МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1992

УДК 539.3

 М. И. ЧЕБАКОВ

К ТЕОРИИ РАСЧЕТА СФЕРИЧЕСКОГО САМОСМАЗЫВАЮЩЕГОСЯ ПОДШИПНИКА

Для оценки ресурса работы самосмазывающегося сферического подшипника важно знать распределение напряжений в месте контакта шипа с антифрикционным покрытием, перемещение шипа от воздействия на него радиальной нагрузки, а также размер области контакта [1]. Ниже производится расчет этих величин с помощью задачи теории упругости о взаимодействии шара со сферическим упругим слоем, внешняя граница которого жестко закреплена. Такая задача достаточно хорошо моделирует работу сферического самосмазывающего подшипника, особенно при нагрузках, когда размер площадки контакта соизмерим с шириной подшипника. Здесь также принимается во внимание, что модуль упругости антифрикционного покрытия значительно ниже модуля упругости других деталей подшипника. Для рассмотренной задачи теории упругости построено асимптотически точное решение для случая малых толщин упругого слоя, произведен расчет необходимых величин для разных значений исходных параметров.

1. Постановка задачи теории упругости. В сферических координатах (r, θ, φ) рассмотрим шаровой слой $R_1 \le r \le R_2$, $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi$, у которого поверхность $r = R_2$ неподвижна, а в поверхность $r = R_1$ вдавливается силой P штамп в форме шара радиуса R_0 с точкой первоначального касания $\varphi = 0$, $r = R_1$. Предполагаем, что трение между штампом и шаровым слоем отсутствует, сила P направлена вдоль прямой $\varphi = 0$, а величина $\Delta = R_i - R_0$ мала. В этом случае приходим к решению осесимметричной краевой задачи для уравнений Ляме в сферических координатах со следующими граничными условиями

$$u_r = \delta \cos \varphi - \Delta(1 - \cos\varphi) \quad (r = R_1, |\varphi| \le \gamma)$$

$$\sigma_r = 0 \quad (r = R_1, |\varphi| > \gamma)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad (r = R_1); \quad u_r = u_\varphi = 0 \quad (r = R_2) \tag{1.1}$$

где δ — смещение штампа, u_r — перемещение вдоль оси r, σ_r и $\tau_{r\varphi}$ — компоненты тензора напряжений, $|\varphi \le \gamma|$ — область контакта.

Разыскивается решение уравнений Ляме в виде разложений

$$u_r = \sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(r) P_{\alpha_k - 1/2}(\cos\varphi), \quad u_\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k V_k(r) \frac{d}{d\varphi} P_{\alpha_k - 1/2}(\cos\varphi), \quad \alpha_k = k + 1/2$$

где u_φ — перемещение вдоль оси φ, $P_\nu(\cos\varphi)$— функции Лежандра, и удовлетворяя граничным условиям, найдем неизвестные функции $W_k(r)$ и $V_k(r)$, а для нахождения неизвестных коэффициентов a_k получим парный ряд-уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k K(\alpha_k) P_{\alpha_k - 1/2}(\cos\varphi) = \frac{G}{R_1(1-\nu)} [\delta \cos\varphi - \Delta(1-\cos\varphi)], \quad (0 \le \varphi \le \gamma) \tag{1.2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_{\alpha_k - 1/2}(\cos\varphi) = 0 \quad (\gamma < \varphi < \pi)$$

Здесь G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона

$$K(\alpha) = \Delta_1(\alpha)/\Delta(\alpha), \quad \kappa = R_1/R_2 \tag{1.3}$$

$$\Delta_1 = 2(1-2\nu)[+B_1(\alpha)\,\mathrm{ch}\,(2\alpha \ln\kappa) - B_2(\alpha)\,\mathrm{sh}\,(2\alpha\ln\kappa) +$$
$$+ \kappa^2 B_3(\alpha) + \kappa^{-2} B_4(\alpha) + B_5(\alpha)]$$
$$\Delta = (1-\nu)[A_1(\alpha)\,\mathrm{ch}\,(2\alpha\ln\kappa) + A_2(\alpha)\,\mathrm{sh}\,(2\alpha\ln\kappa) +$$
$$+ \kappa^2 A_3(\alpha) + \kappa^{-2} A_4(\alpha) + A_5(\alpha)]$$
$$B_1 = 2[\alpha^2(-48\nu^2 + 64\nu - 20) + 2\nu - 1]$$
$$B_2 = 2[\alpha^3(-32\nu^2 + 56\nu - 24) + \alpha(16\nu^2 - 26\nu + 10)]$$
$$B_3 = \alpha^4(16\nu - 12) + \alpha^2(32\nu^2 - 52\nu + 19)$$
$$B_4 = 4\alpha^4 + \alpha^2(64\nu^2 - 96\nu + 31), \quad B_5 = (1-2\nu)(8\alpha^4 - 10\alpha^2 + 2)$$
$$A_1 = 2[\alpha^4(128\nu^2 - 160\nu + 48) + \alpha^2(-384\nu^3 + 544\nu^2 - 224\nu + 24) + (18\nu - 9)]$$
$$A_2 = 2[\alpha^3(-256\nu^3 + 512\nu^2 - 320\nu + 64) + \alpha(96\nu^2 - 144\nu + 48)]$$
$$A_3 = 16(1-2\nu)\alpha^6 - 40(1-2\nu)\alpha^4 + \alpha^2(128\nu^3 - 64\nu^2 - 146\nu + 73)$$
$$A_4 = 16(1-2\nu)\alpha^6 + \alpha^4(-512\nu^3 + 1024\nu^2 - 560\nu + 88) +$$
$$+ \alpha^2(1152\nu^3 - 2304\nu^2 + 1422\nu - 279)$$
$$A_5 = (1-2\nu)(-32\alpha^6 + 112\alpha^4 - 98\alpha^2 - 18)$$

Из последних соотношений нетрудно найти величину $A = \lim K(\alpha)$ при $\alpha \to 0$, которая потребуется в дальнейшем

$$A = -2K_1/K_2(1-\nu) \tag{1.4}$$

$$K_1 = -4\kappa^2(1-2\nu)\ln^2\kappa - 8\kappa^2 \ln\kappa\,(8\nu^2 + 13\nu - 5) + \kappa^4(32\nu^2 - 52\nu + 19) +$$
$$+ \kappa^2(-96\nu^2 + 148\nu - 50) + 32(2\nu - 3)\nu + 31$$
$$K_2 = 36\kappa^2\ln^2\kappa + 192\kappa^2(1-\nu)\ln\kappa + \kappa^4(64\nu^2 - 73) +$$
$$+ \kappa^2(-384\nu^2 + 352\nu + 50) + 576\nu^2 - 864\nu + 279$$

Неизвестные контактные давления под штампом определяются через решение парного уравнения (1.2) из соотношения

$$q(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_{\alpha_k - 1/2}(\cos\varphi) \tag{1.5}$$

2. Решение парного уравнения. Для решения парного уравнения (1.2) воспользуемся методом сведения его к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с сингулярной матрицей коэффициентов [2].

Если ввести в рассмотрение парное уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{i\varepsilon} K(\alpha_k) P_{\alpha_k-1/2}(\cos\varphi) = P_{i\varepsilon-1/2}(\cos\varphi) \; (0 \le \varphi \le \gamma)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{i\varepsilon} P_{\alpha_k-1/2}(\cos\varphi) = 0 \;\; (\gamma < \varphi < \pi) \tag{2.1}$$

то контактные напряжения под штампом через его решение будут найдены по формуле

$$q(\varphi) = \frac{G}{P_1(1-\nu)} [(\delta + \Delta) q_{3/2}(\varphi) - \Delta q_{1/2}(\varphi)] \tag{2.2}$$

$$q_{i\varepsilon}(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{i\varepsilon} P_{a_k-1/2}(\cos\varphi) \tag{2.3}$$

Парное уравнение (2.1) может быть сведено [2] к бесконечной системе

$$BX^{i\varepsilon} = D \tag{2.4}$$

где $X^{i\varepsilon} = \{x_n^{i\varepsilon}\}$ — неизвестный вектор, $B_l = \{b_{mn}^l\}$ — векторы бесконечного порядка с элементами

$$b_{mn} = \frac{P^1_{-1/2+i\delta_n}(c) P_{-1/2+i\gamma_m}(-c) + P_{-1/2+i\delta_n}(c) P^1_{-1/2+i\gamma_m}(-c)}{(\delta_n^2 - \gamma_m^2) P_{-1/2+i\delta_n}(c) P_{-1/2+i\gamma_m}(-c)}$$

$$d_m = \frac{P^1_{-1/2+i\varepsilon}(c) P_{-1/2+i\gamma_m}(-c) + P_{-1/2+i\varepsilon}(c) P_{-1/2+\gamma_m}(-c)}{K(i\varepsilon)(\gamma_m^2 - \varepsilon^2)}, \quad c = \cos\gamma$$

Через решение бесконечной системы (2.4) функция $q_{i\varepsilon}(\varphi)$ находится из соотношения

$$q_{i\varepsilon}(\varphi) = K^{-1}(i\varepsilon) P_{i\varepsilon-1/2}(\cos\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{P_{i\delta_n-1/2}(\cos\varphi)}{P_{i\delta_n-1/2}(\cos\gamma)} \tag{2.5}$$

где $i\delta_n$ — нули функции $K(\alpha)$.

В реальных самосмазывающихся подшипниках скольжения толщина антифрикционного покрытия обычно значительно меньше размера области контакта. Поэтому в рассматриваемой задаче теории упругости естественным является предположение об относительной малости толщины упругого слоя ($h = R_2 - R_1 \ll R_1 \sin\gamma$). В этом случае функция $K(\alpha)$ может быть аппроксимирована функцией [3]:

$$K^*(\alpha) = (\operatorname{th} A\alpha)/\alpha \tag{2.6}$$

где A дается соотношением (1.4). Предельные значения функций $K^*(\alpha)$ и $K(\alpha)$ при больших и малых α совпадают. Числовые расчеты показывают, что с уменьшением толщины слоя наибольшая погрешность аппроксимации функцией (2.6) достигается при больших α. Поэтому можно утверждать, что с уменьшением толщины упругого слоя точность решения после использования аппроксимации будет увеличиваться.

В дальнейшем, когда речь будет идти о функции $K(\alpha)$, а также ее нулях и полюсах, будем иметь в виду функцию $K^*(\alpha)$ и соответственно, ее нули и полюса, не меняя обозначения.

Отметим важный для дальнейшего факт, что при $\kappa \to 1$ ($R_1 \to R_2$) величина $A \to 0$, а следовательно при $\kappa \to 1$ $\delta_n \to \infty$ и $\gamma_m \to \infty$. Здесь $i\gamma_m$ — полюса функции $K(\alpha)$. Используя аппроксимацию, имеем

$$\delta_n = \frac{\pi n}{A}, \quad \gamma_m = \frac{\pi}{A}(m - 1/2) \tag{2.7}$$

Рост полюсов и нулей функции $K(\alpha)$ с уменьшением относительной толщины упругого слоя позволяет асимптотически значительно упростить систему (2.4) и другие соотношения. Используя асимптотику функций Лежандра при больших индексах, можно показать, что система (2.4) асимптотически эквивалентна системе

$$TX^{i\varepsilon} = D^{i\varepsilon} \tag{2.8}$$

где матрица T и векторы $D^{i\varepsilon} = \{d_m^{i\varepsilon}\}$ имеют соответственно вид

$$T = \{(\delta_n - \gamma_m)^{-1}\} \tag{2.9}$$

$$d_m^{1/2} = \frac{\gamma_m}{\gamma_m^2 + 1/4}, \quad d_m^{3/2} = \frac{\gamma_m \cos\gamma - \sin\gamma}{\gamma_m^2 + 9/4} \tag{2.10}$$

Решения систем (2.8)—(2.10) известны [3]:

$$x_n^{1/2} = s_n \operatorname{Re}\left(\frac{K_-(1/2)}{\delta_n - i/2}\right) \tag{2.11}$$

$$x_n^{3/2} = 2s_n \operatorname{Re}\left[\left(\frac{1}{2}\cos\gamma - \frac{i}{3}\sin\gamma\right)\frac{K_-(3/2)}{\delta_n - 3i/2}\right]$$

$$s_n = \frac{\pi}{A\sqrt{A}}\,\frac{(2n-1)!!}{2(2n-2)!!}, \quad K_-(u) = \sqrt{\frac{A}{\pi}}\,\frac{\Gamma(1/2 + iuA/\pi)}{\Gamma(1 + iuA/\pi)}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Асимптотически также упрощаются формулы для контактных напряжений

$$q_{1/2}(\varphi) = \frac{\gamma}{K(1/2)}\left[1 + \sqrt{\frac{\sin\gamma}{\sin\varphi}}\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{1/2} e^{-(\gamma-\varphi)\delta_n}\right] \quad (0 < \varphi < \gamma) \tag{2.12}$$

$$q_{3/2}(\varphi) = \frac{\gamma}{K(3/2)}\left[\cos\varphi + \sqrt{\frac{\sin\gamma}{\sin\varphi}}\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{3/2} e^{-(\gamma-\varphi)\delta_n}\right] \quad (0 < \varphi < \gamma)$$

Отметим, что последние соотношения справедливы при $\varphi > 0$. В случае $\varphi = 0$ имеем

$$q_{1/2}(0) = \gamma/K(1/2), \quad q_{3/2}(0) = \gamma/K(3/2) \tag{2.13}$$

В полученных асимптотических соотношениях (2.2), (2.12), (2.13) неопределенными еще являются размер области контакта (величина γ) и перемещение штампа δ в зависимости от приложенной силы P. Для нахождения этих величин воспользуемся соотношением

$$P = 2\pi R_1^2 \int_0^{\gamma} q(\varphi)\cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \tag{2.14}$$

и тем фактом, что ряды в (2.12) при $\varphi \to \gamma$ расходятся и после суммирования при $\varphi \neq \gamma$ дают корневую особенность, если $\varphi \to \gamma$. Предполагая контактные напряжения ограниченными, приравняем нулю коэффициент при особенности в формуле (2.2) с учетом (2.12), (2.13). Получим уравнение

$$\frac{\delta + \Delta}{K(3/2)} 2\operatorname{Re}\left[\left(\frac{1}{2}\cos\gamma - \frac{i}{3}\sin\gamma\right)K_-(3/2)\right] - \frac{\Delta}{K(1/2)}\operatorname{Re}(K_-(1/2)) = 0 \tag{2.15}$$

Соотношение (2.14) позволяет получить другое уравнение

$$\delta + \Delta = \left(\frac{1-\nu}{GR_1\gamma} P + \Delta P_{1/2} \right) P_{3/2}^{-1} \tag{2.16}$$

$$P_{1/2} = \frac{2\pi}{\gamma K(1/2)} \left[\frac{\sin^2\gamma}{2} + \Sigma_{1/2} \right] \tag{2.17}$$

$$P_{3/2} = \frac{2\pi}{\gamma K(3/2)} \left[\frac{1-\cos^3\gamma}{3} + \Sigma_{3/2} \right] \tag{2.18}$$

$$\Sigma_{i\varepsilon} = \sin\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\delta_n^2 + 9/4} (\delta_n \cos\gamma + \sin\gamma) \tag{2.19}$$

Таким образом система двух уравнений (2.15), (2.16) позволяет найти в зависимости от заданной силы P перемещение штампа δ и размер области контакта γ.

Соотношение (2.15) позволяет также исключить из формул для контактных напряжений (2.12) расходящиеся части рядов, что дает возможность представить контактные напряжения через экспоненциально сходящиеся ряды. Формально они совпадают с (2.12), в которых $x_n^{i\varepsilon}$ необходимо заменить на $\hat{x}_n^{i\varepsilon}$:

$$\hat{x}_n^{1/2} = \frac{s_n}{2\delta_n} \operatorname{Im} \left[\frac{K_-(1/2)}{\delta_n + i/2} \right] \tag{2.20}$$

$$\hat{x}_n^{3/2} = \frac{3s_n}{\delta_n} \operatorname{Im} \left[\left(\frac{1}{2}\cos\gamma - \frac{i}{3}\sin\gamma \right) \frac{K_-(3/2)}{\delta_n + 3i/2} \right]$$

Ряд (2.19) является плохо сходящимся. Улучшив сходимость, заменим его конечными суммами

$$\Sigma_{1/2} = \sin^2\gamma \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^{1/2}}{\delta_n^2 + 9/4} - \frac{1}{2} F_1 \sin 2\gamma \tag{2.21}$$

$$F_1 = \frac{2\sqrt{A}}{\pi} \ln 2\operatorname{Re}(K_-(1/2)) - \sum_{n=1}^{N} \frac{s_n}{\delta_n^2(\delta_n^2 + 9/4)} y_n^{1/2}$$

$$y_n^{1/2} = \operatorname{Re} \left[K_-(1/2) \left(\delta_n^2 \frac{i}{2} + \delta_n \frac{9}{4} + \frac{9i}{8} \right) \left(\delta_n + \frac{i}{2} \right)^{-1} \right]$$

$$\Sigma_{3/2} = \sin^2\gamma \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n^{3/2}}{\delta_n^2 + 9/4} + \frac{1}{2} F_2 \sin 2\gamma \tag{2.22}$$

$$F_2 = \frac{2\sqrt{A}}{\pi} \ln 4\operatorname{Re} \left[\left(\frac{1}{2}\cos\gamma - \frac{i}{3}\sin\gamma \right) K_-(3/2) \right] - \sum_{n=1}^{N} \frac{s_n}{\delta_n^2(\delta_n^2 + 9/4)} y_n^{3/2}$$

$$y_n^{3/2} = 2\operatorname{Re} \left[\left(\frac{1}{2}\cos\gamma - \frac{i}{3}\sin\gamma \right) K_-(3/2) \left(\delta_n^{3/2} \frac{3i}{2} + \delta_n \frac{9}{4} + \frac{27i}{8} \right) \left(\delta_n + \frac{3i}{2} \right)^{-1} \right]$$

Здесь $N = E\left((5/2\varepsilon)^{2/5}\right)$, где $E(\ldots)$ означает целую часть от числа, ε — заданная точность вычисления рядов.

3. Числовые расчеты. Для проведения числовых расчетов была составлена программа для ПЭВМ. Исходными данными являются: P (кг), ν, G (кг/мм²), R_0 (мм), $h = R_2 - R_1$ (мм), Δ (мм). Далее из системы трансцендентных уравнений (2.15), (2.16) находились δ — перемещение штампа, γ — размер области контакта. При этом использовались соотношения (2.17), (2.18), в которых $\Sigma_{i\varepsilon}$ считались по формулам (2.21), (2.22). После этого рассчитывались контактные напряжения под штампом с использованием формул (2.2), (2.12), (2.13). Здесь при использовании формул (2.12) необходимо $x_n^{i\varepsilon}$ заменить на $\hat{x}_n^{i\varepsilon}$ из (2.20).

$P\cdot 10^{-3}$	γ	$q(\varphi_0)$	$q(\varphi_1)$	$q(\varphi_2)$	$q(\varphi_3)$	$\delta\cdot 10^2$
1	59,6	4,696	4,379	3,448	1,968	0,4947
2	67,7	8,973	8,351	6,538	3,692	0,8319
3	72,1	13,261	12,327	9,616	5,396	1,154
4	75,0	17,573	16,321	12,701	7,095	1,470
5	77,1	21,905	20,332	15,793	8,794	1,783
6	78,6	26,252	24,357	18,891	10,493	2,095

В таблице для некоторых значений исходных параметров ($R_0 = 13$; $h = 0{,}5$; $v = 0{,}4$; $G = 71$; $\Delta = 0{,}005$) приведены расчетные значения внедрения штампа δ в мм, размера площадки контакта γ в градусах и контактных давлений в кг/мм ($q(\varphi_k)$) в четырех точках $\varphi_k = k\gamma/4$ ($k = 0, 1, 2, 3$). При $\varphi = \gamma$ контактные давления обращаются в нуль.

Автор выражает благодарность А. Н. Цветкову за проведение числовых расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дроздов Ю. Н., Павлов В. Г., Пучков В. Н.* Трение и износ в экстремальных условиях. М.: Машиностроение, 1986. 224 с.

2. *Александров В. М.* О решении одного класса парных уравнений//Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 1.

3. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
4.XII.1991