

УДК 539.3

© 1992 г. Н. Х. АРУТЮНЯН, В. Э. НАУМОВ, Ю. Н. РАДАЕВ

ДИНАМИЧЕСКОЕ НАРАЩИВАНИЕ УПРУГОГО СЛОЯ.

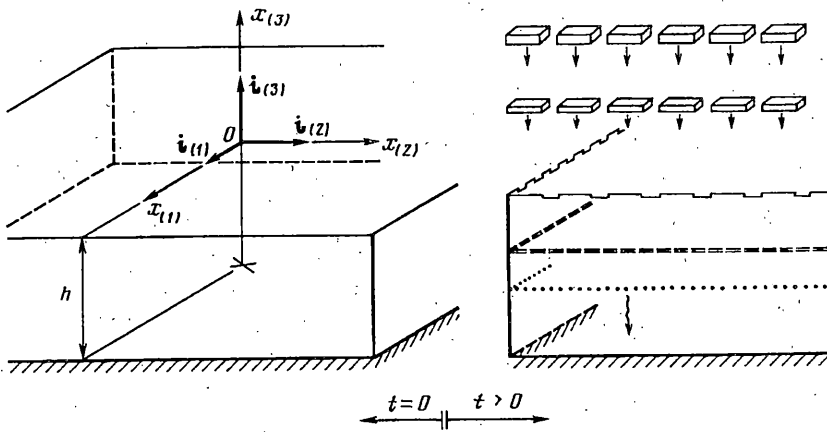
Ч. 1. ДВИЖЕНИЕ ПОТОКА ОСАЖДАЕМЫХ ЧАСТИЦ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ

Рассмотрена прикладная задача нелинейной механики растущих тел, связанная с наращиванием упругого слоя. Наращивание осуществляется путем осаждения высокоскоростного потока частиц на одну из поверхностей слоя; другая поверхность слоя жестко закреплена. При наращивании толщина слоя непрерывно возрастает во времени вследствие притока материала извне. Динамическое осаждение частиц инициирует волновой процесс в слое с последовательными отражениями волн от закрепленной границы и от движущейся по материальным частицам свободной поверхности слоя. Задача рассматривается как одномерная — с плоским фронтом волны. Получены уравнения динамики наращиваемого слоя. Для определенности реакция материала слоя описывается уравнениями состояния гиперупругого материала Сильборни. Показано, что одномерное волновое уравнение для наращиваемого слоя характеризуется наличием дополнительных («запаздывающих») членов, содержащих частные производные искомой функции (закона движения слоя) в предшествующие моменты времени. Изложен способ сведения сформулированной начально-краевой задачи для уравнения движения наращиваемого слоя к краевой задаче для квазилинейного уравнения в частных производных второго порядка в неклассической области. Численный анализ волнового процесса в динамически наращиваемом слое проведен с помощью метода характеристик. Акцент при этом делается на анализе рассматриваемого процесса при переменной во времени скорости падения наращиваемых частиц. Во второй части статьи эта же задача решена для случая постоянной скорости падения частиц.

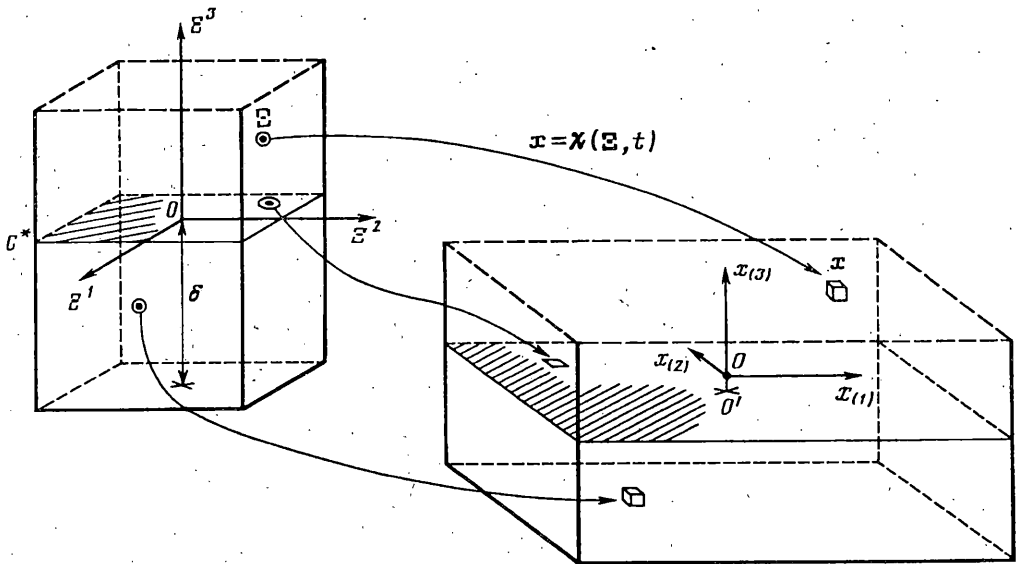
1. Введение. В современной технологии получили широкое распространение процессы, связанные с динамическим наращиванием деформируемых тел. Динамическое наращивание состоит в присоединении частиц материала, движущихся со значительными скоростями, к деформируемому телу, масса которого при этом непрерывно увеличивается во времени. Указанные обобщенные черты процессов динамического наращивания характерны, например, для плазменного напыления покрытий, литья набрызгиванием, быстропотекающих фазовых переходов типа «жидкость — твердое тело».

В работах [1, 2] предложен подход к математическому описанию процессов динамического наращивания деформируемых тел, основанный на принципиально новых кинематических представлениях, позволяющих корректно описывать движение континуума переменного состава. Нестационарное поведение наращиваемых тел может быть обусловлено, с одной стороны, действующими на них импульсными нагрузками, с другой стороны, — непосредственно осаждаемым высокоскоростным потоком наращиваемых частиц.

Одной из наиболее простых прикладных задач динамики наращиваемых тел является рассматриваемая ниже задача о динамическом наращивании упругого слоя. Эта задача может служить математической моделью технологических про-



Фиг. 1



Фиг. 2

цессов нанесения покрытий способом плазменного напыления или посредством какой-либо иной технологии. По нашему мнению, изложенный в публикуемой статье анализ волновых процессов, в принципе, позволяет прогнозировать образование структурных дефектов напыляемых покрытий типа внутренних расслоений, нарушений адгезионного сцепления с субстратом и т. п.

2. Постановка задачи и закон движения растущего слоя. Рассмотрим плоский слой равномерной толщины h , находящийся в момент времени $t=0$ в естественном состоянии. Зафиксируем в пространстве декартову систему координат $x = \{x_{(k)}\}$ ($k=1, 2, 3$), по отношению к которой множество частиц слоя при $t=0$ занимает область $\{|x_{(1)}| \leq \infty, |x_{(2)}| \leq \infty, -h \leq x_{(3)} \leq 0\}$. Здесь и далее нижние индексы заключаются в круглые скобки в тех случаях, когда имеются в виду компоненты величин относительно декартовой системы координат пространства. Индексы без скобок приписываются компонентам величин в конвективной системе координат. Фрагмент слоя при $t=0$ показан на фиг. 1 слева. Поверхность слоя $x_{(3)}=0$ свободна, поверхность $x_{(3)}=-h$ — жестко закреплена. Плотность материала слоя в естественном состоянии обозначим ρ_0 . Пусть, начиная с момента времени $t=$

$= 0+$, слой наращивается элементами того же материала, которые осаждаются на свободную поверхность слоя (поверхность наращивания), двигаясь перпендикулярно ей. Скорость движения приращиваемых частиц относительно системы координат $x_{(k)}$ обозначим V ; вектор V ориентирован в отрицательном направлении оси $x_{(3)}$. Ограничимся рамками одномерной постановки задачи, когда величины, определяющие состояние каждого приращиваемого инфинитезимального слоя, не зависят от координат $x_{(1)}$ и $x_{(2)}$. Поскольку фактически в дальнейшем будет иметь значение только скорость движения частиц в том месте пространства, где они осаждаются на поверхность наращивания, будем считать величину скорости V функцией только времени t . Поверхностную плотность потока осаждаемого вещества J зададим в простейшем виде:

$$J(t) = c_0 \rho_0 V(t) \quad (2.1)$$

где c_0 — постоянная концентрация вещества в осаждаемом потоке ($0 < c_0 < 1$).

Множество частиц слоя при $t=0$ (до начала наращивания) будем называть основным слоем, а множество частиц, добавленных к слою после начала наращивания — наращиваемой частью слоя. Объединение обоих упомянутых множеств назовем растущим слоем.

Остановимся вкратце на особенностях кинематики растущих тел. Общепринятый подход в механике деформируемого твердого тела предусматривает введение отсчетного состояния, пространственные координаты частиц в котором служат их лагранжевыми метками. Если иметь в виду, что до начала наращивания существовало некоторое основное тело (как непустое множество частиц), то его частицы, естественно, могут быть идентифицированы обычными лагранжевыми метками. Что касается частиц наращиваемой части тела, то выбор меток для них встречает определенные затруднения. Пространственные координаты частицы в момент ее вступления в состав растущего тела, в принципе, не могут служить ее меткой, поскольку в одном и том же месте пространства к телу в различные моменты времени могут присоединяться разные частицы. Кроме того, поскольку растущее тело непрерывно пополняется новыми частицами, для него невозможно зафиксировать какую-либо реализующуюся в физическом пространстве отсчетную конфигурацию частиц, поскольку для частиц, присоединившихся к телу после любого фиксированного момента времени, не найдется прообразов в пройденных телом конфигурациях.

В математической модели наращиваемого деформируемого тела, разработанной в [1, 2], движение частиц предложено описывать относительно специальным образом определяемого ассоциированного многообразия, на которое отображаются актуальные положения частиц растущего тела. Ассоциированное многообразие состоит из двух частей, соответствующих основному телу (существовавшему до начала наращивания) и наращиваемой части тела (добавленной после начала процесса наращивания). На фиг. 2 слева схематически показано ассоциированное многообразие, сконструированное в виде цилиндра $C^* = \{E: (E^1, E^2) \in \Pi, -\delta \leq E^3 \leq \delta\}$ ($\delta = \text{const} > 0$). Часть цилиндра C^* , расположенная ниже плоскости $E^3 = 0$, отображается на актуальную конфигурацию частиц основного тела, а часть C^* , расположенная выше плоскости $E^3 = 0$, — на актуальную конфигурацию частиц наращиваемой части тела. Упомянутое при этом отображение $x = \chi(E, t)$ определяет закон движения растущего тела. Справа на фиг. 2 условно показан фрагмент растущего слоя в актуальном состоянии. Точки $E = (E^1, E^2, E^3)$ нижней части цилиндра C^* связаны с лагранжевыми координатами $X = (X_1, X_2, X_3)$ (т. е. декартовыми координатами $X_k \equiv x_{(k)}$ в естественном состоянии при $t=0$) частиц основного тела «начальным» отображением $X = \Lambda(E)$. Геометрический смысл точек E , принадлежащих верхней части цилиндра C^* , иной. Пара чисел E^1, E^2 служит гауссовыми параметрами поверхности наращивания (части внешней поверхности тела, по которой в рассматриваемый момент про-

исходит наращивание), а $\Xi^3 > 0$ означает момент времени (в некоторой абсолютной шкале), в который осуществляется параметризация поверхности наращивания гауссовыми параметрами Ξ^1, Ξ^2 , изменяющимися в пределах сечения цилиндра C^* плоскостью $\Xi^3 = \text{const} > 0$. Таким образом, меткой частицы наращиваемой части служит тройка чисел (Ξ^1, Ξ^2, Ξ^3) , в которую вкладывается указанный геометрический смысл.

Геометрия растущего слоя позволяет применить изложенные соображения (подробности см. в [1]) с некоторыми упрощениями. В частности, «начальное» отображение Λ можно считать тождественным ($\Lambda \equiv I$), а в качестве ассоциированного многообразия C^* взять следующий «слой» в пространстве меток: $C^* = \{\Xi: |\Xi^1| \leq \infty, |\Xi^2| \leq \infty, -\delta \leq \Xi^3 \leq t\}$; здесь константа $\delta > 0$ с точностью до размерности равна глубине основного слоя в естественном состоянии h (еще раз обратим внимание на различие геометрического смысла координаты Ξ^3 в зависимости от ее знака).

Итак, закон движения растущего слоя будем искать в виде

$$x = \Xi^1 i_{(1)} + \Xi^2 i_{(2)} + \chi(\Xi^3, t) i_{(3)} \quad (|\Xi^1| \leq \infty, |\Xi^2| \leq \infty, -\delta \leq \Xi^3 \leq t, t > 0) \quad (2.2)$$

где $i_{(k)}$ — орты декартовой системы координат $x_{(k)}$, а тройка чисел (Ξ^1, Ξ^2, Ξ^3) идентифицирует частицу растущего тела. В записи (2.2) учтено, что частицы растущего слоя смещаются только вдоль оси $x_{(3)}$. Таким образом, из трех декартовых компонент закона движения χ , осуществляющего отображение ассоциированного многообразия на актуальную конфигурацию частиц наращиваемого слоя, существует только третья компонента. На фиг. 2 схематично показано взаимно-однозначное соответствие материальных частиц (слева) и их меток (справа), устанавливаемое отображением $x = \chi(\Xi, t)$. Репрезентативные материальные частицы показаны внутри основного слоя, на поверхности сращивания основной и наращиваемой частей и внутри наращиваемой части слоя. Положение поверхности сращивания в актуальном состоянии в силу выбора системы координат пространства определяется направленным отрезком $OO' = \chi(0, t) i_{(3)}$.

Ненулевые компоненты метрического тензора системы криволинейных координат (Ξ^1, Ξ^2, Ξ^3) и отличный от нуля символ Кристоффеля имеют вид

$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{33} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial \Xi^3}\right)^2, \quad \Gamma_{33}^3 = \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial \Xi^3 \partial \Xi^3}\right) / \left(\frac{\partial \chi}{\partial \Xi^3}\right) \quad (2.3)$$

Учитывая, что в рамках рассматриваемой одномерной задачи величины, определяющие постановку и решение задачи, не зависят от координат Ξ^1 и Ξ^2 , в дальнейшем индекс у координаты Ξ^3 опустим: $\Xi^3 \equiv \Xi$. Условимся также для краткости частные производные величин по Ξ при фиксированной переменной t обозначать штрихом, а частные производные по t при фиксированной переменной Ξ — точкой сверху.

3. Кинематика и уравнения динамики растущего слоя. В [1] установлено, что тензор дисторсии динамически наращиваемого тела G , характеризующий аффинную деформацию элемента тела, представляется разложением

$$G = G^+ G^- \quad (3.1)$$

где тензор G^- соответствует деформации элемента на промежутке времени от момента его загрузки до момента удара о поверхность наращивания, G^+ — это тензор ударной дисторсии, учитывающий деформацию наращиваемого элемента в мгновение удара о растущее тело, а G^+ — тензор, который характеризует деформацию этого элемента в составе растущего тела. Примем, что наращиваемые элементы до момента удара находятся в естественном состоянии, т. е. $G^- \equiv I$, где I — единичный тензор. Для элементов основного слоя, кроме того, очевидно, формально следует считать $G^+ \equiv I$, поскольку его элементы предпо-

лагаются изначально включенными в состав слоя и не претерпевают ударной дисторсии. Таким образом

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^+ \quad (-h < \Xi < 0, t > 0), \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}^+ \mathbf{G}^* \quad (0 < \Xi < t) \quad (3.2)$$

Декартовы компоненты тензора дисторсии элемента в составе растущего слоя $\mathbf{G}^+(\Xi, t)$ имеют вид (см. [2]):

$$G_{(33)}^+ = \chi', \quad G_{(11)}^+ = G_{(22)}^+ = 1 \quad (-h < \Xi < 0, t > 0) \quad (3.3)$$

$$G_{(33)}^+ = \chi' / (\chi')_{t=\Xi}, \quad G_{(11)}^+ = G_{(22)}^+ = 1 \quad (0 < \Xi < t)$$

Вычисление компонент тензора ударной дисторсии приращиваемого элемента \mathbf{G}^* , естественно, требует формулировки дополнительных соотношений, определяющих условия ударного взаимодействия приращиваемого элемента с поверхностью наращивания. В первоначальном варианте теории динамического наращивания [1, 2] принята наиболее простая модель ударного контакта — модель абсолютно неупругого удара, заимствованная из аналитической динамики твердого тела. Применительно к условиям рассматриваемой задачи анализ кинематики соударения приращиваемого элемента и растущего тела на основе соотношений, выведенных в [1, 2], дает следующие выражения для декартовых компонент тензора ударной дисторсии:

$$G_{(33)}^* = 1 - \left(\frac{V + \dot{\chi}}{\chi' + V + \dot{\chi}} \right)_{t=\Xi}, \quad G_{(11)}^* = G_{(22)}^* = 1 \quad (0 < \Xi < t) \quad (3.4)$$

В соответствии с этими выражениями нормальный удар элемента о поверхность наращивания приводит к его сжатию в направлении нормали без искажения углов и поперечной деформации. Естественно, это возможно только для сжимаемого материала.

Принимая для описания деформированного состояния растущего тела левый тензор деформации Коши — Грина $\mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$ и принимая во внимание разложение тензора дисторсии растущего тела (3.2), на основе выражений (3.3), (3.4) получим следующие формулы для компонент тензора \mathbf{B} :

$$B_{(33)} = (\chi')^2, \quad B_{(11)} = B_{(22)} = 1 \quad (-h < \Xi < 0, t > 0) \quad (3.5)$$

$$B_{(33)} = \frac{(\chi')^2}{[(\chi')_{t=\Xi}]^2} \left\{ 1 - \left(\frac{V + \dot{\chi}}{\chi' + V + \dot{\chi}} \right)_{t=\Xi} \right\}^2, \quad B_{(11)} = B_{(22)} = 1 \quad (0 < \Xi < t)$$

Уравнение баланса импульса для растущего тела, записанное в локальной форме, в отсутствие массовых сил имеет обычный вид

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \rho \mathbf{a} \quad (3.6)$$

где $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ — тензор напряжений Коши, $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ — вектор ускорения, $\rho(\mathbf{x}, t)$ — плотность массы материала растущего тела. Преобразуя уравнение (3.6) к координатам Ξ^i в соответствии с представлением (2.2), учитывая уже введенное переобозначение $\Xi^3 \equiv \Xi$ и выражения (2.3), вместо (3.6) будем иметь по одному уравнению для основного слоя и его наращиваемой части (остальные удовлетворяются тождественно):

$$(T_{(33)}/\chi')' + T_{(33)}\chi''/(\chi')^2 = \rho \ddot{\chi}/\chi' \quad (-h < \Xi < 0, t > 0) \quad (3.7)$$

$$(T_{(33)}/\chi')' + T_{(33)}\chi''/(\chi')^2 = \rho_0(\chi' + V + \dot{\chi})_{t=\Xi} \ddot{\chi}/\chi' \quad (0 < \Xi < t) \quad (3.8)$$

При выводе этих уравнений учтено, что из соображения симметрии $T_{(11)} = T_{(22)}$, а все касательные компоненты тензора \mathbf{T} равны нулю.

Уравнение (3.7) представляет собой уравнение динамики основного слоя, а (3.8) — уравнение динамики наращиваемой части слоя. Каждое из них содержит

две неизвестных функции $T_{(33)}(\Xi, t)$ и $\chi(\Xi, t)$. Для замыкания задачи необходимо сформулировать определяющее уравнение для материала слоя, связывающее функцию $T_{(33)}(\Xi, t)$ с законом движения $\chi(\Xi, t)$.

4. Уравнения движения растущего слоя из материала Синьорини. В принципе, общая модель растущего тела не накладывает ограничений на используемые определяющие уравнения. В этом смысле материал растущего тела может не быть даже реологически простым (по терминологии Нолла). Имея в виду, что ближайшей целью настоящего исследования является решение простейшей модельной задачи механики динамически наращиваемых деформируемых тел, прием для описания реакции материала рассматриваемого слоя уравнения состояния изотропного гиперупругого материала (см., например, [3]). Одномерные уравнения движения (3.7), (3.8) содержат компоненты тензора напряжения Коши, поэтому в данном случае удобнее всего в качестве тензора деформации выбрать тензор деформации Альманси — Грина $A = 1/2(I - V^{-1})$. Определяющее соотношение при этом имеет вид

$$T = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial u(A)}{\partial A} (I - 2A) \quad (4.1)$$

где u — упругий потенциал, который является функцией главных инвариантов тензора A . Отношение плотностей ρ/ρ_0 также можно выразить через главные инварианты тензора A :

$$(\rho/\rho_0)^2 = 1 - 2I_A - 4II_A - 8III_A$$

В принципе анализ задачи о динамическом наращивании слоя может быть проведен для произвольного упругого потенциала u . Форма выражения упругого потенциала влияет только на коэффициент при производной χ'' в уравнениях движения, который является, в конечном счете, лишь функцией градиента закона движения χ' . Нелинейные гиперболические уравнения такой структуры в общем виде исследуются с помощью метода характеристик. Однако для проведения дальнейшего анализа следует принять какое-либо конкретное выражение для упругого потенциала u . Ограничимся здесь случаем, когда упругий потенциал берется в форме Синьорини (соответствующее выражение для $u = u(I_A, II_A, III_A)$ имеется в [3]).

Определяющее соотношение (4.1) принимает вид

$$T = \{\lambda I_A + 1/2(\lambda + \mu - 1/2c)I_A^2 + cII_A\}I + 2\{\mu - (\lambda + \mu + 1/2c)I_A\}A - 2cA^2 \quad (4.2)$$

где λ, μ, c — постоянные материала.

Подставляя уравнение (4.2) в декартовых компонентах и учитывая выражения (3.5) для компонент тензора V , получим следующие выражения нормальных напряжений через закон движения для основного слоя

$$T_{(33)} = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) \left[1 - \frac{1}{(\chi')^2}\right] - \left\{\frac{3}{8}(\lambda + \mu) + \frac{13}{16}c\right\} \left[1 - \frac{1}{(\chi')^2}\right]^2 \quad (4.3)$$

$$T_{(11)} = T_{(22)} = \frac{\lambda}{2} \left[1 - \frac{1}{(\chi')^2}\right] + \frac{1}{8} \left(\lambda + \mu - \frac{c}{2}\right) \left[1 - \frac{1}{(\chi')^2}\right]^2$$

$$(-h < \Xi < 0, t > 0)$$

а также для наращиваемой части слоя

$$T_{(33)} = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) \left[1 - \frac{(\chi' + V + \dot{\chi})^2_{t=\Xi}}{(\chi')^2}\right] - \left\{\frac{3}{8}(\lambda + \mu) + \frac{13}{16}c\right\} \left[1 - \frac{(\chi' + V + \dot{\chi})^2_{t=\Xi}}{(\chi')^2}\right]^2 \quad (4.4)$$

$$T_{(11)} = T_{(22)} = \frac{\lambda}{2} \left[1 - \frac{(\chi' + V + \dot{\chi})_{t=\Xi}^2}{(\chi')^2} \right] + \frac{1}{8} \left(\lambda + \mu - \frac{c}{2} \right) \left[1 - \frac{(\chi' + V + \dot{\chi})_{t=\Xi}^2}{(\chi')^2} \right]^2 \quad (0 < \Xi < t)$$

Подставляя определяющие соотношения (4.3) и (4.4) соответственно в (3.7) и (3.8), будем иметь уравнения движения наращиваемого упругого слоя

$$\left[\frac{N}{(\chi')^3} + \frac{K}{(\chi')^5} \right] \chi'' = \ddot{\chi} \quad (-h < \Xi < 0, \quad t > 0) \quad (4.5)$$

$$\left\{ \frac{N(\chi' + V + \dot{\chi})_{t=\Xi}}{(\chi')^3} + \frac{K(\chi' + V + \dot{\chi})_{t=\Xi}^2}{(\chi')^5} \right\} \chi'' = \ddot{\chi} + \left\{ \frac{N}{(\chi')^2} + \frac{K(\chi' + V + \dot{\chi})_{t=\Xi}^2}{(\chi')^4} \right\} (2\dot{\chi}' + \dot{V} + \dot{\chi})_{t=\Xi} \quad (0 < \Xi < t) \quad (4.6)$$

где введены новые константы материала

$$N = \frac{1}{2\rho_0} \left(\mu - \lambda - \frac{13}{2} c \right), \quad K = \frac{3}{2\rho_0} \left(\lambda + \mu + \frac{13}{6} c \right) \quad (4.7)$$

Видно, что уравнение движения наращиваемой части слоя (4.6) существенно отличается от уравнения движения основного слоя (4.5). Обращает на себя внимание наличие в уравнении (4.6) производных искомой функции со смещенным (запаздывающим) аргументом, что не позволяет непосредственно отнести это уравнение к какому-либо изученному классу уравнений математической физики.

5. Формулировка эволюционной граничной задачи для растущего слоя. Обратимся к установлению граничных и начальных условий для искомой функции $\chi(\Xi, t)$ — закона движения наращиваемого слоя.

Граничное условие на поверхности $\Xi = -h$ сцепления основного слоя с жесткой стенкой принимается в виде

$$\chi(-h, t) = -h \quad (t \geq 0) \quad (5.1)$$

Граничное условие на поверхности наращивания (ее уравнение при $t > 0$ есть $\Xi = t$) формулируется как уравнение баланса массы. Это уравнение для случая общей эволюционной граничной задачи теории растущих тел получено в [2]. Для рассматриваемой постановки задачи, когда поверхностная плотность осаждаемого потока вещества задается формулой (2.1), уравнение баланса массы на поверхности наращивания имеет вид

$$(\chi' + V + \dot{\chi})_{t=\Xi} = c_0 V(\Xi) \quad (t > 0) \quad (5.2)$$

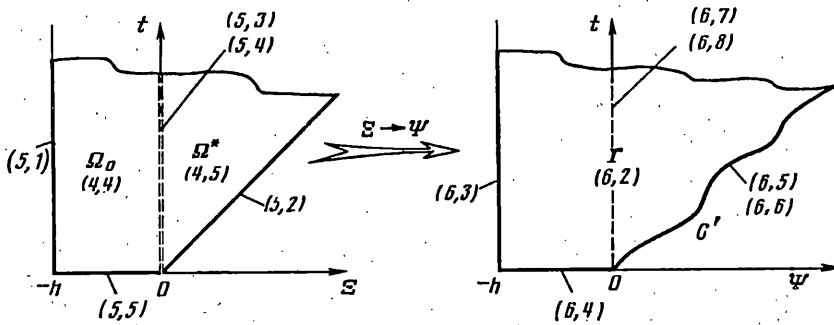
Граничное условие на поверхности $\Xi = 0$ полного механического контакта основного слоя и наращиваемой части формулируется исходя из требования непрерывности закона движения частиц, примыкающих к поверхности раздела $\Xi = 0$ со стороны основного слоя (т. е. при $\Xi = 0^-$) и наращиваемой части (при $\Xi = 0^+$):

$$\chi(0^-, t) = \chi(0^+, t) \quad (t > 0) \quad (5.3)$$

а также условия равновесия элемента поверхности сращивания

$$T_{(33)}(0^-, t) = T_{(33)}(0^+, t) \quad (t > 0)$$

Последнее условие можно переписать в терминах функции χ , приняв во внимание выражения (4.3) и (4.4). Будем иметь



Фиг. 3

$$(\chi')_{\Xi=0-} = \left\{ \frac{\chi'}{(\chi' + V + \dot{\chi})_{t=\Xi}} \right\}_{\Xi=0+} \quad (t > 0) \quad (5.4)$$

Принимаемые начальные условия

$$\chi(\Xi, 0) = \Xi, \quad (\dot{\chi})_{t=0} = 0 \quad (-h < \Xi < 0) \quad (5.5)$$

означают, что частицы основного слоя начинают двигаться из состояния покоя, находясь до этого в естественном состоянии.

Таким образом, в математическом плане задача о динамическом наращивании упругого слоя сводится к нахождению решений уравнения (4.5) в области $\Omega_0 = \{-h < \Xi < 0, t > 0\}$ и уравнения (4.6) в области $\Omega^* = \{0 < \Xi < t, t > 0\}$, удовлетворяющих на границах указанных областей граничным условиям (5.1) — (5.5). Рассматриваемые области фазовой плоскости переменных (Ξ, t) показаны слева на фиг. 3. Цифры в круглых скобках у участков границ означают номер граничного условия, формулируемого на соответствующем участке.

Необходимо отметить, что, как известно, задачи динамики могут иметь негладкие решения. Скачки первых производных закона движения находятся из законов сохранения, формулируемых на сингулярных поверхностях (см. п. 7).

6. Фазовое преобразование эволюционной граничной задачи. При внимательном рассмотрении уравнения (4.6) можно заметить, что замена переменных $\Xi \rightarrow \Psi, t \rightarrow t$, где

$$\Psi = \int_0^{\Xi} \omega(\Theta) d\Theta, \quad \omega(\Xi) \equiv (\chi' + V + \dot{\chi})_{t=\Xi} \quad (\Xi > 0) \quad (6.1)$$

преобразует его к виду

$$\left\{ N \left(\frac{\partial \chi}{\partial \Psi} \right)^{-3} + K \left(\frac{\partial \chi}{\partial \Psi} \right)^{-5} \right\} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \Psi^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \quad ((\Psi, t) \in \Gamma) \quad (6.2)$$

совпадающему с (4.5). Полагая, что $\Psi = \Xi$ при $-h < \Xi < 0$, можно, таким образом, вместо уравнений (4.5), (4.6) рассматривать единственное уравнение (6.2) в объединении областей, получаемых трансформацией областей Ω_0 и Ω^* на фазовую плоскость переменных (Ψ, t) .

Граничные условия (5.1) и (5.5) при введении переменной сохраняют свой вид

$$\{\chi(\Psi, t)\}_{\Psi=-h} = -h \quad (t \geq 0) \quad (6.3)$$

$$\{\chi(\Psi, t)\}_{t=0} = \Psi, \quad \{\partial \chi(\Psi, t) / \partial t\}_{t=0} = 0 \quad (-h \leq \Psi < 0) \quad (6.4)$$

Преобразуя граничное условие (5.2) к переменным Ψ, t с учетом вытекающего из (6.1) и (5.2) соотношения $\omega(\Xi) = c_0 V(\Xi)$, будем иметь

$$\left\{ \frac{\partial \chi(\Psi, t)}{\partial \Psi} + \frac{1}{c_0 V(t)} \frac{\partial \chi(\Psi, t)}{\partial t} \right\}_{(\Psi, t) \in C'} = 1 - \frac{1}{c_0} \quad (6.5)$$

где C' — кривая в плоскости переменных Ψ, t , получаемая трансформацией луча $t = \Xi$ при замене $\Xi \rightarrow \Psi, t \rightarrow t$. Параметрические уравнения этой кривой есть (α — параметр):

$$t = \alpha, \quad \Psi = \int_0^\alpha c_0 V(\Theta) d\Theta \quad (\alpha > 0) \quad (6.6)$$

Условия (5.3) и (5.4) в переменных Ψ, t приобретают вид

$$\{\chi(\Psi, t)\}_{\Psi=0-} = \{\chi(\Psi, t)\}_{\Psi=0+} \quad (t > 0) \quad (6.7)$$

$$\{\partial \chi(\Psi, t) / \partial \Psi\}_{\Psi=0-} = \{\partial \chi(\Psi, t) / \partial \Psi\}_{\Psi=0+} \quad (t > 0) \quad (6.8)$$

Дифференцированием условия (6.7) по t устанавливается непрерывность при переходе через луч ($\Psi = 0, t > 0$) производной $\partial \chi / \partial t$, что в совокупности с (6.7) и (6.8) означает непрерывность функции $\chi(\Psi, t)$ и ее обеих первых производных на указанном луче.

Таким образом, теперь задача состоит в определении функции $\chi(\Psi, t)$, удовлетворяющей в открытой области Γ с выброшенным лучом ($\Psi = 0, t > 0$) (показана на фиг. 3 справа) уравнению (6.2), на ее границе — условиям (6.3)—(6.5), а на луче ($\Psi = 0, t > 0$) — условиям (6.7), (6.8).

Исходя из соображений удобства, в задаче (6.2)—(6.8) целесообразно перейти к безразмерным величинам ($K > 0$ априори):

$$\tau = t\sqrt{K}/h, \quad \xi = \Psi/h, \quad \chi = \chi/h, \quad v = V/\sqrt{K}, \quad \gamma \equiv N/K \quad (6.9)$$

В безразмерных переменных уравнение (6.2) и условия (6.3)—(6.8) примут вид

$$\left\{ \gamma \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right)^{-3} + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right)^{-5} \right\} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2} \quad ((\xi, \tau) \in \Gamma') \quad (6.10)$$

$$\chi = -1 \quad (\tau > 0, \xi = -1) \quad (6.11)$$

$$\chi = \xi, \quad \partial / \partial \tau = 0 \quad (\tau = 0, -1 \leq \xi < 0) \quad (6.12)$$

$$\left\{ \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{1}{c_0 v} \frac{\partial \chi}{\partial \tau} \right\}_{(\xi, \tau) \in C} = 1 - \frac{1}{c_0} \quad (6.13)$$

$$(\chi)_{\xi=0-} = (\chi)_{\xi=0+} \quad (\tau > 0) \quad (6.14)$$

$$(\partial \chi / \partial \xi)_{\xi=0-} = (\partial \chi / \partial \xi)_{\xi=0+} \quad (\tau > 0) \quad (6.15)$$

Кривая C в плоскости безразмерных переменных (ξ, τ) задается параметрическими уравнениями

$$C = \{(\xi, \tau): \xi = \int_0^\vartheta c_0 v(\theta) d\theta, \quad \tau = \vartheta \quad (\vartheta > 0)\} \quad (6.16)$$

Таким образом, задача о динамическом наращивании упругого слоя состоит в определении функции $\chi(\xi, \tau)$ из квазилинейного уравнения в частных производных второго порядка (6.10) в области верхней полуплоскости ($\tau > 0, \xi$) с выброшенным лучом ($\xi = 0, \tau > 0$), ограниченной кривой C (см. (6.16)), отрезком ($\tau = 0, -1 \leq \xi < 0$) и лучом ($\tau > 0, \xi = -1$), которая на указанных участках

границы удовлетворяет граничным условиям (6.11)—(6.13), а на луче ($\xi = 0, \tau > 0$) — условиям (6.14), (6.15).

Всюду далее будет считаться выполненным условие, при котором уравнение (6.10) является гиперболическим. Это условие имеет вид (см. [4]):

$$(1 + \gamma p^2)/p^5 > 0 \quad (6.17)$$

Здесь и в дальнейшем используются следующие обозначения для частных производных искомой функции:

$$p \equiv \partial \kappa / \partial \xi, \quad q \equiv \partial \kappa / \partial \tau \quad (6.18)$$

Достаточным условием выполнения неравенства (6.17) является следующее ограничение на упругие модули:

$$K > 0, \quad N < 0, \quad -\gamma \equiv -N/K < 1 \quad (6.19)$$

Как видно из (6.10)—(6.16), решение сформулированной задачи определяется задаваемыми константами γ и c_0 , первая из которых задает соотношение материальных параметров (см. (6.19), (4.6)), а вторая — постоянную концентрацию частиц в осаждаемом потоке вещества, а также задаваемой функцией $u(\tau)$, равной скорости падения потока на поверхность наращивания.

Как уже отмечалось в конце п. 5, при решении эволюционной граничной задачи (6.10)—(6.16) необходимо предусмотреть возможное существование разрывов первых частных производных закона движения, что является характерным для нелинейных волновых задач. Если закон движения негладкий, то соотношений (6.10)—(6.16) недостаточно для нахождения однозначного решения $\kappa(\xi, \tau)$. Обратимся к формулировке условий совместности на сингулярных поверхностях.

7. Условия совместности на сингулярных поверхностях. Рассмотрим деформируемое тело, находящееся в актуальной конфигурации в момент времени t . Пусть в теле распространяется сингулярная (волновая) поверхность $\Sigma(t)$, вектор единичной нормали n которой ориентирован в направлении ее движения по материальным частицам тела. Через g^z обозначим пространственную скорость движения поверхности Σ в проекции на n . Предельным значениям полевых величин, характеризующим состояние среды за фронтом и перед фронтом волны, припишем индексы 1 и 2 соответственно.

Известно (см., например, [5, 6]), что уравнения баланса массы и импульса на волновой поверхности (соотношения Рэнкина — Гюгонио) имеют вид

$$\rho_1^z (v_{n1} - g^z) = \rho_2^z (v_{n2} - g^z) \quad (7.1)$$

$$[T_{(ij)}]_{\Sigma} n_{(j)} = \rho_1^z (v_{n1} - g^z) [v_{(i)}]_{\Sigma} \quad (7.2)$$

где v_n — проекция на n эйлерова поля скоростей точек тела. Квадратными скобками с индексом Σ внизу здесь и далее обозначается скачок заключенной в них величины, а именно $[A]_{\Sigma} \equiv A_2 - A_1$.

К условиям (7.1), (7.2) необходимо добавить еще кинематическое условие Адамара [5, 6]:

$$\left[\frac{\partial A}{\partial t} \right]_{\Sigma} + \left[\frac{\partial A}{\partial x_{(i)}} \right]_{\Sigma} n_{(i)} g^z = 0 \quad (7.3)$$

где $A = A(x_{(i)}, t)$ — произвольная эйлерова полевая величина (в том числе и тензорная), непрерывная при переходе через поверхность $\Sigma(t)$. Обратим внимание, что (7.1)—(7.3) — размерные уравнения.

Имея в виду рассматриваемую конкретную задачу перейдем к безразмерным величинам (с чертами наверху) по формулам

$\bar{g}^z = g^z/\sqrt{K}$, $\bar{T}_{(33)} = T_{(33)}/(K\rho^y)$, $\bar{\rho} = \rho/\rho^y$, $\bar{G} = G/\sqrt{K}$, где \sqrt{K} — уже использованная для обезразмеривания в (6.9) величина размерности скорости, ρ^y — некоторое значение размерной плотности массы, а G — лагранжева скорость распространения фронта ударной волны в проекции на направление распространения. Черты сверху у безразмерных величин в дальнейшем будем опускать. Вместо размерных величин t , $\partial\chi/\partial\Psi$, $\partial\chi/\partial t$ используются, соответственно, уже введенные выше безразмерные величины τ , $\partial\kappa/\partial\xi \equiv p$, $\partial\kappa/\partial\tau \equiv q$ (см. (6.9)). Таким образом, все дальнейшие выкладки проводятся в безразмерных величинах.

Анализ распространения продольных волн в динамически наращиваемом слое проводится по той же схеме, что и в [7, 8], в зависимости от поведения функции $f(p) = \{(1 + \gamma p^2)/p^5\}^{1/2}$ в окрестности точки $p = 1$. Квадрат функции $f(p)$ с точностью до мультипликативной константы равен второй производной от функции потенциальной энергии упругой деформации $W(p)$ по градиенту деформации $p \equiv \partial\kappa/\partial\xi$, т. е. $f(p) \sim (d^2W/dp^2)^{1/2}$. Функция $f(p)$ по физическому содержанию есть безразмерная местная скорость звука в среде.

Вслед за [7, 8] подчеркнем, что анализ рассматриваемой задачи, в принципе, распадается на два случая соответственно знаку производной функции $f(p)$ в точке $p = 1$. (Значение $p = 1$ соответствует градиенту деформации невозмущенного состояния упругой среды.) В случае когда $f(p)$ убывает при уменьшении p от 1 решение задачи будет гладким. Находящийся в естественном состоянии основной слой сначала возмущается продольной центрированной волной сжатия, а затем — отраженными волнами. Дополнительный слой при этом возмущается сначала простой продольной волной сжатия, а затем — отраженными волнами. В математическом и физическом отношении этот случай сравнительно прост. Ниже будет рассмотрен второй случай, когда функция $f(p)$ возрастает при уменьшении p от 1.

В [7] показано, что при этом гладкого решения $\kappa(\xi, \tau)$ не существует. При ударе осаждаемого потока о поверхность основного слоя вглубь его распространяется ударная волна, на фронте которой (на фиг. 1 справа этот фронт условно показан линией, состоящей из точек) градиент деформации p и скорость q разрывны. Эта ударная волна распространяется по невозмущенной среде, поэтому перед фронтом волны имеем $p_2 = 1$, $q_2 = 0$, $\rho_2 = \rho_0$.

На фазовой плоскости (ξ, τ) геометрическое место мгновенных положений фронта ударной волны (до момента ее отражения от закрепленной поверхности $\xi = -1$) есть некоторая кривая L (фиг. 4), отделяющая область покоя R от области возмущенного состояния¹. Заметим, что кривая L определяется дифференциальным уравнением

$$d\xi/d\tau = -G^L \quad (7.4)$$

где G^L , напомним, — лагранжева скорость распространения фронта ударной волны. Здесь и далее индекс L относится к кривой L .

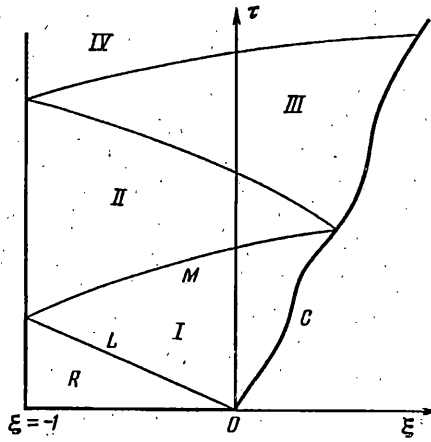
Условия (7.1)—(7.3), переписанные в безразмерных величинах для рассматриваемой здесь одномерной продольной ударной волны, приобретают вид

¹ В [2] при рассмотрении родственной эволюционной задачи о наращивании упругого полупространства было показано, что она имеет автомодельное решение. При этом было неточно сформулировано (с. 83), что фронт ударной волны распространяется вдоль характеристики $\Psi + at = 0$. Корректное утверждение состоит в том, что фронт ударной волны на фазовой плоскости определяется дифференциальным уравнением (использованы обозначения из [2]):

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\varphi(\xi(t^y)) + \Delta_f}{1 - \xi(t^y)}$$

$$\Delta_f = -(1 - \xi(t^y))^{1/2} \left\{ \frac{N}{2\xi^2(t^y)} + \frac{K}{4\xi^4(t^y)} - \frac{N}{2} - \frac{K}{4} \right\}^{1/4} - \varphi(\xi(t^y))$$

Все остальные формулы в [2] остаются без изменений.



Фиг. 4

$$\rho_1 (-q_1^L - g^Z) = -\rho_2^L g^Z \quad (7.5)$$

$$-[T_{(33)}]_L = \rho_1^L (-q_1^L - g^Z) [q]_L \quad (7.6)$$

$$[q]_L - G^L [p]_L = 0 \quad (7.7)$$

Учтем теперь уравнение неразрывности в форме Лагранжа:

$$\rho_0 = \rho_1^L |\det G|_1^L, \quad \rho_0 = \rho_2^L |\det G|_2^L \quad (7.8)$$

$$\det G = \det \text{diag} (1, 1, p) = p$$

и представим уравнение (7.5) в следующем виде

$$q_1^L + g^Z = |p_1^L| g^Z \quad (7.9)$$

Установим связь между нормальными скоростями g^Z и G^L . Пусть уравнение $\xi = \beta(\tau)$ определяет кривую L в плоскости (ξ, τ) . Тогда по определению $G^L = -d\beta/d\tau$. С другой стороны,

$$g^Z = -\frac{d\kappa(\beta(\tau), \tau)}{d\tau} = -\left(\frac{\partial\kappa}{\partial\xi}\right)_{\xi=\beta(\tau)} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} - \left(\frac{\partial\kappa}{\partial\tau}\right)_{\xi=\beta(\tau)} \quad (7.10)$$

и, следовательно, $g^Z = p_2^L G^L - q_2^L$. Поскольку $p_2 = 1$, $q_2 = 0$, то отсюда имеем $g^Z = G^L$ и скорость g^Z из всех соотношений можно исключить. Заметим, что в последнем уравнении p_2 и q_2 можно заменить на p_1 и q_1 в силу уравнения (7.1) с учетом (7.8). Это означает, что в формуле (7.10) можно брать предельные значения производных $\partial\kappa/\partial\xi$ и $\partial\kappa/\partial\tau$ на любой стороне сингулярной поверхности.

Подставляя определяющие соотношения (4.3) и (4.4), подвергнутые фазовому преобразованию (6.1), в (7.6) и учитывая (7.9) и равенство $g^Z = G^L$, получим

$$\frac{\gamma}{2} \left[\frac{1}{p^2} \right]_L + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{p^4} \right]_L = -G^L [q]_L \quad (7.11)$$

Таким образом, на кривой L имеем два условия (7.7), (7.11), связывающие неизвестные величины скачков $[p]_L$, $[q]_L$ и лагранжеву скорость фронта волны G^L .

Уравнения (6.10)–(6.16) в совокупности с условиями (7.7) и (7.11) позволяют приступить к построению решения в области I, представляющей собой криволинейный треугольник, ограниченный кривыми C , L и M (фиг. 4). Кривая M —

геометрическое место мгновенных положений фронта ударной волны, отраженной от закрепленной поверхности.

Прежде чем строить решение в области I, сформулируем условия на кривой M, необходимые для нахождения решения в области II. Вычисляя величину g^z для данного случая аналогично (7.10), получим

$$g^z = p_2^M G^M + q_2^M \quad (7.12)$$

Индекс M означает, что рассматриваемая величина относится к кривой M. Уравнения (7.1) — (7.3), записанные для фронта отраженной продольной волны, имеют вид

$$\frac{q_1^M - g^z}{|p_1^M|} = \frac{q_2^M - g^z}{|p_2^M|} \quad (7.13)$$

$$\frac{\gamma}{2} \left[\frac{1}{p^2} \right]_M + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{p^4} \right]_M = G^M [q]_M \quad (7.14)$$

$$[q]_M + G^M [p]_M = 0 \quad (7.15)$$

Соотношения (7.14), (7.15) будут использованы при формулировке граничных условий на кривой M для области II (соотношения (7.12) и (7.13) уже учтены при выводе (7.14)).

Кривая M определяется дифференциальным уравнением

$$d\xi/d\tau = G^M \quad (7.16)$$

Аналогичным образом получают соотношения на разрывах для последующих характеристических треугольников, т. е. на границах областей III, IV и т. д.

8. Построение решения методом характеристик. Гиперболическое дифференциальное уравнение (6.10) эквивалентно характеристической системе из шести уравнений первого порядка [4]:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} - \sqrt{\frac{p^5}{1 + \gamma p^2}} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = 0 \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \beta} + \sqrt{\frac{p^5}{1 + \gamma p^2}} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} = 0 \quad (8.2)$$

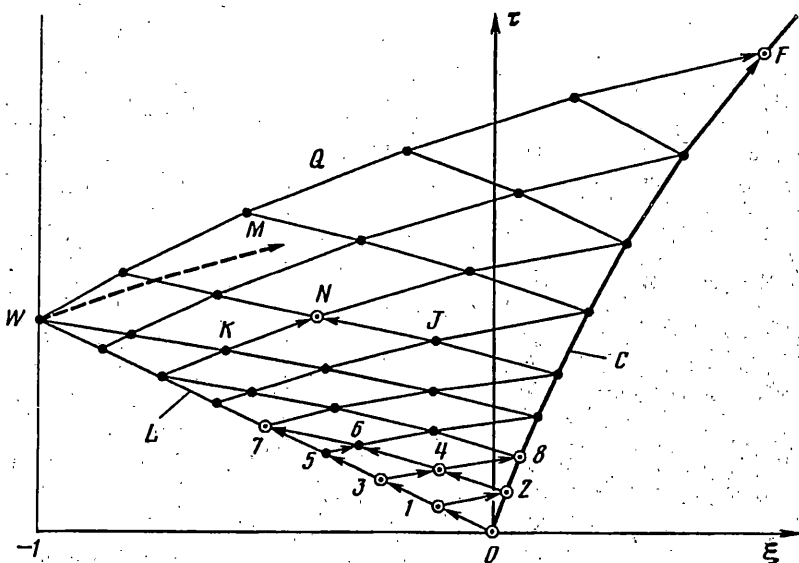
$$\sqrt{\frac{1 + \gamma p^2}{p^5}} \frac{\partial p}{\partial \alpha} - \frac{\partial q}{\partial \alpha} = 0 \quad (8.3)$$

$$\sqrt{\frac{1 + \gamma p^2}{p^5}} \frac{\partial p}{\partial \beta} + \frac{\partial q}{\partial \beta} = 0 \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \alpha} = p \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + q \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \beta} = p \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + q \frac{\partial \tau}{\partial \beta} \quad (8.6)$$

где α и β — характеристические переменные. Характеристики $\beta = \text{const}$ будем называть положительными (из-за положительного наклона характеристики (8.1)) и обозначать C_+ , а характеристики $\alpha = \text{const}$ — отрицательными и обозначать C_- . Одно из уравнений (8.5), (8.6), как известно, можно опустить.



Фиг. 5

Соотношения (8.3), (8.4) можно представить в виде

$$\Phi(p) - q = \text{const} \quad (\text{на } C_+) \quad (8.7)$$

$$\Phi(p) + q = \text{const} \quad (\text{на } C_-) \quad (8.8)$$

где введено обозначение

$$\Phi(p) \equiv \int_1^p \sqrt{\frac{1 + \gamma \eta^2}{\eta^5}} d\eta \quad (8.9)$$

Функция $\Phi(p)$ выражается через неполные эллиптические интегралы первого рода $F(\varphi, k)$:

$$\begin{aligned} \Phi(p) = & \frac{2}{3} \left\{ \sqrt{1+y} - \frac{\sqrt{1+\gamma p^2}}{p\sqrt{p}} + \right. \\ & \left. + \sqrt{2} (-\gamma)^{3/4} [F(\arccos \{(-\gamma)^{1/2} p\}^{1/2}, 2^{-1/2}) - F(\arccos (-\gamma)^{1/4}, 2^{-1/2})] \right\} \end{aligned}$$

Заметим, что соотношения (8.7), (8.8) можно интерпретировать как промежуточные интегралы Гурса [9] уравнения (6.10), т. е. любое частное решение уравнения (8.7) или (8.8) с абсолютной константой в правой части является также и частным решением уравнения (6.10).

Изложим конечноразностный алгоритм построения решения характеристической системы (8.1)–(8.6) в треугольной области I (в областях II, III и далее проводятся аналогичные построения). Из граничных условий (6.11)–(6.16) в области I фактически подлежит удовлетворению лишь условие (6.13) на кривой C, задаваемой уравнениями (6.16). Однако, к нему добавляются соотношения (7.7) и (7.11) на кривой L, определяемой уравнением (7.4).

Первый шаг алгоритма решения состоит в определении величин p , q и G^L в точке O (фиг. 5). Переписывая соотношения (6.13), (7.7) и (7.11) для этой точки, будем иметь

$$p_0 + \frac{1}{c_0 v_0} q_0 = 1 - \frac{1}{c_0} \quad (v_0 \equiv v(0))$$

$$-q_0 - G_0^L (1 - p_0) = 0 \quad (8.10)$$

$$\frac{\gamma}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{p_0^2} \right\} + \frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{1}{p_0^4} \right\} = G_0^L q_0$$

Нетрудно видеть, что решение записанной системы сводится к нахождению корня p_0 следующего алгебраического уравнения

$$4c_0^2 v_0^2 p_0^6 + \{8c_0(1 - c_0)v_0^2 - 2\gamma - 1\} p_0^5 + \{4(c_0 - 1)v_0^2 + 2\gamma + 1\} p_0^4 + 2\gamma p_0^3 - 2\gamma p_0^2 + p_0 - 1 = 0 \quad (8.11)$$

после чего величины q_0 и G_0^L выражаются через найденное значение p_0 с помощью уравнений (8.10). Можно показать, что в рассматриваемых интервалах изменения задаваемых параметров ($0 < c_0 \leq 1$, $-1 < \gamma < 0$) уравнение (8.11) имеет корень $p_0 \in (0, 1)$.

Заметим, что форма кривой C заранее известна, поскольку скорость частиц v и концентрация падающего потока c_0 в (6.16) задаются.

На втором шаге алгоритма «выпустим» из точки O кривую L в виде отрезка $0-1$ (см. фиг. 5), что, очевидно, можно сделать, поскольку значение G_0^L найдено. Зафиксировав узел 1, «выпустим» из него характеристику C_+ с неизвестным пока углом наклона (поскольку значение p_1 еще не определено) и точку пересечения C_+ с кривой C поименуем как узел 2. В узлах 1 и 2 неизвестными являются следующие величины (нижний индекс означает номер узла): $p_1, q_1, G_1^L, \tau_2, \xi_2, p_2, q_2$. Система семи алгебраических уравнений для определения этих величин составляется из: 1) уравнения положительной характеристики (8.3), проинтегрированного по α вдоль отрезка $1-2$; 2) соотношения на этой характеристике (8.7), записанного для пары точек 1 и 2; 3) уравнения кривой C на участке $0-2$; 4) граничного условия на кривой C ; 5) соотношения (7.7) в точке 1; 6) соотношения (7.11) в точке 1; 7) уравнения, получающегося интегрированием условий полосы (8.5) и (8.6) вдоль сторон треугольника $0-1-2$ и исключением значений κ в узлах. Получающаяся алгебраическая система, естественно, нелинейна. После нахождения указанных семи величин в узлах 1 и 2 можно (это — уже третий шаг) из узла 1 выпустить второй отрезок кривой L , зафиксировать узел 3 и из него выпустить характеристику C_+ с неизвестным еще углом наклона. Навстречу ей из узла 2 выпускается отрицательная характеристика C_- до их пересечения в новом узле 4. Для определения семи неизвестных $p_3, q_3, G_3^L, \tau_4, \xi_4, p_4, q_4$ снова записывается нелинейная система из семи алгебраических уравнений, включающая вместо условий на C (для предыдущего шага) условия на C_- . Первая серия шагов завершается в узле, лежащем на пересечении характеристики C_- и кривой L . Пусть номер этого узла для конкретности будет, скажем, 7; в этом узле вычисляются величины p_7, q_7 и G_7 . После этого начинается «заполнение» следующего «слоя» узлов, начинающегося с узла 8.

Заметим, что в зависимости от предполагаемого положения узла набор соотношений для определения искоемых величин варьируется. В области I можно выделить восемь типов узлов, выделенных на фиг. 5 светлыми кружками, «заполнение» которых требует решения различающихся между собой систем алгебраических уравнений. Наиболее просто ситуация выглядит в «регулярном» узле N, где требуется решать систему из четырех уравнений (уравнения характеристик C_+ и C_- и соотношения на них) для нахождения неизвестных τ_N, ξ_N, p_N, q_N . Алгоритм построения решения в области I, в общих чертах описанный выше, завершается в точке F. При этом оказывается сформированной кривая Q, ограничивающая область влияния условий на кривых L и C. Заметим, что кривая Q, вообще говоря, не совпадает с кривой M, описывающей движение фронта отраженной ударной волны. Кривая M пройдет внутри треугольной

области OWF ; решение в точках этой области, лежащих выше кривой M , придется строить заново.

Алгоритм построения решения в области II в качестве первого шага предполагает нахождение величин p_w, q_w в точке W , равных значениям p, q за фронтом отраженной ударной волны на заделанной поверхности слоя, а также величины G_w^M , равной лагранжевой скорости отраженной ударной волны. Соответствующие значения p и q в точке W перед фронтом, найденные как решение задачи в области I, обозначим p_I и q_I .

Учитывая, что, в соответствии с граничным условием (6.11), $q_w \equiv (\partial \kappa / \partial \tau)_{\xi = -1} = 0$ для определения p_w и G_w^M будем иметь следующие два уравнения, вытекающие из (7.14), (7.15):

$$\frac{\gamma}{2} \left(\frac{1}{p_I^2} - \frac{1}{p_w^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p_I^4} - \frac{1}{p_w^4} \right) = G_w^M q_I \quad (8.12)$$

$$q_I + G_w^M (p_I - p_w) = 0$$

Решение этой системы сводится к нахождению корня p_w уравнения

$$(-2\gamma p_I^2 - 1) p_w^5 + (2\gamma p_I^3 + p_I) p_w^4 + 2\gamma p_I^4 p_w^3 - 2\gamma p_I^2 p_w^2 + p_I^4 p_w + \{2\gamma p_I^5 - (2\gamma + 1) p_I^4 - 2\gamma p_I^3 + 2\gamma p_I^2 - p_I + 1\} = 0 \quad (8.13)$$

Очевидно, что значение $p_w = 1$ является корнем этого уравнения, однако физический смысл в данном случае имеет корень, заключенный в интервале $0 < p_w < p_I$. Такой корень уравнения (8.13), как можно показать, существует.

Дальнейшее построение решения в области II осуществляется с помощью алгоритма, вполне аналогичного изложенному для области I. Некоторые его упрощения будут связаны с тем, что вместо условия на кривой C здесь требуется удовлетворять граничное условие (6.11), имеющее значительно более простой вид.

Анализ решения в области III требует, в качестве первого шага, определение наклона фазовой кривой, соответствующей движению фронта ударной волны, отраженной от свободной поверхности слоя. Затем изложенный алгоритм повторяется. В принципе, таким образом можно построить решение рассматриваемой начально-краевой задачи для любой точки фазовой области переменных (ξ, τ) . Ясно, что практическое построение решения, тем не менее, связано с весьма объемной вычислительной работой, так как на каждом разностном шаге требуется решать нелинейную систему алгебраических уравнений.

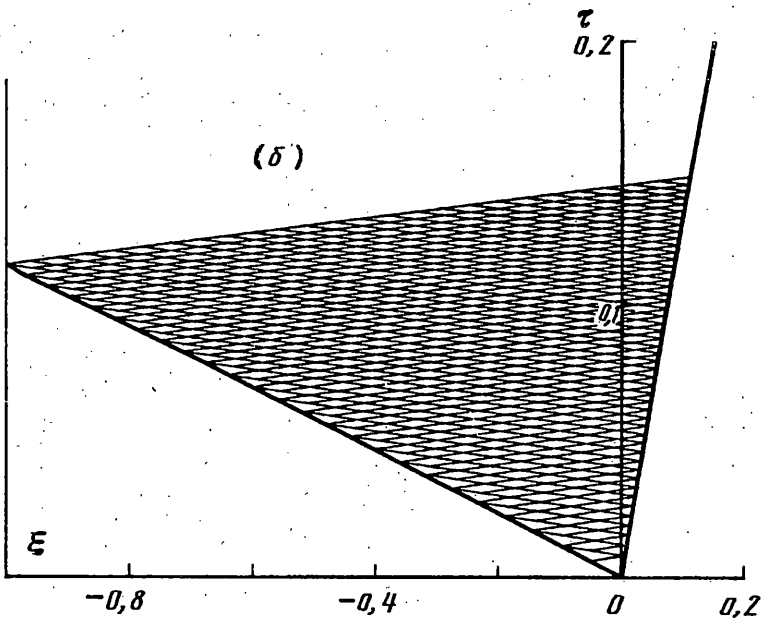
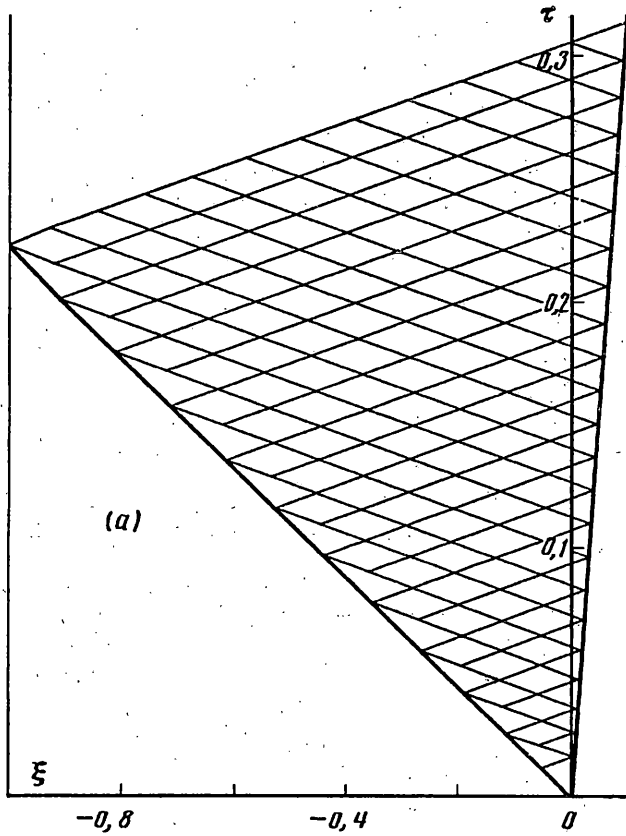
После того, как с помощью изложенного алгоритма рассчитана сетка характеристик и значения производных p и q во всех узлах, значения функции $\kappa(\xi, \tau)$, определяющей закон движения частиц слоя, на упомянутой сетке восстанавливаются посредством криволинейной квадратуры

$$\kappa(\xi, \tau) = \int_{(\xi_0, \tau_0)}^{(\xi, \tau)} p d\xi + q d\tau \quad (8.14)$$

где интегрирование производится по любому контуру, соединяющему фиксированную точку (ξ_0, τ_0) с текущей точкой (ξ, τ) фазовой плоскости. В рассматриваемом случае в качестве контура интегрирования удобно взять ломаную линию, соединяющую начало координат с соответствующим узлом. Если m — номер текущего узла, то вместо (8.14) при использовании простейшей схемы интегрирования имеем

$$\kappa(\xi_m, \tau_m) = \sum_i (p_i \Delta \xi_i + q_i \Delta \tau_i) \quad (8.15)$$

Здесь суммирование по i распространяется на все узлы, расположенные вдоль



Фиг. 6

пути интегрирования, p_i и q_i — значения частных производных функции κ в начальной точке i -го звена ломаной, $\Delta\xi_i$ и $\Delta\tau_i$ — приращения независимых переменных при прохождении i -го звена.

Иллюстративные расчеты были выполнены для случая, когда функция $v(\tau)$ является линейной: $v(\tau) = v_0 + \alpha\tau$, где v_0 и α — положительные константы. При этом свободная кривая C задается уравнением: $\xi = cv_0\tau + 1/2c\alpha\tau^2$. На фиг. 6 показаны определенные с помощью изложенного алгоритма конфигурации области I (константы c и γ в вариантах a — b были одинаковы: $c = 0,1$, $\gamma = -0,1$; константы v_0 и α варьировались: a — $v_0 = 3$, $\alpha = 0,5$; b — $v_0 = 6,5$, $\alpha = 10$). Расчетные сетки характеристик на фиг. 6 для наглядности показаны прореженными. В каждом узле сетки вычислялись значения частных производных p и q , необходимые для восстановления функции $\kappa(\xi, \tau)$ по формуле (8.15) или с помощью какой-либо другой, более точной, схемы интегрирования. Значения производных p и q необходимы также для вычисления компонент напряжений в слое согласно формулам (4.3), (4.4). Значения производной p , в соответствии с уравнениями (8.1), (8.2), определяют наклон характеристик в фазовой плоскости. Из фиг. 6 видно, что увеличение как начальной скорости осаждаемого потока частиц (константа v_0), так и темпа ее нарастания (константа α), приводят к увеличению скорости распространения ударной волны и уменьшению угла наклона характеристик по отношению к оси ξ , в результате чего расчетная сетка характеристик становится «плотнее» при увеличении v_0 и α . Здесь стоит еще раз подчеркнуть, что сетка характеристик в рассматриваемом алгоритме не задается, а строится в ходе решения, определяя в конечном итоге конфигурацию фазовой области.

Поскольку для расчетов была выбрана линейная зависимость скорости падения приращиваемых частиц от времени, а численный анализ был ограничен только областью I фазовой плоскости, зависимость скорости осаждаемого потока от времени в этом примере слабо влияет на результаты расчетов. Участок кривой C на рассмотренном начальном этапе процесса (область I) почти не отличается от прямой линии, в которую вырождается кривая C при постоянной скорости движения приращиваемых частиц. Изменения значений p и q внутри области I получаются малыми. Разрисовки расчетных изолиний функции κ и изолиний напряжений в рассматриваемой области фазовой плоскости свидетельствуют о том, что получаемые в этом иллюстративном примере (когда скорость падающих частиц в точке приращивания к слою линейно зависит от времени) результаты близки к случаю постоянной скорости движения потока осаждаемых частиц. Последний случай подробно рассматривается во второй части статьи.

По-видимому, можно провести аналогию рассмотренного случая волновой задачи для динамически наращиваемого слоя с распространением изэнтропических ударных волн в сжимаемом идеальном газе. Задачи о распространении и лобовом отражении одномерных ударных волн в газах рассматривались, например, в [10, 11]. Существование упомянутой аналогии обусловлено сходством математических формулировок соответствующих задач.

Основные качественные нелинейные эффекты, которые сопровождают лобовое отражение от жесткой стенки одномерной изэнтропической волны в газе, состоят в следующем [10]. Не выполняется условие симметрии: скорость падающей ударной волны не совпадает со скоростью отраженной. Это типично нелинейный эффект. Скорость распространения отраженной ударной волны меньше, чем скорость падающей (минимальная скорость отраженной волны может достигать одной трети от скорости падающей). Отражение может вызвать значительное увеличение давления и плотности за фронтом отраженной волны по сравнению с давлением и плотностью за фронтом падающей волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 1. Кинематика и меры деформации растущего тела//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 85—98.
2. Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 2. Эволюционная граничная задача теории растущих тел//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 72—86.
3. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics//Handbuch der Physik/Ed. by S. Flügge. Vol. III/3. Berlin — Heidelberg — New York: Springer, 1965. 602 p.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. I. М.: Наука, 1976. 536 с.
6. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
7. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
8. Eringen A. C., Suhubi E. S. Elastodynamics. Vol. I: Finite motions. N. Y.: Academic Press, 1974. XV + 341 p.
9. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 1. М.—Л.: Гостехтеоретиздат, 1933. 276 с.
10. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 588 с.
11. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.

Москва, Самара

Поступила в редакцию
10.X.1991