

УДК 539.3

© 1992 г. А. Г. ГОРШКОВ, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ, А. М. ШУКУРОВ

ДИФРАКЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА СФЕРИЧЕСКОЙ
 ПОЛОСТИ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Задачи дифракции нестационарных волн на препятствии сферической формы в акустическом полупространстве исследованы в [1, 2]. В публикуемой работе рассматривается задача о дифракции нестационарных волн на сферической полости в упругом полупространстве.

1. Постановка задачи. Пусть в однородном изотропном линейноупругом полупространстве $z \geq 0$ на расстоянии h от свободной плоской границы $z = 0$ на оси z прямоугольной декартовой системы координат x, y, z расположен центр сферической полости O радиуса R ($h > R$). В момент времени $\tau = 0$ поверхности сферической полости касается плоская нестационарная волна расширения, фронт которой параллелен свободной границе полупространства.

Возмущенное движение среды рассматривается в сферической системе координат (r, ϑ, φ) , с началом в точке O . Потенциалы φ, ψ упругих смещений с учетом осевой симметрии задачи удовлетворяют следующим волновым уравнениям и граничным условиям на свободной границе и поверхности полости (точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ):

$$\ddot{\varphi} = \Delta\varphi, \eta^2\ddot{\psi} = \Delta\psi - \psi/(r^2\sin^2\theta) \quad (1.1)$$

$$(\sigma_{zz} + \sigma_{zz0})|_{z=0} = 0, (\sigma_{zx} + \sigma_{zx0})|_{z=0} = 0 \quad (1.2)$$

$$(\sigma_{rr} + \sigma_{r0})|_{r=R} = 0, (\sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta0})|_{r=R} = 0$$

где Δ — оператор Лапласа в сферической системе координат (r, θ, ϑ) , $\sigma_{\alpha\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta 0}$ — напряжения, соответствующие возмущенному состоянию среды и в набегающей волне.

В начальный момент $\tau = 0$ среда находится в невозмущенном состоянии

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь и далее использованы следующие безразмерные величины:

$$h = \frac{h'}{R}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{R}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad \eta = \frac{c_1}{c_2}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\sigma'_{\alpha\beta}}{(\lambda + 2\mu)}$$

$$u = \frac{u'}{R}, \quad v = \frac{v'}{R}, \quad \varphi = \frac{\varphi'}{R^2}, \quad \psi = \frac{\psi'}{R^2}$$

где штрихом обозначены размерные величины; u, v — радиальное и тангенциальное перемещения, λ, μ — упругие постоянные Ламе, ρ — плотность среды, c_1 и c_2 — скорости распространения упругих волн объемного расширения и сдвига, t — время.

Скалярный потенциал падающей волны задан в следующем виде

$$\varphi_0 = f(\tau + z - 1 - h) H(\tau + z - 1 - h) \quad (1.4)$$

где $f(\tau)$ — функция, задающая закон изменения потенциала во времени, $H(\tau)$ — единичная функция Хевисайда.

2. Метод решения. К начально-краевой задаче (1.1)–(1.3) применим интегральное преобразование Лапласа по времени τ (L — обозначает трансформанту Лапласа, s — параметр преобразования). В пространстве изображений потенциалы представим так

$$\varphi^L = \varphi_1^L + \varphi_2^L, \quad \psi^L = \psi_2^L \quad (2.1)$$

$$\varphi_1^L = -f_{(s)}^L e^{-(2h+1)s} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \sqrt{\frac{\pi}{2rs}} I_{n+\nu_2}(rs) P_n(\cos \theta) \quad (2.2)$$

$$\varphi_0^L = f^L(s) e^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sqrt{\frac{\pi}{2rs}} I_{n+\nu_2}(rs) P_n(\cos \theta) \quad (2.3)$$

Здесь φ_1^L — потенциал плоской волны расширения, отраженной от свободной границы полупространства, φ_2^L и ψ_2^L — скалярной и ненулевой векторный потенциалы возмущений, вносимых сферической полостью. Последние представляются в виде

$$\varphi_2^L = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} A_n^L(s) K_{n+\nu_2}(rs) P_n(\cos \theta) + \frac{1}{\sqrt{r_1}} C_n^L(s) K_{n+\nu_2}(r_1 s) P_n(\cos \theta_1) \right] \quad (2.4)$$

$$\psi_2^L = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} B_n^L(s) K_{n+\nu_2}(r\eta s) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) + \frac{1}{\sqrt{r_1}} D_n^L(s) K_{n+\nu_2}(r_1 \eta s) \frac{d}{d\theta_1} P_n(\cos \theta_1) \right] \quad (2.5)$$

где $K_{n+\nu_2}(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода; $P_n(\cos \theta)$ и $dP_n(\cos \theta)/d\theta$ — полиномы Лежандра и их производные первого порядка; $A_n^L(s)$, $B_n^L(s)$, $C_n^L(s)$ и $D_n^L(s)$ — неизвестные функции, которые определяются из граничных условий; r_1 и θ_1 — координаты сферической системы с началом в точке O_1 , симметричной точке O относительно свободной границы полупространства $z \geq 0$.

Учитывая связь между переменными r, θ и r_1, θ_1 на плоскости $z=0$ и удовлетворяя первым двум граничным условиям в (1.2), получим зависимости между функциями $A_n^L(s)$, $B_n^L(s)$, $C_n^L(s)$ и $D_n^L(s)$:

$$C_n^L(s) = (-1)^{n+1} A_n^L(s), \quad D_n^L(s) = (-1)^{n+1} B_n^L(s) \quad (2.6)$$

Используя теорему сложения для функций $K_{n+\nu_2}(x)$ [3], представим потенциалы φ_2^L и ψ_2^L следующим образом:

$$\varphi_2^L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[A_n^L(s) K_{n+\nu_2}(rs) + (-1)^n (2n+1) I_{n+\nu_2}(rs) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} A_p^L(s) \times \right.$$

$$\times \sum_{\sigma=|\rho-n|}^{\rho+n} b_{\sigma}^{(n0\rho0)} \sqrt{\frac{\pi}{4hs}} K_{\sigma+\nu_2}(2hs) \Big] P_n(\cos \theta) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \psi_2^L = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[B_n^L(s) K_{n+\nu_2}(rs\eta) + \frac{(-1)^n (2n+1)}{n(n+1)} I_{n+\nu_2}(r\eta s) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{\rho=1}^{\infty} (-1)^{\rho+1} B_{\rho}^L(s) \sum_{\sigma=|\rho-n|}^{\rho+n} b_{\sigma}^{(n1\rho1)} \sqrt{\frac{\pi}{4h\eta s}} K_{\sigma+\nu_2}(2h\eta s) \right] \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $b_{\sigma}^{(n0\rho0)}$, $b_{\sigma}^{(n1\rho1)}$ — коэффициенты Клебша — Гордона [3], $I_{n+\nu_2}(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого ряда.

Раскладывая изображения напряжений $\sigma_{rr}^L(r, s, \theta)$, $\sigma_{r\theta}^L(r, s, \theta)$ соответственно в ряды по полиномам Лежандра $P_n(\cos \theta)$ и Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta)$, и используя связь коэффициентов $\sigma_{rn}^L(r, s)$, $\sigma_{r\theta n}^L(r, s)$ с $\varphi_n^L(r, s)$, $\psi_n^L(r, s)$ [4], удовлетворим последним двум граничным условиям в (1.2). В результате получим следующую систему двух бесконечных матричных уравнений относительно столбцов A и B :

$$\begin{aligned} F^{(1)}AXV - F^{(2)}AXZ^2V + M^{(1)}AZ^2V + F^{(3)}BYZ - F^{(4)}BYZV^2 + M^{(2)}BZV^2 = \\ = P^{(1)}ZV + P^{(2)}XZV + P^{(3)}Z^3V + P^{(4)}XZ^3V \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} T^{(1)}AXV - T^{(2)}AXZ^2V + N^{(1)}AZ^2V + T^{(3)}BYZ - T^{(4)}BYZV^2 + N^{(2)}BZV^2 = \\ = Q^{(1)}ZV + Q^{(2)}XZV + Q^{(3)}Z^3V + Q^{(4)}XZ^3V \end{aligned}$$

$$A = \|A_0^L, A_1^L, \dots\|^T, B = \|B_1^L, B_2^L, \dots\|^T, F^{(k)} = \|F_{np}^{(k)}\|, M^{(l)} = \|M_{np}^{(l)}\| (n, p \geq 0)$$

$$P^{(k)} = \|p_0^{(k)}, p_1^{(k)}, \dots\|^T, Q^{(k)} = \|q_1^{(k)}, q_2^{(k)}, \dots\|^T, T^{(k)} = \|T_{np}^{(k)}\|, N^{(l)} = \|N_{np}^{(l)}\| (n, p \geq 1)$$

$$X = e^{-2hs}, Y = e^{-2h\eta s}, Z = e^{-s}, V = e^{-\eta s}$$

Элементы бесконечных матриц $F^{(k)}$ и $T^{(k)}$, столбцов $P^{(k)}$ и $Q^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4$), диагональные матрицы $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $N^{(1)}$ и $N^{(2)}$ имеют вид

$$F_{np}^{(1)}(s) = Q_{n1}(-s) C_{np}(s), F_{np}^{(2)}(s) = Q_{n1}(s) C_{np}(s)$$

$$F_{np}^{(3)}(s) = \frac{Q_{n2}(-\eta s)}{\eta^n} S_{np}(s), F_{np}^{(4)}(s) = \frac{Q_{n2}(\eta s)}{\eta^n} S_{np}(s)$$

$$T_{np}^{(1)}(s) = Q_{n2}(-s) C_{np}(s), T_{np}^{(2)}(s) = Q_{n2}(s) C_{np}(s)$$

$$T_{np}^{(3)}(s) = \frac{Q_{n3}(-\eta s)}{n(n+1)\eta^n} S_{np}(s), T_{np}^{(4)}(s) = \frac{Q_{n3}(\eta s)}{n(n+1)\eta^n} S_{np}(s)$$

$$M_{nn}^{(1)}(s) = Q_{n1}(s), M_{nn}^{(2)}(s) = \frac{n(n+1)Q_{n2}(\eta s)}{\eta^n}$$

$$N_{nn}^{(1)} = Q_{n2}(s), N_{nn}^{(2)}(s) = \frac{Q_{n3}(\eta s)}{\eta^n}; M_{np}^{(k)} = N_{np}^{(k)} = 0 (n \neq p)$$

$$p_n^{(1)}(s) = \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)Q_{n1}(-s)}{2s} f^L(s), p_n^{(2)}(s) = \frac{(2n+1)Q_{n1}(-s)}{2s} f^L(s)$$

$$p_n^{(3)}(s) = \frac{(-1)^n(2n+1)Q_{n1}(s)}{2s} f^L(s), p_n^{(4)}(s) = \frac{(2n+1)Q_{n1}(s)}{2s} f^L(s)$$

$$q_n^{(1)}(s) = \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)Q_{n2}(-s)}{2s} f^L(s), q_n^{(2)}(s) = \frac{(2n+1)Q_{n2}(-s)}{2s} f^L(s)$$

$$q_n^{(3)}(s) = \frac{(-1)^n (2n+1) Q_{n2}(s)}{2s} f(s), \quad q_n^{(4)}(s) = \frac{(2n+1) Q_{n2}(s)}{2s} f(s)$$

$$C_{np}(s) = \frac{(-1)^{p+1} (2n+1)}{4hs} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_{\sigma}^{(n0p0)} \frac{R_{\sigma 0}(2hs)}{(2hs)^{\sigma}}$$

$$S_{np}(s) = \frac{(-1)^{p+1} (2n+1)}{4h\eta s} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_{\sigma}^{(n1p1)} \frac{R_{\sigma 0}(2h\eta s)}{(2h\eta s)^{\sigma}}$$

При построении системы (2.9) учтена связь функций $K_{n+v_2}(x)$ и $I_{n+v_2}(x)$ с элементарными функциями [5]. Полиномы $R_{n0}(x)$, $R_{n1}(x)$, $R_{n2}(x)$, $R_{n3}(x)$, $Q_{n1}(x)$, $Q_{n2}(x)$, $Q_{n3}(x)$ определены в [6].

Решение системы (2.9) представим в виде рядов по экспонентам, что позволяет построить решение бесконечной системы без применения метода редукции

$$A = \sum_{ijkl=0}^{\infty} a_{ijkl}(s) X^i Y^j Z^{-k+1} V^{-l}$$

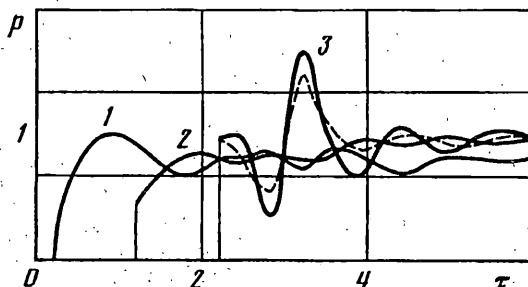
$$B = \sum_{ijkl=0}^{\infty} b_{ijkl}(s) X^i Y^j Z^{-k+2} V^{-l-1} \quad (2.10)$$

где $a_{ijkl}(s)$, $b_{ijkl}(s)$ — бесконечные векторы соответственно с элементами $a_{ijkl}^{(n)}(s)$ ($n \geq 0$), $b_{ijkl}^{(n)}(s)$ ($n \geq 1$).

Подставляя (2.10) в систему (2.9) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях X , Y , Z , V , получим рекуррентные соотношения для $a_{ijkl}(s)$ и $b_{ijkl}(s)$ (в силу громоздкости они не приводятся) и следующие начальные условия к ним

$$\begin{aligned} a_{0000}(s) &= [P^{(3)}N^{(2)} - M^{(2)}Q^{(3)}] / \Delta_1, \quad b_{0000}(s) = [M^{(1)}Q^{(3)} - N^{(1)}P^{(3)}] / \Delta_1 \\ a_{000l}(s) &= 0, \quad b_{000l}(s) = 0 \quad (l \geq 1) \\ a_{001l}(s) &= 0, \quad b_{001l}(s) = 0 \quad (l \geq 0) \\ a_{0020}(s) &= [P^{(1)}N^{(2)} - Q^{(1)}M^{(2)}] / \Delta_1, \quad b_{0020}(s) = [M^{(1)}Q^{(1)} - N^{(1)}P^{(1)}] / \Delta_1 \\ a_{002l}(s) &= 0, \quad b_{002l}(s) = 0 \quad (l \geq 1) \\ a_{00kl}(s) &= 0, \quad b_{00kl}(s) = 0 \quad (k \geq 3, l \geq 0) \\ a_{1000}(s) &= [(P^{(4)} + F^{(2)}a_{0000}(s))N^{(2)} - (Q^{(4)} + T^{(2)}a_{0000}(s))M^{(2)}] / \Delta_1 \\ b_{1000}(s) &= [(Q^{(4)} + T^{(2)}a_{0000}(s))M^{(1)} - (P^{(4)} + F^{(2)}a_{0000}(s))N^{(1)}] / \Delta_1 \\ a_{100l}(s) &= 0, \quad b_{100l}(s) = 0 \quad (l \geq 1) \\ a_{101l}(s) &= 0, \quad b_{101l}(s) = 0 \quad (l \geq 0) \\ a_{1020}(s) &= [(P^{(2)} - F^{(1)}a_{0000}(s) + F^{(2)}a_{0020}(s))N^{(2)} - [(Q^{(2)} - T^{(1)}a_{0000}(s) + \\ &+ T^{(2)}a_{0020}(s))M^{(2)}] / \Delta_1 \\ b_{1020}(s) &= [(Q^{(2)} - T^{(1)}a_{0000}(s) + T^{(2)}a_{0020}(s))M^{(1)} - [(P^{(2)} - F^{(1)}a_{0000}(s) + \\ &+ F^{(2)}a_{0020}(s))N^{(1)}] / \Delta_1 \\ a_{102l}(s) &= 0, \quad b_{102l}(s) = 0 \quad (l \geq 1) \\ \Delta_1 &= M^{(1)}N^{(2)} - M^{(2)}N^{(1)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Указанные рекуррентные соотношения позволяют определить все элементы $a_{ijkl}^{(n)}(s)$, $b_{ijkl}^{(n)}(s)$ соответствующих столбцов $a_{ijkl}(s)$, $b_{ijkl}(s)$ в виде рациональных



функций, что дает возможность просто вычислить их оригиналы, и следовательно, найти оригиналы коэффициентов рядов перемещений u , v и тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$.

Отметим, что из полученного решения как частный случай следует решение соответствующей задачи для акустической среды ($\eta \rightarrow \infty$).

Указанный метод решения без существенных изменений переносится на задачи о дифракции упругих или акустических волн на абсолютно жестком неподвижном шаре.

3. Пример. В качестве примера использования указанного алгоритма рассмотрим соответствующую задачу для акустического полупространства. Положим, что $h = 1,5$, и падающая волна имеет ступенчатый профиль: $f(\tau) = 1$.

На фигуре приведены графики изменения гидродинамического давления, обусловленного возмущенным движением среды, в следующих точках: $r = 1,2$, $\theta = 0$ (кривая 1); $r = 1,2$, $\theta = \pi/2$ (кривая 2) и $r = 1,2$, $\theta = \pi$ (кривая 3). При вычислениях удерживалось четыре члена ряда по полиномам Лежандра. Штриховая линия соответствует результату, полученному при удержании в разложении трех членов ($r = 1,2$, $\theta = \pi$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабаев А. Э. Задачи дифракции нестационарных волн на оболочках, расположенных вблизи плоской границы. // Прикл. мех. 1989. Т. 25. № 1. С. 71—83.
2. Кубенко В. Д., Бабаев А. Э., Годенко В. П. Взаимодействие нестационарной волны давления с жесткой сферой, расположенной вблизи свободной поверхности. // Гидромеханика. 1988. 57. С. 10—15.
3. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
4. Горшков А. Г., Григолюк Э. И., Тарлаковский Д. В. Внутренние задачи динамики толстостенной сферы, соприкасающейся с упругими или акустическими средами. // Прикл. мех. 1978. Т. 14, № 12. С. 12—22.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. // Под ред. Абрамовица М. и Стигана И. М.: Наука, 1979, 832 с.
6. Горшков А. Г., Поручиков В. Б., Тарлаковский Д. В. Об одном приеме обращения преобразования Лапласа в задачах взаимодействия нестационарных волн со сферическим включением. // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 82—90.

Москва

Поступила в редакцию
9.IV.1992