

УДК 539.3

© 1992 г. Н. В. БОЕВ, И. И. ВОРОВИЧ, М. А. СУМБАТЯН

## МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ КОРОТКОВОЛНОВОЙ ДИФРАКЦИИ

Излагается модификация метода граничных интегральных уравнений для исследования двумерных задач коротковолновой дифракции на объектах с произвольным гладким контуром в акустической среде. В физической основе метода — учет специфики взаимодействия падающего поля с выпуклыми и вогнутыми участками границы объекта. Она состоит в том, что лучи, попадающие на выпуклые участки границы не могут участвовать в повторных переотражениях. И наоборот, лучи, попадающие на вогнутые участки, могут переотражаться лишь в точках этих участков, никогда не попадая на выпуклую часть контура. Таким образом, за счет разделения дифракционных эффектов на выпуклых и вогнутых частях границы удается понизить размерность систем в методе граничных интегральных уравнений. Предложенный метод существенно сокращает машинное время вычислений.

1. В волновых задачах дифракции широко используется метод граничных интегральных уравнений (ГИУ). При численной реализации этого метода наибольшие трудности возникают в области коротких волн. Это связано с тем, что в данной области необходимо осуществлять дискретизацию в квадратурных формулах с большим числом узлов. Для преодоления этой трудности использовались различные подходы [1, 2]. В данной работе развивается метод, основанный на ясных физических представлениях. Одновременно исследуются уравнения как для жидкой, так и для упругой среды. Для простоты рассмотрение ограничивается двумерными задачами.

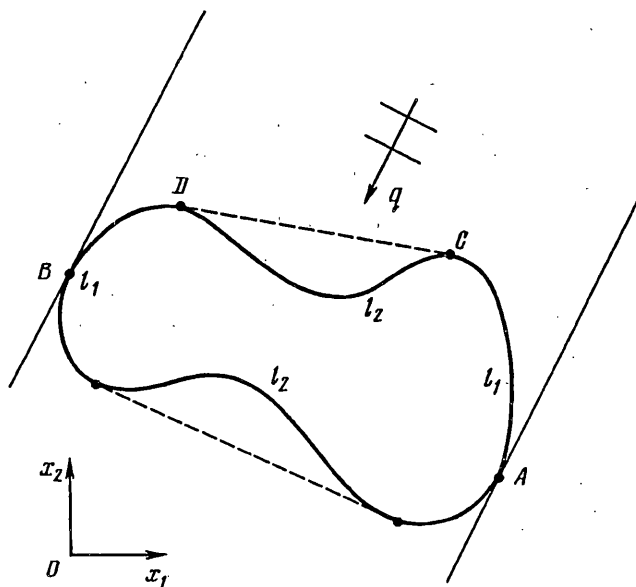
Пусть на объект с границей  $l$ , находящийся в акустической среде, падает известная, например, плоская волна (фиг. 1). Граничные условия на контуре  $l$  могут быть различными и определяются физическими условиями на границе. Для определенности, в дальнейшем будем считать, что граница  $l$  свободна от усилий. В жидкой среде это соответствует нулевому давлению на границе —  $p|_l = 0$ , в упругой — отсутствию напряжений на контуре  $l$ :  $T_1|_l = 0$ ,  $T_2|_l = 0$  ( $T$  — вектор усилий). Тогда ГИУ прямого метода в первом случае имеет следующий вид [3]:

$$\frac{i}{4} \int_l H_0^{(1)}(kr) g(y) ds, = p_0 = e^{ik(q \cdot x)} \quad (1.1)$$

$$g(y) = \frac{\partial p}{\partial n_y} \Big|_l, \quad r = |x - y|, \quad x \in l$$

где  $k$  — волновое число,  $q$  — единичный вектор, определяющий направление падающего поля,  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

В упругой среде вместо одного уравнения имеем систему двух уравнений [4]:



Фиг. 1

$$u_1(x) - 2 \int_l [P_1^{(1)}(x, y) u_1(y) + P_2^{(1)}(x, y) u_2(y)] ds_y = 2u_1^0(x) \quad (1.2)$$

$$u_2(x) - 2 \int_l [P_1^{(2)}(x, y) u_1(y) + P_2^{(2)}(x, y) u_2(y)] ds_y = 2u_2^0(x), \quad x \in l$$

$$P^{(k)}(x, y) = 2\mu \frac{\partial}{\partial n_y} [U^{(k)}(x, y)] + \lambda n_y \operatorname{div}_y [U^{(k)}(x, y)] + \\ + \mu \{n_y \times \operatorname{rot}_y [U^{(k)}(x, y)]\}$$

$$U_j^{(k)}(x, y) = \frac{i}{4\mu k_s^2} \left\{ k_s^2 \delta_{kj} H_0^{(1)}(k_s r) - \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} [H_0^{(1)}(k_p r) - H_0^{(1)}(k_s r)] \right\}$$

$$u^0(x) = q e^{ik_p(q \cdot x)}, \quad r = |x - y|, \quad k, j = 1, 2$$

где  $\delta_{kj}$  — символ Кронеккера,  $k_p$  и  $k_s$  — волновые числа, соответствующие продольной и поперечной волнам. Здесь, для определенности, рассматривается падение продольной волны.

2. Построим выпуклую оболочку границы объекта [5], т. е. наименьший выпуклый контур, содержащий контур  $l$ . Это означает проведение касательных, которые отделяют участки вогнутости  $l_2$  от участков выпуклости  $l_1$ . Проведением касательных, параллельных вектору  $q$ , выделим область глобальной тени  $AB$ , находящейся на задней части контура. Очевидно, что точки  $A$  и  $B$  принадлежат выпуклым участкам  $l_1$ .

Пусть  $L$  — характерный размер области. Тогда в асимптотическом смысле при  $kL \gg 1$ ,  $k_p L \gg 1$ ,  $k_s L \gg 1$  решение интегральных уравнений в зоне тени равно нулю. Поэтому ГИУ (1.1) и (1.2) сужаются на дугу  $ACDB$ . В дальнейшем под  $l_1$  и  $l_2$  будем понимать только те их части, которые находятся на лицевой стороне граничного контура  $ACDB$ .

Поведение решения на выпуклых участках  $l_1$  качественно отличается в физическом смысле от поведения решения на вогнутых участках  $l_2$ . Если на  $l_1$  (дуги  $BD$  и  $AC$  на фиг. 1) не могут происходить переотражения лучей, то на  $l_2$  такие переотражения могут играть существенную роль. Следовательно, на

высоких частотах решение уравнений (1.1) и (1.2) на выпуклых участках  $BD$  и  $AC$  определяется так же, как и для выпуклых тел. Для уравнения (1.1) это означает, что

$$g(y) = 2 \frac{\partial p_0}{\partial n_y} = 2ik(q \cdot n_y) e^{ik(q \cdot y)}, \quad y \in l_1 \quad (2.1)$$

В упругой среде в окрестности каждой точки выпуклых участков  $l_1$  решение системы (1.2) совпадает с известным решением задачи об отражении плоской волны от свободной границы упругой полуплоскости.

С каждой точкой  $y \in l_1$  свяжем единичные орты  $\tau_y, n_y$ , образующие правую систему с учетом того, что  $n_y$  — внешняя нормаль. Пусть  $t_y$  — единичный вектор, определяющий направление поперечной волны, отраженной от границы  $l_1$  в точке  $y$ . Тогда согласно [6]:

$$u_\tau(y) = [-(q \cdot \vec{\tau}_y)(1 + V_{pp}) + \frac{k_s}{k_p}(t_y \cdot n_y) V_{ps}] e^{ik_p(q \cdot y)}$$

$$u_n(y) = [-(q \cdot n_y)(1 - V_{pp}) - \frac{k_s}{k_p}(t_y \cdot \vec{\tau}_y) V_{ps}] e^{ik_p(q \cdot y)} \quad (2.2)$$

Здесь  $V_{pp}$  и  $V_{ps}$  — коэффициенты отражения от границы в точке  $y \in l_1$  соответственно продольной и поперечной волны.

В результате проекции вектора перемещения  $\{u_1, u_2\}$  на выпуклых участках  $l_1$  находятся, минуя решение системы (1.2), в следующем виде

$$u_1(y) = n_1 u_n(y) + n_2 u_\tau(y), \quad u_2(y) = n_2 u_n(y) - n_1 u_\tau(y) \quad (2.3)$$

где  $n_1, n_2$  — проекции вектора  $n_y$ .

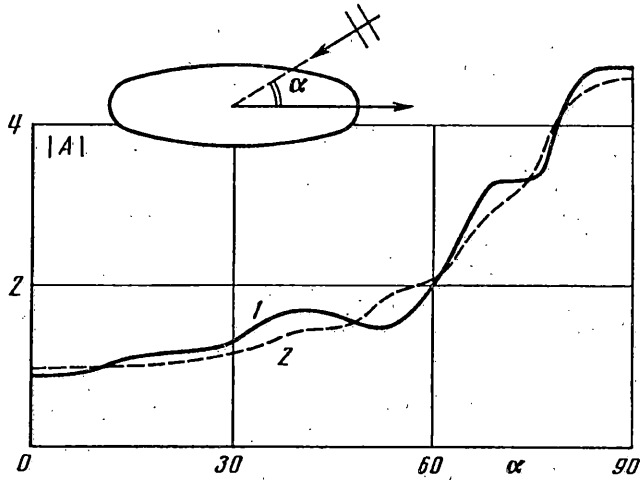
Таким образом, осталось найти только значения неизвестных функций в уравнениях (1.1) и (1.2) на вогнутых участках  $l_2$ . Для этого в левых частях ГИУ оставим лишь интегралы по  $y \in l_2$ . Для  $y \in l_1$  значения неизвестных уже определены по формулам (2.1) — (2.3) и соответствующие интегралы в ГИУ могут быть переброшены в качестве добавок к известным функциям, стоящим в правых частях (1.1) и (1.2). Следовательно, полагая  $x \in l_2$ , ГИУ в высокочастотном диапазоне удастся свести к интегральным уравнениям на участках  $l_2$ . Данная редукция существенно сокращает время вычислений, поскольку оно определяется величиной  $M^3$ , где  $M$  — число точек коллокаций в квадратурных формулах. Выпишем, например, получающееся уравнение в случае задачи (1.1):

$$\frac{i}{4} \int_{l_2} H_0^{(1)}(k|x-y|) g(y) ds_y = e^{ik(q \cdot x)} +$$

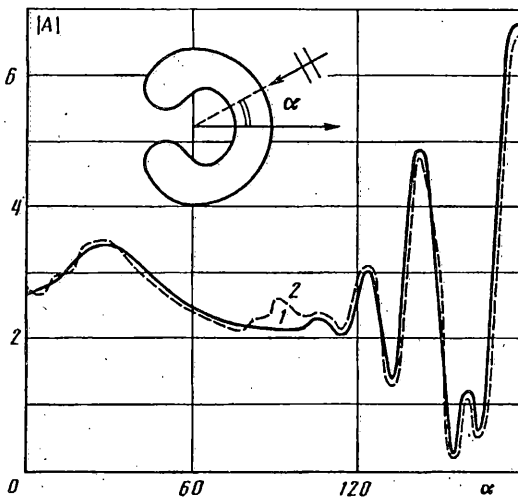
$$+ \frac{k}{2} \int_{l_1} (q \cdot n_y) e^{ik(q \cdot y)} H_0^{(1)}(k|x-y|) ds_y, \quad x \in l_2 \quad (2.4)$$

3. Дальнейшее упрощение возможно на следующем пути. Если на освещенной стороне имеется несколько участков типа  $l_2$ , то физика дифракционных процессов такова. Источники в виде граничных значений неизвестных функций, расположенные на одном из таких вогнутых участков границы, в асимптотическом смысле не влияют на значения волновых полей на других участках вогнутости. Другими словами, лучи, отраженные от одного участка вогнутости, почти не переизлучаются на другие подобные участки. Следовательно, если имеются  $J$  участков  $l_{2j}, j = 1, \dots, J$ , то уравнения (2.4) достаточно решить на каждом из  $l_{2j}$  независимо.

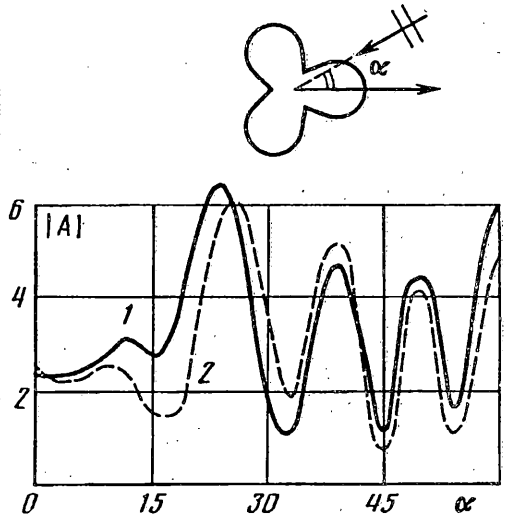
Наконец последнее упрощение может быть достигнуто, если пренебречь из-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

лучением с выпуклых участков  $l_1$  на вогнутые участки  $l_2$ . Такой подход является естественным, поскольку лучи, отраженные, например, от дуги  $AC$  не могут попасть на дугу  $CD$  ни в жидком, ни в упругом случае. В итоге, например, уравнение (2.4) заменится совокупностью более простых независимых между собой уравнений

$$\frac{i}{4} \int_{l_2^j} H_0^{(1)}(k|x-y|) g(y) ds, = e^{ik(q \cdot x)}, \quad x \in l_2, \quad j = 1, \dots, J$$

Заметим, что предлагаемый в работе метод для выпуклых объектов сводится к классической физической теории Кирхгофа [3]. Это связано с тем, что для таких объектов вогнутые участки отсутствуют и ГИУ вообще решать не нужно, а на выпуклых участках неизвестные функции просто равны значению падающего поля, умноженному на некоторый коэффициент (в скалярном случае этот коэффициент всегда равен двум).

4. Важной физической характеристикой, имеющей большое практическое значение, является амплитуда обратного рассеяния в дальнем поле. Для уравнений (1.1), (1.2) она имеет следующий вид

$$A(\alpha) = -\frac{i}{4} \int_I e^{ik_p(q \cdot y)} g(y) ds_y, \quad q = \{-\cos \alpha, -\sin \alpha\} \quad (4.1)$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{4} \left( \frac{k_p}{k_s} \right)^4 \int_I e^{ik_p(q \cdot y)} (u_y \cdot [2(q \cdot n_y)q + \frac{\lambda}{\mu} n_y]) ds_y \quad (4.2)$$

Численная реализация изложенного метода проведена для объектов как выпуклой, так и невыпуклой формы. На фиг. 2—4 приведены результаты сравнения точного расчета уравнений (1.1), (1.2) с расчетами по предлагаемой методике. При этом кривые 1 соответствуют точному решению, а кривые 2 — приближенному.

На фиг. 2 отражена диаграмма обратного рассеяния  $|A(\alpha)|$  (4.2) в задаче дифракции на эллиптической полости в упругой среде. При этом  $k_p a = 10$ ,  $a/b = 3$ ,  $k_s/k_p = c_p/c_s = 5,85/3,23$ , что соответствует углеродистой стали. Для такого выпуклого объекта время, необходимое для построения кривых 1 и 2, равно соответственно 1 ч и 30 с на ЭВМ ЕС-1055М. Число точек в квадратурных формулах  $N = 120$ .

На фиг. 3 приведены результаты расчета (4.1) диаграммы рассеяния в жидкой среде для объекта в виде «бублика», который имеет в декартовой системе координат следующее параметрическое представление

$$kx(t) = \sum_{m=0}^4 a_m \cos mt, \quad ky(t) = \sum_{m=1}^4 b_m \sin mt, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

$$a_0 = 2,76; a_1 = 3,38; a_2 = 6,15; a_3 = -1,12; a_4 = -0,36$$

$$b_1 = 8,48; b_2 = 2,35; b_3 = 1,30; b_4 = -1,74$$

Время расчета кривых 1 и 2 соответственно равно 5 мин и 40 с на РС-286/287. При этом  $N = 64$ .

На фиг. 4 отражена диаграмма рассеяния (4.2) для полости, находящейся в упругой среде и имеющей вид «трехлепестковой розы». Уравнение граничного контура в полярной системе координат  $k_p \rho(\varphi) = 5(2 + \cos 3\varphi)$ . Физические параметры такие же, как и в случае фиг. 2,  $N = 150$ . Время расчета кривых 1 и 2 соответственно 1,5 ч и 20 мин.

В силу симметрии рассмотренных объектов все диаграммы приведены лишь на части изменения угла  $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$ .

Заметим, что характерный размер всех рассмотренных объектов равен примерно  $3 + 4\lambda$  (в упругом случае  $\lambda = \lambda_p$  — длина продольной волны).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thiele G. A., Newhouse T. H. A hybride technique for combining moment methods with the geometrical theory of diffraction // IEEE Trans. 1975. V. AP — 23. No. 1. P. 62—69.
2. Tobočan W. Extension of the Helmholtz integral equation method to shorter wavelengths // J. Acoust. Soc. Am. Part I — 1986. V. 80. No. 6. P. 1828—1837. Part II — 1987. V. 82. No. 2. P. 704—706.
3. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
4. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
5. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989. 480 с.
6. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.