	D	D	D	D	D	C°	C°	C°	C°		-1,000000
2	C	C	C	C	C	D	D	C°	C°	C°	C°	0,420135	-0,579865
3	C	C	C	C	C	D	D	D	C°	C°	C°	0,054027	-0,525838
4	C	C	C	C	D	D	D	D	C°	C°	C°	0,108421	-0,417417
5	I	C	C	C	D	D	D	D	C°	C°	C°	0,048359	-0,369058
6	I	I	C	C	C	C	D	D	C°	C°	C°	0,074756	-0,294302
7	I	I	I	C	C	C	C	D	C°	C°	C°	0,015627	-0,278675
8	I	I	I	C	C	C	C	D	D	C°	C°	0,001000	-0,277675
9	I	I	I	C	C	C	D	D	D	C°	C°	0,058281	-0,219394
10	I	I	I	I	C	C	C	D	D	C°	C°	0,074583	-0,144811
11	I	I	I	I	I	C	C	C	D	C°	C°	0,041868	-0,102943
12	I	I	I	I	I	I	C	C	C	C°	C°	0,032946	-0,069997
13	I	I	I	I	I	I	I	C	C	C°	C°	0,011224	-0,058773
14	I	I	I	I	I	I	I	C	C	D	C°	0,015039	-0,043732
15	I	I	I	I	I	I	I	I	C	D	C°	0,021874	-0,021858
16	I	I	I	I	I	I	I	I	I	C	C°	0,017684	-0,004174
17	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	C°	0,004174	0,0

фигурация точек смены граничных условий содержит одну центральную зону сцепления. В правой части табл. 5 для каждой конфигурации из найденной последовательности приведены значения приращений и полного нормального напряжения в процессе разгрузки.

В отличие от этапа нагрузки при разгрузке координаты точки смены граничных условий зависят от истории нагружения.

При разгрузке на начальном этапе появляется зона сцепления у краев. После смены знака касательного напряжения у края, оставшаяся зона проскальзывания в центре несколько возрастает в обе стороны, а при дальнейшей разгрузке у краев появляется проскальзывание в противоположном направлении. В дальнейшем эта зона распространяется к центру, вытесняя остальные.

5. Асимптотические оценки. Рассмотрим поведение решения в окрестности сингулярных точек. Порядок и тип особенности определяется трансцендентным уравнением, получаемым непосредственно из граничных условий на образующих сторонах бесконечного изотропного упругого клина [12, 13].

В контактной области рассматриваемой задачи имеют место степенные особенности вида

$$\sigma_{ij}^a = O(r^{p-1}) \quad (5.1)$$

$$u_i^a = O(r^p) \quad (5.2)$$

где r — радиус, $(p-1)$ — порядок особенности, причем из физических соображений $0 < p < 1$.

В приведенных далее уравнениях $\kappa = 3 - 4\nu$, угол раствора θ для угловых точек равен $\pi/2$, а для точек смены граничных условий на контакте π , значения параметров Дундурса [24] приняты $\alpha = -1$ и $\beta = (2\nu - 1)/2(1 - \nu)$.

Рассмотрим клин с углом раствора $\pi/2$. На одной образующей его стороне напряжения отсутствуют

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{22} = 0; \tau_{r\theta} = \sigma_{12} = 0, \theta = \pi/2 \quad (5.3)$$

f	ν					
	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,45
0,01	0,987	0,987	0,987	0,987	0,987	0,987
0,05	0,940	0,940	0,940	0,941	0,941	0,941
0,10	0,886	0,886	0,887	0,888	0,889	0,890
0,15	0,836	0,836	0,838	0,839	0,842	0,843
0,20	0,789	0,790	0,792	0,795	0,798	0,801
0,25	0,745	0,746	0,749	0,753	0,758	0,761
0,30	0,703	0,704	0,708	0,713	0,719	0,723
0,40	0,624	0,626	0,632	0,639	0,648	0,653
0,50	0,552	0,554	0,561	0,570	0,581	0,589
1,00	0,252	0,256	0,264	0,277	0,294	0,305

Таблица 7

ν					
0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,45
0,923	0,867	0,781	0,711	0,650	0,622

На другой стороне задано одно из следующих трех возможных условий.
Проскальзывание без трения

$$\tau_{\theta} = \sigma_{21} = 0; u_r = u_2 = 0, \theta = 0 \quad (5.4)$$

Проскальзывание с сухим трением

$$\tau_{\theta} = -f\sigma_{\theta\theta} (\tau_{21} = -f\sigma_{22}); u_r = u_2 = 0, \theta = 0 \quad (5.5)$$

Сцепление

$$u_{\theta} = u_1 = 0; u_r = u_2 = 0, \theta = 0 \quad (5.6)$$

Трансцендентное уравнение, определяющее порядок особенности при проскальзывании, имеет вид [16, 17]:

$$\sin p\pi \left\{ 2(1-\nu) \sin \frac{\pi p}{2} \cos \frac{\pi p}{2} + f \left[p^2 - 2p\nu + 2p + (1-2\nu) \sin^2 \frac{\pi p}{2} \right] \right\} = 0 \quad (5.7)$$

Корни этого уравнения для прямого проскальзывания ($f < 0$) при различных коэффициентах Пуассона и трения приведены в табл. 6. При отсутствии трения и обратном проскальзывании ($f > 0$) корни в интервале $0 < p < 1$, а, следовательно, и особенность отсутствуют [14, 15, 16, 17].

В табл. 7 приведены результаты решения трансцендентного уравнения [12, 13] для сцепления

$$(4\nu - 3) \sin^2 \frac{\pi p}{2} - p^2 + 4(1-\nu)^2 = 0 \quad (5.8)$$

В табл. 8 сопоставлены результаты расчетов компонент напряжений в окрестности угловых точек при условиях прямого проскальзывания и сцепления, полученных численно в разделе 4, с асимптотическими оценками (5.7) и (5.8). В таблице

№	H_1	σ_{21}	σ_{21}^0	σ_{22}	σ_{22}^0	S
(а) Проскальзывание						
0	0,0010	-0,3429	-0,3431	-2,2863	-2,2873	0,0004
1	0,0208	-0,2182	-0,2107	-1,4547	-1,4048	0,0343
2	0,0417	-0,1833	-0,1885	-1,2219	-1,2569	0,0286
3	0,0625	-0,1705	-0,1767	-1,1364	-1,1777	0,0363
4	0,0833	-0,1635	-0,1687	-1,0902	-1,1245	0,0315
5	0,1042	-0,1589	-0,1627	-1,0596	-1,0850	0,0239
6	0,1250	-0,1556	-0,1580	-1,0374	-1,0537	0,0157
7	0,1458	-0,1530	-0,1542	-1,0202	-1,0279	0,0075
8	0,1667	-0,1510	-0,1509	-1,0063	-1,0061	0,0002
(б) Сцепление						
0	0,0010	-0,9934	-1,3440	-4,4457	-4,4463	0,0001
1	0,0208	-0,6642	-0,5591	-2,1783	-1,8497	0,1508
2	0,0417	-0,4980	-0,4577	-1,5942	-1,5141	0,0502
3	0,0625	-0,4081	-0,4071	-1,3636	-1,3468	0,0123
4	0,0833	-0,3535	-0,3746	-1,2435	-1,2394	0,0033
5	0,1042	-0,3164	-0,3513	-1,1701	-1,1620	0,0069
6	0,1250	-0,2891	-0,3332	-1,1204	-1,1024	0,0161
7	0,1458	-0,2674	-0,3187	-1,0845	-1,0544	0,0277
8	0,1667	-0,2495	-0,3067	-1,0571	-1,0145	0,0403

нулевому узлу соответствует асимптотическая оценка для $r = 10^{-3}$, H_1 — шаг сетки по оси x_1 , а $S = |\sigma_y^0 - \sigma_y| / |\sigma_y^0|$ относительная ошибка. Показатель особенности в точке, разделяющей зоны сцепления и прямого проскальзывания $\theta = \pi$, будет [18]:

$$p = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{2(1-\nu)}{f(2\nu-1)} + 1 \quad (5.9)$$

Для точки между зонами сцепления и обратного проскальзывания:

$$p = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{2(1-\nu)}{f(1-2\nu)} \quad (5.10)$$

В [18] показано, что особенность на границе между проскальзыванием и сцеплением отсутствует, так как в противном случае невозможно удовлетворить условиям сухого трения (2.4), (2.5) в области сцепления. Численные расчеты отражают этот факт.

В заключение отметим следующее:

Установлено, что на этапе монотонной нагрузки граница между зонами сцепления и проскальзывания фиксирована. Увеличение коэффициента Пуассона при постоянном коэффициенте трения сначала приводит к увеличению, а затем к уменьшению зон проскальзывания, вплоть до их полного исчезновения при $\nu = 1/2$;

Обнаружено существование конфигурации точек смены граничных условий с окаймляющими зонами сцепления;

В противоположность нагрузке, конфигурация точек смены граничных условий при разгрузке зависит от величины прижимающего напряжения. Кроме того в этом случае возможно появление зон как прямого, так и обратного проскальзывания;

На всех этапах нагрузки и разгрузки нормальные напряжения на контакте остаются отрицательными. Напряженно-деформированное состояние по окончании разгрузки исчезает во всех точках тела, включая граничные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. Necas J., Jarusek J., Haslinger J. On the solution of the variational inequality in the Signorini problem with small friction//Bull. U. M. I. 1980. V. 5. 17—В. P. 796—811.
4. Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я. Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986. 270 с.
5. Гловински Р., Лионс Ж.—Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
6. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. М.: Мир, 1989. 492 с.
7. Sadowsky M. A. Zweidimensionale probleme der elastizitätstheorie//Z. Angew. Math. Mech. 1928. Bd. 8. S. 107—121.
8. Абрамов В. М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно-жестким фундаментом при учете сил трения//ДАН. 1937. Т. 17. № 4. С. 173—178.
9. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
10. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления//ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413—424.
11. Антипов Ю. А., Арутюнян Н. Х. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления//ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1005—1017.
12. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension//J. Appl. Mech. 1952. V. 19. P. 526—528.
13. Bogy D. B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions//J. Appl. Mech. 1971. V. 38. P. 377—386.
14. Каландия А. И. Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов//ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 132—135.
15. Dundurs J., Lee M.-S. Stress concentration at a sharp edge in contact problems//J. Elasticity. 1972. V. 2. No. 2. P. 109—112.
16. Gdoutos E. E., Theocaris P. S. Stress concentrations at the apex of a plane indenter acting on an elastic half plane//J. Appl. Mech. 1975. V. 42. P. 668—692.
17. Comninou M. Stress singularity at a sharp edge in contact problems with friction//Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP). 1976. V. 27. P. 493—499.
18. Dundurs J., Comninou M. Some consequences of the inequality conditions in contact and crack problems//J. Elasticity. 1979. V. 9. No. 1. P. 71—82.
19. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. 352 с.
20. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1982. 589 с.
21. Эстербю О., Златев З. Прямые методы для разреженных матриц. М.: Мир, 1987. 118 с.
22. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
23. Моссаковский В. И., Петров В. В. О влиянии трения на микроскольжение//ДАН. 1976. Т. 231. № 3. С. 603—606.
24. Dundurs J. Discussion//J. Appl. Mech. 1969. V. 36. P. 650—652.

Москва

Поступила в редакцию
8.VI.1992