МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1992

УДК 539.3

© 1992 г. В. Н. МАЛЫЙ

ЯВНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ КОРНЕЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При численной реализации решений многих задач МДТТ [1—7] возникает потребность в эффективном определении корней трансцендентных характеристических уравнений в комплексной плоскости собственной частоты или какого-либо другого собственного параметра задачи. В этой связи можно упомянуть реализации метода однородных решений в задачах статики и динамики плит и многослойных оснований, а также при анализе особенностей в окрестности угловых точек упругих тел и т. п.

Процедура определения корней трансцендентных характеристических уравнений обычно содержит две стадии — выделение (локализация) корней и уточнение корней. Локализация корней с помощью разнообразных приемов асимптотического анализа, как правило, оказывается успешной только при использовании конкретных особенностей структуры характеристического уравнения, что далеко не во всех случаях оказывается возможным. Наиболее, по-видимому, эффективное выделение корней с использованием известного принципа аргумента [8] основывается на прямом и во многих случаях довольно трудоемком вычислении контурных интегралов в комплексной плоскости. Уточнение корней осуществляется с использованием итерационных процессов различного вида. Но хотя теория этих процессов хорошо разработана, практически не просто обеспечивать получение гарантированных результатов, так как трудно исключить возможность перескока итерационного процесса на сходимость к другому корню.

Будем исходить из того, что для получения гарантированных результатов необходимо опираться на локализацию корней с помощью принципа аргумента. Тогда оказывается, что при отсутствии корней высокой кратности (более двух) нетрудно получить простой и устойчиво работающий алгоритм, если воспользоваться приводимыми ниже явными выражениями для корней трансцендентных уравнений.

Итак, будем искать корни характеристического уравнения

$$f(z) = 0 \tag{1}$$

в котором $f(z)$ — функция комплексного переменного z, аналитическая в области D, охватываемой контуром L. При этом будем считать вычисленными интегралы

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f'(z)\,dz}{f(z)}, \quad J_k = \oint_L \frac{z^k\,dz}{f(z)} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

При $N=0$, как известно [8], в области D нет корней уравнения (1). При $N=1$ единственный в области D корень z_1 определяется выражением $z_1 = J_1/J_0$.

Его доказательство основывается на выражениях этих интегралов через соответствующие вычеты [8]:

$$J_0 = 2\pi i/f'(z_1), J_1 = 2\pi i z_1/f'(z_1)$$

При этом $f'(z_1) \neq 0$, так как $N = 1$.

Таким же образом нетрудно проверить, что при $N = 2$ имеющиеся в области D два корня z_1 и z_2 определяются как корни уравнения

$$(J_1^2 - J_0J_2)\, z^2 - (J_1J_2 - J_0J_3)z + J_2^2 - J_1J_3 = 0$$

В случае $N > 2$ можно рекомендовать сначала уточнять локализацию корней дроблением области D, пока в каждой из ее частей окажется не более двух корней.

Однако такой прием не работает в ситуациях, когда нельзя исключить возможность многократной вырожденности корней. В этих случаях может оказаться полезным следующее обобщение полученных выше результатов.

При $N > 2$ трансцендентное характеристическое уравнение (1) эквивалентно в области D алгебраическому уравнению

$$p\,(z) = S_N - S_{N-1}z + S_{N-2}z^2 - \ldots + (-1)^{N-1}S_1z^{N-1} + (-1)^Nz^N = 0$$

При этом коэффициенты S_n можно определить, вычислив интегралы J_k ($k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2N - 1$) и решив систему линейных уравнений

$$J_kS_N - J_{k+1}S_{N-1} + J_{k+2}S_{N-2} - \ldots + (-1)^{N-1}J_{k+N-1}S_1 + (-1)^NJ_{k+N} = 0,$$
$$(k = 0,\ 1, \ldots, N - 1)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 683 с.
2. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л.: Наука, 1967. 402 с.
3. *Mindlin R. D.* An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates. Monograph, U. S. Army Signal Corps Engineering Laboratories, Fort Monmouth., N. J., 1955.
4. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
5. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
6. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
7. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
8. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969. 576 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.VII.1992