

УДК 539.3

© 1992 г. А. В. МАНЖИРОВ, В. А. ЧЕРНЫШ

ЗАДАЧА ОБ УСИЛЕНИИ ЗАГЛУБЛЕННОЙ АРОЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ МЕТОДОМ НАРАЩИВАНИЯ

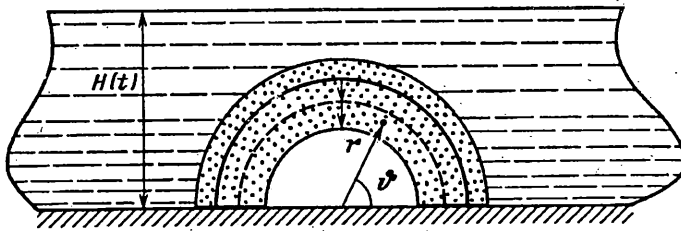
Исследуется напряженно-деформированное состояние засыпаемой арочной конструкции, которая, начиная с некоторого момента времени, наращивается с целью усиления. Материал конструкции описывается определяющими соотношениями стареющего вязкоупругого тела, отражающими основные свойства таких конструкционных материалов как бетон, полимеры, композиты, пластмассы и др. Строится решение задачи. Проводятся расчеты заглубленной наращиваемой бетонной арки. Обсуждаются возникающие качественные и количественные эффекты. Отмечается принципиальное различие явлений, характерных для растущей и неизменяемой арок.

Постановка задачи. Рассмотрим арочную конструкцию в форме половины кругового цилиндра, опирающуюся на гладкое жесткое основание. Будем считать, что арка изготовлена из вязкоупругого стареющего материала в нулевой момент времени, ее внутренний радиус равен a_0 , а внешний — b . В момент времени τ_0 начинается засыпка арки сыпучим грунтом, высота слоя которого характеризуется кусочно-гладкой функцией $H(t)$ ($H(\tau_0) \geq 0$). Для усиления конструкции с момента времени $\tau_1 \geq \tau_0$ производится ее непрерывное наращивание ненапряженными элементами одинакового с ней возраста. За время наращивания внутренний радиус арки изменяется по закону $a(t)$ ($a(\tau_1) = a_0$) и в момент завершения наращивания τ_2 принимает значение a_1 (фиг. 1). Дальнейшее деформирование арки ($t \geq \tau_2$) происходит, как и прежде, только за счет давления слоя сыпучего грунта (считается, что влиянием объемных сил, действующих на элементы конструкции, можно пренебречь).

Заметим, что процессы засыпки и наращивания полностью характеризуются функциями $H(t)$ и $a(t)$ и не зависят друг от друга. Так, наращивание может начаться после достижения $H(t)$ некоторого значения, а может — и одновременно с засыпкой. Следует указать и на возможность неполной засыпки арки, когда $H(t) < b$ для любого момента времени.

Завершая постановку задачи, отметим то обстоятельство, что действие слоя сыпучего грунта на арку моделируется нормальным к поверхности арки давлением, равным по модулю весу столба материала грунта над рассматриваемой точкой конструкции. Для определенности рассматривается случай плоской деформации.

1. Напряженно-деформированное состояние арки до начала процесса наращивания. Исследуем напряженно-деформированное состояние засыпаемой арки на интервале времени $[\tau_0, \tau_1]$. Уравнения равновесия, соотношения Коши и



Фиг. 1

уравнения состояния имеют в этом случае следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{t\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \quad (1.3)$$

$$\sigma_{rr} = G(I + N(\tau_0, t)) [(K + 1)\varepsilon_{rr} + (K - 1)\varepsilon_{\theta\theta}]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = G(I + N(\tau_0, t)) [(K - 1)\varepsilon_{rr} + (K + 1)\varepsilon_{\theta\theta}]$$

$$\sigma_{r\theta} = 2G(I + N(\tau_0, t)) \varepsilon_{r\theta}$$

$$(I + N(\tau_0, t))^{-1} = (I - L(\tau_0, t))$$

$$I f(t) = f(t), \quad L(\tau_0, t) f(t) = \int_{\tau_0}^t f(\tau) K(t, \tau) d\tau$$

$$2G(t) = E(t)(1 + \nu)^{-1}, \quad K = (1 - 2\nu)^{-1}, \quad \omega(t, \tau) = 2C(t, \tau)(1 + \nu)$$

$$K(t, \tau) = E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] = G(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G(\tau)} + \omega(t, \tau) \right]$$

где σ , ε и u с соответствующими индексами — зависящие от r , θ и t компоненты тензоров напряжений, деформации и вектора перемещения соответственно в полярной системе координат (см. фиг. 1); $K(t, \tau)$ — ядро ползучести; $C(t, \tau)$ и $E(t)$, $\omega(t, \tau)$ и $G(t)$ — меры ползучести и модули упругомгновенной деформации при растяжении и сдвиге соответственно; ν — постоянное во времени значение коэффициентов поперечного сжатия для упругомгновенной деформации и деформации ползучести.

Для того, чтобы сформулировать краевые условия, введем предварительно функцию $z(t)$, равную $H(t)b^{-1}$ при $H(t) \leq b$ и единице при $H(t) \geq b$. Обозначая через τ_* момент достижения функцией $H(t)$ величины b (момент полного погружения арки в грунт), запишем ее в форме

$$z(t) = h(t - \tau_*) + H(t) b^{-1} h(\tau_* - t)$$

где $h(x)$ — функция Хевисайда.

Тогда граничные условия задачи примут вид ($\zeta(t) = \arcsin z(t)$, $\xi_k(t) = k[\pi - \zeta(t)]$):

$$r = a_0: \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0$$

$$r = b: \sigma_{rr} = -p(t), \quad \sigma_{r\theta} = 0$$

$$\theta = 0, \theta = \pi: u_\theta = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad (1.4)$$

$$p(t) = \begin{cases} \rho g [H(t) - b \sin \theta], & \xi_k(t) \leq \theta \leq \xi_k(t) + \zeta(t) \quad (k=0, 1) \\ 0, & \zeta(t) \leq \theta \leq \pi - \zeta(t) \end{cases}$$

Построим решение краевой задачи (1.1)–(1.4). Следуя [1, 2] и полагая

$$f^\circ = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t))fG^{-1} \quad (1.5)$$

на основании (1.1)–(1.4) будем иметь

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^\circ}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^\circ}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr}^\circ - \sigma_{\theta\theta}^\circ}{r} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^\circ}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^\circ}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}^\circ}{r} = 0$$

$$\sigma_{rr}^\circ = (K+1) \varepsilon_{rr} + (K-1) \varepsilon_{\theta\theta}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^\circ = (K-1) \varepsilon_{rr} + (K+1) \varepsilon_{\theta\theta} \quad (1.7)$$

$$\sigma_{r\theta}^\circ = 2\varepsilon_{r\theta}$$

$$r = a_0: \sigma_{rr}^\circ = 0, \quad \sigma_{r\theta}^\circ = 0$$

$$r = b: \sigma_{rr}^\circ = -p^\circ(t), \quad \sigma_{r\theta}^\circ = 0 \quad (1.8)$$

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi: u_\theta = 0, \quad \sigma_{r\theta}^\circ = 0$$

где также справедливы соотношения Коши (1.2).

Найдем решение (1.2), (1.6)–(1.8). Подставляя (1.2), (1.8) в (1.6) получим уравнения Ляме в полярной системе координат:

$$(K+1) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{K}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{K+2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{K+1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{K}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{K+2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0$$

Общее решение системы уравнений (1.9) в произвольной кольцевой области (время t играет роль параметра) будем искать в форме тригонометрических рядов Фурье:

$$u_r = \frac{1}{2} a_0(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r, t) \cos n\theta + b_n(r, t) \sin n\theta \quad (1.10)$$

$$u_\theta = \frac{1}{2} c_0(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r, t) \cos n\theta + d_n(r, t) \sin n\theta$$

$$a_n(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_r \cos n\theta \, d\theta, \quad c_n(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_\theta \cos n\theta \, d\theta \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$b_n(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_r \sin n\theta \, d\theta, \quad d_n(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_\theta \sin n\theta \, d\theta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

На основании соотношений (1.9) и (1.10) можно получить два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка для отыскания $a_0(r, t)$ и $c_0(r, t)$, а также две последовательности систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих по два уравнения второго порядка, для определения $a_n(r, t)$, $d_n(r, t)$ и $b_n(r, t)$, $c_n(r, t)$. Не останавливаясь на технической стороне вопроса, выпишем решения упомянутых уравнений и систем:

$$a_0(r, t) = A_{01}(t)r^{-1} + A_{02}(t)r$$

$$\begin{aligned}
a_1(r, t) &= A_{11}(t)r^{-2} + A_{21}(t) + A_{31}(t) \ln r + A_{41}(t)r^2 \\
a_n(r, t) &= A_{1n}(t)r^{-n-1} + A_{2n}(t)r^{-n+1} + A_{3n}(t)r^{n-1} + A_{4n}(t)r^{n+1} \\
b_1(r, t) &= B_{11}(t)r^{-2} + B_{21}(t) + B_{31}(t) \ln r + B_{41}(t)r^2 \\
b_n(r, t) &= B_{1n}(t)r^{-n-1} + B_{2n}(t)r^{-n+1} + B_{3n}(t)r^{n-1} + B_{4n}(t)r^{n+1} \\
c_0(r, t) &= C_{01}(t)r^{-1} + C_{02}(t)r \\
c_1(r, t) &= -B_{11}(t)r^{-2} + B_{21}(t) + B_{31}(t) [K(K+2)^{-1} + \ln r] - (3K+2)(2-K)^{-1} B_{41}(t)r^2
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}
c_n(r, t) &= -B_{1n}(t)r^{-n-1} - (Kn - 2K - 2)(Kn + 2)^{-1} B_{2n}(t)r^{-n+1} + B_{3n}(t)r^{n-1} + \\
&+ (Kn + 2K + 2)(Kn - 2)^{-1} B_{4n}(t)r^{n+1} \\
d_1(r, t) &= A_{11}(t)r^{-2} - A_{21}(t) - A_{31}(t) [K(K+2)^{-1} + \ln r] + (3K+2)(2-K)^{-1} A_{41}(t)r^2 \\
d_n(r, t) &= A_{1n}(t)r^{-n-1} + (Kn - 2K - 2)(Kn + 2)^{-1} A_{2n}(t)r^{-n+1} - A_{3n}(t)r^{n-1} - \\
&- (Kn + 2K + 2)(Kn - 2)^{-1} A_{4n}(t)r^{n+1} \\
(n &= 2, 3, \dots, \infty)
\end{aligned}$$

Здесь заметим только, что соотношения (1.10), (1.11) дают общее решение системы уравнений (1.9) в произвольной кольцевой области.

В поставленной задаче арочная конструкция загружается таким образом, что ее состояние можно соотнести с симметрично загруженным относительно двух взаимно перпендикулярных осей симметрии кольцом. Воспользовавшись указанным свойством симметрии на основании (1.10), (1.11) запишем решение краевой задачи (1.2), (1.6)–(1.8) в следующем виде:

$$u_r = f_r(a_0, r, \theta, t), \quad u_\theta = f_\theta(a_0, r, \theta, t) \tag{1.12}$$

$$\varepsilon_{rr} = f_{rr}(a_0, r, \theta, t), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = f_{\theta\theta}(a_0, r, \theta, t), \quad \varepsilon_{r\theta} = f_{r\theta}(a_0, r, \theta, t)$$

$$\sigma_{rr}^\circ = f_{rr}^\circ(a_0, r, \theta, t), \quad \sigma_{\theta\theta}^\circ = f_{\theta\theta}^\circ(a_0, r, \theta, t), \quad \sigma_{r\theta}^\circ = f_{r\theta}^\circ(a_0, r, \theta, t)$$

$$\begin{aligned}
f_r(\lambda, r, \theta, t) &= 1/2 [\lambda^2 c_{10}(t)/r + c_{40}(t)r] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda c_{1m}(t)}{2m+1} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m+1} + \right. \\
&+ \left. \frac{\lambda c_{2m}(t)}{2m-1} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m-1} + \frac{bc_{3m}(t)}{2m-1} \left(\frac{r}{b}\right)^{2m-1} + \frac{bc_{4m}(t)}{2m+1} \left(\frac{r}{b}\right)^{2m+1} \right] \cos 2m\theta \\
f_\theta(\lambda, r, \theta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda c_{1m}(t)}{2m+1} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m+1} + \frac{Km - K - 1}{Km + 1} \frac{\lambda c_{2m}(t)}{2m-1} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m-1} - \right. \\
&- \left. \frac{bc_{3m}(t)}{2m-1} \left(\frac{r}{b}\right)^{2m-1} - \frac{Km + K + 1}{Km - 1} \frac{bc_{4m}(t)}{2m+1} \left(\frac{r}{b}\right)^{2m+1} \right] \sin 2m\theta \\
f_{rr}(\lambda, r, \theta, t) &= \frac{1}{2} \left[c_{40}(t) - \frac{c_{10}(t)\lambda^2}{r^2} \right] - \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{1m}(t) \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m+2} + \right. \\
&+ c_{2m}(t) \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m} - c_{3m}(t) \left(\frac{r}{b}\right)^{2m-2} - c_{4m}(t) \left(\frac{r}{b}\right)^{2m} \left. \right] \cos 2m\theta \\
f_{\theta\theta}(\lambda, r, \theta, t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{c_{10}(t)\lambda^2}{r^2} + c_{40}(t) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{1m}(t) \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m+2} + \right. \\
&+ \left. \frac{Km - 1}{Km + 1} c_{2m}(t) \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m} - c_{3m}(t) \left(\frac{r}{b}\right)^{2m-2} - \frac{Km + 1}{Km - 1} c_{4m}(t) \left(\frac{r}{b}\right)^{2m} \right] \cos 2m\theta
\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}
f_{r\theta}(\lambda, r, \theta, t) &= - \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{1m}(t) \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m+2} + \frac{Km}{Km+1} c_{2m}(t) \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m} + \right. \\
&\quad \left. + c_{3m}(t) \left(\frac{r}{b}\right)^{2m-2} + \frac{Km}{Km-1} c_{4m}(t) \left(\frac{r}{b}\right)^{2m} \right] \sin 2m\theta \\
f_{rr}(\lambda, r, \theta, t) &= Kc_{40}(t) - \frac{c_{10}(t)\lambda^2}{r^2} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{1m}(t) \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m+2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{K(m+1)}{Km+1} c_{2m}(t) \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m} - c_{3m}(t) \left(\frac{r}{b}\right)^{2m-2} - \frac{K(m-1)}{Km-1} c_{4m}(t) \left(\frac{r}{b}\right)^{2m} \right] \cos 2m\theta \\
f_{\theta\theta}(\lambda, r, \theta, t) &= Kc_{40}(t) + \frac{c_{10}(t)\lambda^2}{r^2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{1m}(t) \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m+2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{K(m-1)}{Km+1} c_{2m}(t) \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m} - c_{3m}(t) \left(\frac{r}{b}\right)^{2m-2} - \frac{K(m+1)}{Km-1} c_{4m}(t) \left(\frac{r}{b}\right)^{2m} \right] \cos 2m\theta \\
f_{r\theta}(\lambda, r, \theta, t) &= - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{1m}(t) \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m+2} + \frac{Km}{Km+1} c_{2m}(t) \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{2m} + \right. \\
&\quad \left. + c_{3m}(t) \left(\frac{r}{b}\right)^{2m-2} + \frac{Km}{Km-1} c_{4m}(t) \left(\frac{r}{b}\right)^{2m} \right] \sin 2m\theta
\end{aligned}$$

Решение в форме (1.12), (1.13) удовлетворяет краевым условиям на торцах арки при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Таким образом, остается удовлетворить только граничным условиям при $r = a_0$ и $r = b$.

Разложим нагрузку, действующую на арку, в тригонометрический ряд Фурье (напомним о соответствии состояний арки и симметрично загруженного кольца):

$$p(t) = 2\pi^{-1} \rho g b \left[F_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} F_m(t) \cos 2m\theta \right] \quad (1.14)$$

$$F_0(t) = H(t) b^{-1} \arcsin z(t) + \sqrt{1 - z^2(t)} - 1$$

$$F_m(t) = G_m(t) + H(t) b^{-1} W_m(t)$$

$$G_m(t) = \frac{2}{4m^2 - 1} + \frac{T_{2m+1}(\sqrt{1 - z^2(t)})}{2m + 1} - \frac{T_{2m-1}(\sqrt{1 - z^2(t)})}{2m - 1}$$

$$W_m(t) = [1 - T_{2m}^2(\sqrt{1 - z^2(t)})]^{1/2} / m$$

где $T_m(x)$ — полином Чебышева первого рода степени m , причем $T_{2m}(0) = (-1)^m$, $T_{2m+1}(0) = 0$; $T_m(1) = 1$ ($m = 0, 1, \dots$) [3].

Подставляя (1.12)–(1.14) в условия (1.8) при $r = a_0$ и $r = b$, с учетом соотношения $p^\circ(t) = (I - L(\tau_0, t))p(t)G^{-1}$ получим последовательность систем алгебраических уравнений (с параметром t) для определения функций $c_{10}(t)$, $c_{40}(t)$ и $c_{im}(t)$ ($i = 1, \dots, 4$; $m = 1, 2, \dots, \infty$). Опуская промежуточные выкладки, приведем итоговый результат решения краевой задачи (1.2), (1.6)–(1.8) для радиального и углового перемещений арки. Будем иметь

$$u_r = -Db(I - L(\tau_0, t)) [F_0(t)\Phi_r(r, \alpha_0) - \Psi_r(r, \theta, F_m(t), \alpha_0)]$$

$$u_\theta = Db(I - L(\tau_0, t))\Psi_\theta(r, \theta, F_m(t), \alpha_0)$$

$$\Phi_r(r, \lambda) = [\lambda^2 b/r + r/(Kb)](1 - \lambda^2)^{-1}$$

$$\Psi_r(r, \theta, \eta, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta \Delta_m^{-1}(\lambda) \left[\frac{\lambda \Delta_{1m}(\lambda)}{2m+1} \left(\frac{\lambda b}{r}\right)^{2m+1} - \right. \\ \left. - (m+K^{-1}) \frac{\lambda \Delta_{2m}(\lambda)}{2m-1} \left(\frac{\lambda b}{r}\right)^{2m-1} - \frac{\Delta_{3m}(\lambda)}{2m-1} \left(\frac{r}{b}\right)^{2m-1} + \right. \\ \left. + (m-K^{-1}) \frac{\Delta_{4m}(\lambda)}{2m+1} \left(\frac{r}{b}\right)^{2m+1} \right] \cos 2m\theta \quad (1.15)$$

$$\Psi_\theta(r, \theta, \eta, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta \Delta_m^{-1}(\lambda) \left[\frac{\lambda \Delta_{1m}(\lambda)}{2m+1} \left(\frac{\lambda b}{r}\right)^{2m+1} - \right. \\ \left. - (m-1-K^{-1}) \frac{\lambda \Delta_{2m}(\lambda)}{2m-1} \left(\frac{\lambda b}{r}\right)^{2m-1} + \frac{\Delta_{3m}(\lambda)}{2m-1} \left(\frac{r}{b}\right)^{2m-1} - \right. \\ \left. - (m+1+K^{-1}) \frac{\Delta_{4m}(\lambda)}{2m+1} \left(\frac{r}{b}\right)^{2m+1} \right] \sin 2m\theta$$

$$D = \pi^{-1} \rho g G^{-1} b, \quad \alpha_0 = a_0 b^{-1}$$

$$\Delta_m(\lambda) = \lambda^{8m} - 4m^2 \lambda^{4m+2} + (8m^2 - 2) \lambda^{4m} - 4m^2 \lambda^{4m-2} + 1$$

$$\Delta_{1m}(\lambda) = m \lambda^{2m-2} [2m(1-\lambda^2) - \lambda^{4m} + 1]$$

$$\Delta_{2m}(\lambda) = \lambda^{2m-2} [2m(1-\lambda^2) + \lambda^2(1-\lambda^{4m})]$$

$$\Delta_{3m}(\lambda) = m [1 - \lambda^{4m} + 2m \lambda^{4m} (1 - \lambda^2)]$$

$$\Delta_{4m}(\lambda) = 1 - \lambda^{4m} + 2m \lambda^{4m-2} (1 - \lambda^2)$$

Заметим, что истинные напряжения, возникающие в арке, связаны с величинами σ_{rr}^0 , $\sigma_{\theta\theta}^0$ и $\sigma_{r\theta}^0$ соотношениями вида (1.5). Поэтому, решив (1.2), (1.6) — (1.8), восстановим напряжения σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ по формуле (индексы опущены) [1, 2]:

$$\sigma(r, \theta, t) = G(t) \left[\sigma^0(r, \theta, t) + \int_{\tau_0}^t \sigma^0(r, \theta, \tau) R(t, \tau) d\tau \right]$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$.

Таким образом, напряженное состояние арочной конструкции вплоть до момента начала ее наращивания полностью определяется следующими выражениями:

$$\sigma_{rr} = -2\pi^{-1} \rho g b [F_0(t) \Phi_{rr}(r, \alpha_0) + \Psi_{rr}(r, \theta, F_m(t), \alpha_0)]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -2\pi^{-1} \rho g b [F_0(t) \Phi_{\theta\theta}(r, \alpha_0) - \Psi_{\theta\theta}(r, \theta, F_m(t), \alpha_0)]$$

$$\sigma_{r\theta} = -2\pi^{-1} \rho g b \Psi_{r\theta}(r, \theta, F_m(t), \alpha_0)$$

$$\Phi_{rr}(r, \lambda) = [1 - (\lambda b r^{-1})^2] (1 - \lambda^2)^{-1}$$

$$\Psi_{rr}(r, \theta, \eta, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta \Delta_m^{-1}(\lambda) [\Delta_{1m}(\lambda) (\lambda b/r)^{2m+2} - (m+1) \Delta_{2m}(\lambda) (\lambda b/r)^{2m} + \\ + \Delta_{3m}(\lambda) (r/b)^{2m-2} - (m-1) \Delta_{4m}(\lambda) (r/b)^{2m}] \cos 2m\theta$$

$$\Phi_{\theta\theta}(r, \lambda) = [1 + (\lambda b r^{-1})^2] (1 - \lambda^2)^{-1} \quad (1.16)$$

$$\Psi_{\theta\theta}(r, \theta, \eta, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta \Delta_m^{-1}(\lambda) [\Delta_{1m}(\lambda) (\lambda b/r)^{2m+2} - (m-1) \Delta_{2m}(\lambda) (\lambda b/r)^{2m} + \\ + \Delta_{3m}(\lambda) (r/b)^{2m-2} - (m+1) \Delta_{4m}(\lambda) (r/b)^{2m}] \cos 2m\theta$$

$$\Psi_{r\theta}(r, \theta, \eta, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta \Delta_m^{-1}(\lambda) [\Delta_{1m}(\lambda) (\lambda b/r)^{2m+2} - m \Delta_{2m}(\lambda) (\lambda b/r)^{2m} - \Delta_{3m}(\lambda) (r/b)^{2m-2} + m \Delta_{4m}(\lambda) (r/b)^{2m}] \sin 2m\theta$$

Соотношения (1.15)—(1.16) дают решение исходной краевой задачи (1.1)—(1.4) (см. [1, 2]) и описывают напряженно-деформированное состояние арочной конструкции на интервале времени $[\tau_0, \tau_1]$.

Остановимся на некоторых характерных особенностях полученного решения. Заметим, что напряженное состояние арки не зависит от свойств ее материала и полностью определяется геометрическими размерами конструкции, высотой слоя и плотностью материала грунта. Оно возникает как в упругих, так и в вязкоупругих арках и не изменяется при исследовании случая их обобщенного плоского напряженного состояния вместо плоской деформации.

В отличие от напряжений перемещения арочной конструкции зависят от упругих и реологических свойств ее материала, а также от типа плоской задачи. Так, при изучении случая обобщенного плоского напряженного состояния арки в соотношениях для перемещений (1.15) величину K следует всюду заменить на $(3K-1)/(K+1)$.

Решение для упругой нерастущей арки в случае, когда она полностью находится под слоем сыпучего грунта ($H(t) = H_0 \geq b$), приведено в [4].

2. О деформировании арки после начала процесса ее непрерывного наращивания. Изучим напряженно-деформированное состояние заглубленной арочной конструкции на интервале времени $[\tau_1, \tau_2]$, а также — $[\tau_2, T < \infty]$. Особо отметим то обстоятельство, что момент полного погружения арки в грунт τ , может принимать любое значение от τ_0 до T , т. е. наращивание может начаться и даже закончиться до полного погружения арки.

Исследуем конструкцию в процессе ее непрерывного наращивания ($\tau_1 \leq t \leq \tau_2$). Возьмем уравнения равновесия в форме (1.1) и уравнения состояния в форме (1.3), где заменим всюду τ_0 на величину $\tau_0(r)$, определяемую формулой

$$\tau_0(r) = \begin{cases} \tau_0, & r \geq a_0 \\ \tau^*(r), & a(t) \leq r < a_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь $\tau^*(r)$ — момент присоединения частиц с координатой r к растущей арке, причем $\tau^*(a(\tau)) = \tau$. Возникающий при такой замене новый интегральный оператор Вольтерра можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0(r), t))^{-1} f(t) &= (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau^0(r), t)) f(t) = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau^0(r), t)) f(t) - [1 - h(a_0 - r)] \mathbf{L}'(\tau_0, \tau_1) f(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{L}'(\tau_0, \tau_1) f(t) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\tau) K(t, \tau) d\tau$$

$$\tau^0(r) = \tau_1 + h(a_0 - r) [\tau^*(r) - \tau_1]$$

В исследуемом случае непрерывного наращивания деформируемого тела соотношения (1.2) следует взять в продифференцированной по t форме (производные по времени обозначим точками), а в граничных условиях (1.4) заменить условие при $r = a_0$ на условие ненапряженности приращиваемых элементов на поверхности роста

$$r = a(t): \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0, \quad t = \tau^*(r) \quad (2.3)$$

На основании [1, 2] сформулированную выше начально-краевую задачу

непрерывного наращивания арочной конструкции с учетом (2.1)—(2.3) можно привести к следующему эквивалентному виду:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{\circ\circ}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{\circ\circ}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr}^{\circ\circ} - \sigma_{\theta\theta}^{\circ\circ}}{r} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{\circ\circ}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{\circ\circ}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}^{\circ\circ}}{r} = 0$$

$$\varepsilon_{rr}^{\circ} = \frac{\partial u_r^{\circ}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{\circ} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{\circ}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{\circ}}{r} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{r\theta}^{\circ} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{\circ}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}^{\circ}}{\partial r} + \frac{u_r^{\circ}}{r} \right)$$

$$\sigma_{rr}^{\circ\circ} = (K + 1) \varepsilon_{rr}^{\circ} + (K - 1) \varepsilon_{\theta\theta}^{\circ} \quad (2.6)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{\circ\circ} = (K - 1) \varepsilon_{rr}^{\circ} + (K + 1) \varepsilon_{\theta\theta}^{\circ}$$

$$\sigma_{r\theta}^{\circ\circ} = 2\varepsilon_{r\theta}^{\circ} \quad (2.7)$$

$$r = a(t): \sigma_{rr}^{\circ\circ} = \sigma_{r\theta}^{\circ\circ} = 0, \quad \tau = \tau^*(r)$$

$$r = b: \sigma_{rr}^{\circ\circ} = -p^{\circ}(t), \quad \sigma_{r\theta}^{\circ\circ} = 0$$

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi: u_{\theta}^{\circ} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{\circ\circ} = 0$$

$$p^{\circ}(t) = p^{\circ}(t)G^{-1}(t) + \int_{\tau_0}^t p^{\circ}(\tau) \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t} d\tau + p(\tau_0) \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t}$$

$$\varphi^{\circ} = (I - L(\tau_0(r), t)) \varphi G^{-1}$$

Если краевая задача (2.4)—(2.7) решена, то истинные напряжения и перемещения арочной конструкции могут быть найдены по формулам (см. также [1, 2]):

$$r \geq a_0: \sigma(r, \theta, t) = G(t) \left\{ \frac{\sigma(r, \theta, \tau_0)}{G(\tau_0)} \left[1 + \int_{\tau_0}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \right. \quad (2.8)$$

$$\left. + \int_{\tau_0}^t \left[\sigma^{\circ\circ}(r, \theta, \tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} \sigma^{\circ\circ}(r, \theta, s) ds R(t, \tau) \right] d\tau \right\}$$

$$u(r, \theta, t) = u(r, \theta, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t u^{\circ}(r, \theta, \tau) d\tau$$

$$a(t) \leq r < a_0: \sigma(r, \theta, t) = G(t) \left\{ \int_{\tau^*(r)}^t \left[\sigma^{\circ\circ}(r, \theta, \tau) + \int_{\tau^*(r)}^{\tau} \sigma^{\circ\circ}(r, \theta, s) ds R(t, \tau) \right] d\tau \right\} \quad (2.9)$$

$$u(r, \theta, t) = \int_{\tau^*(r)}^t u^{\circ}(r, \theta, \tau) d\tau$$

где опущены индексы r и θ при σ и u .

Найдем решение краевой задачи (2.4)—(2.7). На основании исследований, проведенных ранее (см. (1.2), (1.6), (1.7)), запишем общее решение (2.4)—(2.6) в форме (см. (1.13)):

$$u_r^* = f_r(a(t), r, \theta, t), \quad u_\theta^* = f_\theta(a(t), r, \theta, t) \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_r^* = f_{rr}(a(t), r, \theta, t), \quad \varepsilon_{\theta\theta}^* = f_{\theta\theta}^*(a(t), r, \theta, t), \quad \varepsilon_{r\theta}^* = f_{r\theta}^*(a(t), r, \theta, t)$$

$$\sigma_r^* = f_r^*(a(t), r, \theta, t), \quad \sigma_{\theta\theta}^* = f_{\theta\theta}^*(a(t), r, \theta, t), \quad \sigma_{r\theta}^* = f_{r\theta}^*(a(t), r, \theta, t)$$

Аналогично тому, как было прежде, решение в форме (2.10) автоматически удовлетворяет краевым условиям (2.7) при $\theta=0$ и $\theta=\pi$. Для того, чтобы удовлетворить оставшимся условиям разложим $p^{**}(t)$ в тригонометрический ряд Фурье (см. (1.14)):

$$p^{**}(t) = 2\tau^{-1}\rho gbG^{-1} \left[F_0^*(t) + \sum_{m=1}^{\infty} F_m^*(t) \cos 2m\theta \right] \quad (2.11)$$

$$F_0^*(t) = V(t) \arcsin z(t) + \Omega(t, \tau_0) (\sqrt{1 - z^2(t)} - 1)$$

$$F_m^*(t) = \Omega(t, \tau_0) G_m(t) + V(t) W_m(t)$$

$$V(t) = \left[H^*(t) + \int_{\tau_0}^t H^*(\tau) \Omega(t, \tau) d\tau + H(\tau_0) \Omega(t, \tau_0) \right] b^{-1}$$

$$\Omega(t, \tau) = G(t) \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t}$$

Подставляя теперь (2.10) и (2.11) в граничные условия (2.7), определим неизвестные функции времени и, таким образом, построим решение краевой задачи (2.4)–(2.7). Окончательные выражения для искомых функций имеют вид (см. (1.15), (1.16)):

$$u_r^* = -Db [F_0^*(t) \Phi_r(r, \alpha(t)) - \Psi_r(r, \theta, F_m^*(t), \alpha(t))] \quad (2.12)$$

$$u_\theta^* = Db \Psi_\theta(r, \theta, F_m^*(t), \alpha(t))$$

$$\sigma_r^* = -2D [F_0^*(t) \Phi_{rr}(r, \alpha(t)) + \Psi_{rr}(r, \theta, F_m^*(t), \alpha(t))] \quad (2.12)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^* = -2D [F_0^*(t) \Phi_{\theta\theta}(r, \alpha(t)) - \Psi_{\theta\theta}(r, \theta, F_m^*(t), \alpha(t))] \quad (2.12)$$

$$\sigma_{r\theta}^* = -2D \Psi_{r\theta}(r, \theta, F_m^*(t), \alpha(t)), \quad \alpha(t) = a(t)b^{-1}$$

Соотношения (2.8), (2.9) и (2.12) дают полное решение задачи на интервале времени $[\tau_1, \tau_2]$.

Осталось исследовать состояние заглубленной арки для $t \in [\tau_2, T]$, когда рост ее прекратился ($a(\tau_2) = a_1$). Единственным отличием новой краевой задачи от краевой задачи наращивания является условие $r = a_1$; $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0$, которое заменяет условие на поверхности роста (2.3). Решение задачи при $t \in [\tau_2, T]$ можно получить из предыдущего, заменив в (2.12) функцию $\alpha(t)$ на $\alpha_1 = a_1 b^{-1}$ и воспользовавшись формулами (2.8) и (2.9). На этом построение решения задачи о наращивании заглубленной арочной конструкции завершено.

Остановимся на некоторых свойствах функций и рядов, определяющих решения. Можно показать, что полученные выше в разд. 1 и 2 ряды Фурье сходятся регулярно к непрерывным по r и θ и, возможно, к кусочно-непрерывным по t функциям (см., например, [5]). Возможность появления разрывов первого

рода по t определяется наличием таковых у функции $H(t)$. В этом случае дифференцирование по времени следует понимать в обобщенном смысле [6] (см., например, (2.11)).

Свойства непрерывности функций, к которым сходятся ряды, не эквивалентны свойствам непрерывности напряжений и перемещений арки. Если для основной арки, которую предполагается наращивать, напряжения и перемещения непрерывны как по θ , так и по r , то в растущей арке на границе раздела основного и дополнительного тел, например, существует разрыв по r (только при $\tau_0 = \tau_1$ и $H(\tau_0) = 0$ такого разрыва нет), обусловленный особенностями процесса наращивания (см. также (2.8), (2.9)).

Аналогично проделанному выше можно рассмотреть процесс кусочно-непрерывного наращивания арочной конструкции. При этом, если внутренняя поверхность арки не загружается, не требуется никаких дополнительных исследований [1, 2]. Следует только аккуратно использовать соотношения (2.8)–(2.12) при заданном законе роста $\alpha(t)$. Полученные в итоге функции напряжений и перемещений будут всюду непрерывны по θ и кусочно-непрерывны по r и t . Причем разрывы первого рода по t возникнут в точках t_k , где $H(t)$ претерпевает скачки, а разрывы первого рода по r появятся в точках начала и остановки процесса наращивания и в точках $a(t_k)$ при $t_k \in [\tau_1, \tau_2]$.

Наконец, отметим тот факт, что при наращивании арки в течение длительного времени после остановки засыпки возникнет ситуация, при которой взаимным влиянием конструкции и вновь приращиваемых ненапряженных ее элементов можно будет пренебречь (см. также [1, 2, 7]).

3. Численный пример. Перейдем к расчету конкретной заглубленной арочной конструкции, изготовленной из бетона с постоянными модулем сдвига G , коэффициентом Пуассона ν и мерой ползучести при сдвиге в форме [7, 8]:

$$\omega(t, \tau) = (D_0 + Fe^{-\beta\tau}) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})$$

$$D_0G = 0,251, \quad FG = 1,818, \quad \gamma = 0,06 \text{ сут}^{-1}, \quad \beta = 0,031 \text{ сут}^{-1}, \quad \nu = 0,1$$

Будем считать, что арка изготовлена в нулевой момент времени и в момент $\tau_0 = 10$ суток засыпана слоем сыпучего грунта высоты $H(\tau_0) = H_0$. В момент времени $\tau_1 = \tau_0$ начинается непрерывное наращивание арки с постоянной скоростью, которое продолжается до момента τ_2 , причем толщина стенки арки увеличивается в χ раз, а $H(t) = H(\tau_0)$. Процесс наращивания в этом случае описывается следующими соотношениями:

$$\alpha(t) = 1 - [1 - \alpha_0] [(\chi - 1)t + \tau_2 - \chi\tau_1] (\tau_2 - \tau_1)^{-1}$$

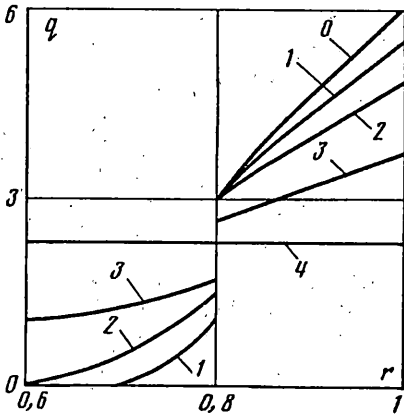
$$\tau^*(r) = [(1 - r/b)(\tau_2 - \tau_1)(1 - \alpha_0)^{-1} + \chi\tau_1 - \tau_2] (\chi - 1)^{-1}$$

$$s = \frac{(\chi - 1)\tau_0}{\tau_2 - \tau_1} = \frac{\chi - 1}{\tau_2\tau_0^{-1} - 1}$$

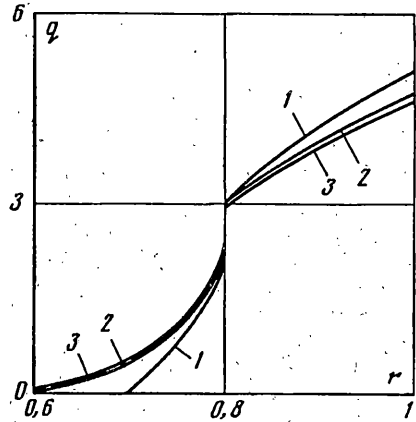
где s характеризует скорость изменения относительной толщины стенки арки или скорость роста.

Исследуем эволюцию напряженно-деформированного состояния арки в зависимости от скорости наращивания s при $H_0 = H_0 b^{-1} = 10$, $\alpha_0 = 0,8$, $\chi = 2$. Данный набор параметров определяет задачу, в которой стенка арки, засыпанной на глубину ее десяти радиусов, увеличивается за время наращивания вдвое.

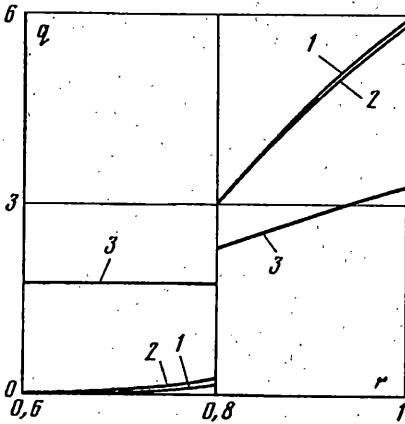
На представленных ниже графиках приведены зависимости $q' = -0,1\sigma_{\theta\theta}(r, 0, t)/(\rho gb)$ от $r' = rb^{-1}$ при разных значениях t и s , а также $u' = u_r(b, \pi/2, t)G/(\rho gb^2)$ от $t' = t\tau_0^{-1}$ ($\tau_0' = 1$, $\tau_1' = \tau_1\tau_0^{-1}$, $\tau_2' = \tau_2\tau_0^{-1}$) при разных



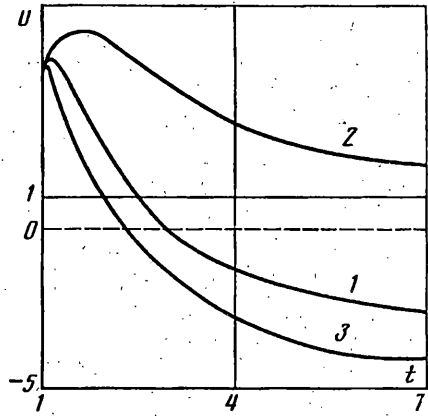
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

s. Здесь q' определяет распределение контактных напряжений на торцах арки, а u' — перемещение ее верхней точки (штрихи далее опустим).

На фиг. 2 показаны распределения контактных напряжений на торцах арки в процессе ее наращивания со скоростью $s=1$: (0) — в начальный момент времени, (1) — в момент достижения стенкой половины от заданной для наращивания толщины ($t=\tau_{1/2}=1,5$), (2) — в момент завершения наращивания ($t=\tau_2=2$), (3) — предельное распределение напряжений при больших значениях времени. На фиг. 2 для сравнения приведено распределение контактных давлений на торцах арки фиксированной толщины, равной толщине наращиваемой арки после завершения работ (4). Распределение (4) от времени не зависит и близко к равномерному.

На фиг. 3 даны контактные давления при наращивании арки со скоростью $s=0,2$. Начальное распределение показано на фиг. 2. Распределения (1)—(3) соответствуют аналогичным на фиг. 2 с той только разницей, что толщина стенки достигает половины от заданной для наращивания величины при $t=\tau_{1/2}=3,5$, а наращивание прекращается при $t=\tau_2=6$. Можно сравнить эти кривые и с кривой (4) на фиг. 2. Видно, что уменьшение скорости наращивания приводит к более неравномерному распределению контактных напряжений на торцах арки, а также к ситуации когда большая часть добавленного материала практически не несет нагрузки.

Эволюция контактных напряжений при наращивании со скоростью $s=10$ показана на фиг. 4, где распределения (1)—(3) соответствуют аналогичным на

фиг. 2 и фиг. 3, только для (1) — $\tau_{12} = 1,05$, а для (2) — $\tau_2 = 1,1$. Можно заметить, что увеличение скорости наращивания на начальном этапе приводит к ситуации, когда добавленный материал слабо загружен (см. (1) и (2)). Однако, чем выше скорость, тем более равномерным становится распределение напряжений с течением времени (ср. (3) и (4) на фиг. 2).

Отметим тот интересный факт, что история деформирования арки вплоть до момента начала ее наращивания никак не влияет на последующие значения напряжений. Так, можно было бы в рассматриваемой конкретной задаче, как угодно изменяя $H(t)$, довести высоту слоя сыпучего грунта до $H_0 = 10b$, в любой последующий момент времени начать наращивание со скоростью $s = 1$, $s = 0,2$ или $s = 10$ и получить соответственно распределения, приведенные на фиг. 2 — фиг. 4.

Из всех возможных напряжений в арке контактные напряжения на торце были выбраны для числового анализа не только потому, что интересны сами по себе и обладают всеми характерными чертами напряжений в растущем теле (имеют разрывы и т. п.). Эти напряжения, в отличие от других, являются еще и индикатором корректности постановки задачи. Так, получив при некоторых сочетаниях параметров растягивающие напряжения в контакте, можно с уверенностью утверждать, что решать задачу в данной постановке и при данных значениях параметров нельзя. В нашем примере оказалось, что при $H_* = 10$ и $\alpha_0 = \alpha_* > 0,9088$ происходит отслаивание торца от основания у его внутреннего края.

На фиг. 5 представлены изменения перемещения вершины арки по времени при разных скоростях ее наращивания: (1) — $s = 1$, (2) — $s = 0,2$, (3) — $s = 10$. Такой, достаточно сложный, характер функции перемещения вершины арки (когда она возрастает, затем убывает и даже меняет знак) можно объяснить наличием нескольких тенденций в ее поведении. Первой тенденцией является тенденция к увеличению абсолютного значения перемещения за счет ползучести материала конструкции. В самом деле, если рассмотреть нерастущую арку под действием слоя грунта, то исследуемое перемещение будет с течением времени увеличиваться по абсолютной величине и при постоянной высоте слоя (см. (1.15)). Кроме того, можно найти такой набор параметров H_* , α_0 и K , что перемещение вершины равно нулю при любом t . Если взять $H_* = 10$ и $K = 1,25$, то такое состояние достигается при $\alpha_0 = \alpha^* = 0,7764$. В случае, когда $\alpha_0 > \alpha^*$, перемещение вершины нерастущей арки положительно и монотонно возрастает, а для $\alpha_0 < \alpha^*$, оно отрицательно и монотонно убывает.

Здесь можно отметить, что в нашей задаче перемещение вершины арки в случае, если она не наращивается, положительно и возрастает по t , так как $\alpha_0 = 0,8$. В то же время картина для перемещения верхней точки нерастущей арки, имеющей одинаковую форму с аркой, наращивание которой завершено, очевидно противоположна, так как для нее $\alpha_0 = 0,6$.

Другими определяющими исследуемое перемещение тенденциями являются тенденции к его возрастанию при $\alpha(t) > \alpha^*$ и к убыванию при $\alpha(t) < \alpha^*$ за счет наращивания. Следует заметить, что w — монотонно убывающая по t функция, обращающаяся в нуль при $\alpha(t) = \alpha^*$ (см. (2.8)).

Взаимодействие указанных тенденций и приводит к поведению перемещения, графически изображенному на фиг. 5. Более того, на основании проведенных исследований можно сделать и некоторые качественные выводы. Пусть толщина стенки арки непрерывно изменяется в процессе наращивания так, что $\alpha^* \leq \alpha(t) \leq \alpha_*$. Тогда при прочих неизменных параметрах задачи можно утверждать, что перемещение вершины арки является положительной и монотонно возрастающей функцией времени. Если же изменению толщины соответствует изменение $\alpha(t)$ в пределах от α^* до нуля, то соответствующее перемещение отрицательно и убывает с течением времени. В случае, когда интервал изменения

$\alpha(t)$ включает точку α^* , возрастание перемещения вершины может смениться его убыванием и переходом в область отрицательных значений, причем такой процесс тем интенсивнее, чем больше скорость наращивания (см. фиг. 5).

В заключение сделаем акцент на качественном отличие явлений, характерных для растущей и неизменяемой арочной конструкций.

Авторы благодарят Н. Х. Арутюняна за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В., Наумов В. Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 175 с.
2. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи механики растущих тел//ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 145—158.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
4. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М.: Высш. школа, 1977. 215 с.
5. Толстов Г. П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980. 381 с.
6. Гельфанд И. Н., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
7. Манжиров А. В. О кручении растущего цилиндра жестким штампом//ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 842—850.
8. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 323 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.VII.1992