МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1992

УДК 531.53

© 1992 г. С. А. АГАФОНОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И АВТОКОЛЕБАНИЯХ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА С УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Задача об устойчивости равновесия двойного маятника с линейными упругими элементами в шарнирах под действием следящей силы рассматривалась в [1]. При анализе устойчивости равновесия по первому приближению в [1] было найдено, что критическая нагрузка при наличии вязкого трения может быть меньше критической нагрузки, вычисленной при отсутствии трения. Это явление было определено как явление потери устойчивости равновесия неконсервативной системы от введения сил трения. В дальнейшем исследованию этого эффекта были посвящены [2—9]. Во всех отмеченных работах задача устойчивости решалась исходя из уравнений первого приближения. Указанное явление потери устойчивости равновесия сохраняется и при нелинейном законе трения [10]. Обзору полученных результатов о явлении дестабилизации в неконсервативных системах посвящена [11].

В настоящей работе устойчивость равновесия двойного маятника при отсутствии сил трения исследуется в нелинейной постановке. В области выполнения необходимых условий устойчивости равновесия доказана устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий, кроме, быть может, двух значений величины следящей силы. При учете сил трения доказывается существование устойчивого автоколебательного режима, возникающего при переходе через критическое значение нагрузки.

1. Устойчивость равновесия при отсутствии трения. Рассмотрим двойной маятник, представляющий собой систему двух невесомых стержней AB и BC длиной l. Шарниры A, B обладают линейной жесткостью с коэффициентом a. В шарнире B и на свободном конце C расположены две одинаковые массы m. Трение в шарнирах A и B отсутствует ($b=0$). На свободный конец маятника C действует сила P, направление которой во все время движения совпадает с направлением стержня BC. Положение маятника определяется двумя углами φ_1, φ_2 (см. фигуру). Уравнения движения маятника

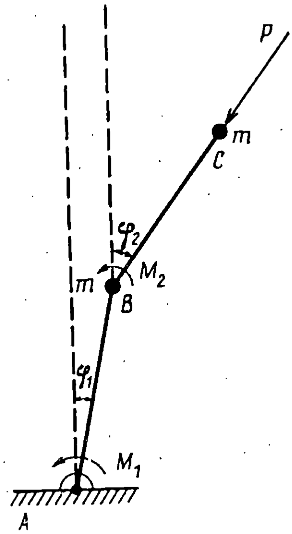
$$\frac{d}{dt}(\partial L/\partial\dot\varphi_i) - \partial L/\partial\varphi_i = Q_{\varphi_i}, \quad i = 1, 2$$

$$L = ml^2\dot\varphi_1^2 + {}^1\!/\!_2 ml^2 \,[\dot\varphi_2^2 + 2\dot\varphi_1\dot\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] - {}^1\!/\!_2 a\varphi_1^2 - {}^1\!/\!_2 a(\varphi_2 - \varphi_1)^2,$$

$$Q_{\varphi_1} = Pl \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \quad Q_{\varphi_2} = 0$$

приводятся к виду

$$\begin{gathered} 2ml^2\ddot\varphi_1 + ml^2\ddot\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + ml^2\dot\varphi_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 2a\varphi_1 - a\varphi_2 - Pl\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ ml^2\ddot\varphi_2 + ml^2\ddot\varphi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - ml^2\dot\varphi_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + a\varphi_2 - a\varphi_1 = 0 \qquad (1.1) \end{gathered}$$



Уравнения движения (1.1) допускают решение

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0 \tag{1.2}$$

устойчивость которого и исследуется. Заметим, что разложения нелинейных слагаемых, входящих в уравнения (1.1), в окрестности решения (1.2) содержат члены только нечетных степеней.

Уравнения (1.1) приведем к безразмерному виду с помощью подстановки $\tau = l^{-1} (a/m)^{1/2} t$. Разрешая относительно вторых производных, уравнения возмущенного движения приведем к виду

$$\begin{gathered}\varphi_1'' + (3-p)\varphi_1 + (p-2)\varphi_2 + (\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2) + 1/6\,(p-3)(\varphi_1 - \varphi_2)^3 - \\ - (3-p)\varphi_1(\varphi_1-\varphi_2)^2 - (p-2)\varphi_2(\varphi_1-\varphi_2)^2 + \ldots = 0\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}\varphi_2'' + (p-4)\varphi_1 + (3-p)\varphi_2 - (\varphi_1-\varphi_2)(\varphi_2'^2 + 2\varphi_1'^2) + \\ + (5-p)\varphi_1(\varphi_1-\varphi_2)^2 - 1/2\,(7-2p)\varphi_2(\varphi_1-\varphi_2)^2 - 2/3\,p\,(\varphi_1-\varphi_2)^3 + \ldots = 0, \quad p = Pl/a\end{gathered}$$

Здесь штрих обозначает производную по τ, а многоточие — совокупность членов не ниже пятого порядка. Характеристическое уравнение системы (1.3) имеет вид $\lambda^4 + (6-2p)\lambda^2 + 1 = 0$ и при $p < 2$ $(P < 2a/l)$ обладает двумя парами чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, где $\omega_1 = (3 - p + (p^2 - 6p + 8)^{1/2})^{1/2}$, $\omega_2 = (3 - p - (p^2 - 6p + 8)^{1/2})^{1/2}$.

Замена переменных

$$\begin{gathered}\varphi_1 = (p-2)(x_1 + x_2), \quad \varphi_2 = (\omega_1^2 - 3 + p)x_1 + (\omega_2^2 - 3 + p)x_2 \\ \varphi_1' = (p-2)(x_1' + x_2'), \quad \varphi_2' = (\omega_1^2 - 3 + p)x_1' + (\omega_2^2 - 3 + p)x_2'\end{gathered} \tag{1.4}$$

приводит систему уравнений (1.3) к виду

$$\begin{gathered}x_1'' + \omega_1^2 x_1 - (p-2)^{-1}(\omega_1^2 - \omega_2^2)^{-1}(\omega_2^2 - 3 + p)\Phi_1 + \\ + (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{-1}\Phi_2 + \ldots = 0\end{gathered} \tag{1.5}$$

$$x_2'' + \omega_2^2 x_2 + (p-2)^{-1}(\omega_1^2 - \omega_2^2)^{-1}(\omega_1^2 - 3 + p)\Phi_1 - (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{-1}\Phi_2 + \ldots = 0$$

$$\begin{gathered}\Phi_1 = (\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2) - 1/6\,(3-p)(\varphi_1-\varphi_2)^3 - (3-p)\varphi_1(\varphi_1-\varphi_2)^2 - \\ - (p-2)\varphi_2(\varphi_1-\varphi_2)^2\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\Phi_2 = -(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_2'^2 + 2\varphi_1'^2) + (5 - p)\varphi_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 - \tfrac{1}{2}(7 - 2p)\varphi_2(\varphi_1 - \varphi_2)^2 - \\ - \tfrac{2}{3}p(\varphi_1 - \varphi_2)^3$$

В (1.6) переменные $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'$ равны выражениям, определяемым формулами (1.4). Далее, с помощью замены $x_1 = \tfrac{1}{2}(u_1 + v_1)$, $x_2 = \tfrac{1}{2}(u_2 + v_2)$, $x_1' = \tfrac{1}{2}i\omega_1(u_1 - v_1)$, $x_2' = \tfrac{1}{2}i\omega_2(u_2 - v_2)$, $i^2 = -1$ систему уравнений (1.5) приведем к виду

$$\begin{aligned} u_1' &= i\omega_1 u_1 - i\omega_1^{-1}[(p-2)^{-1}(\omega_1^2 - \omega_2^2)^{-1}(\omega_2^2 - 3 + p)\Phi_1 - (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{-1}\Phi_2] + \ldots \\ u_2' &= i\omega_2 u_2 - i\omega_2^{-1}[-(p-2)^{-1}(\omega_1^2 - \omega_2^2)^{-1}(\omega_1^2 - 3 + p)\Phi_1 + (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{-1}\Phi_2] + \ldots \end{aligned} \tag{1.7}$$

Уравнения для комплексно сопряженных переменных $v_1 = \bar{u}_1$, $v_2 = \bar{u}_2$ не выписаны. Необходимо отметить следующее обстоятельство, в исходных уравнениях возмущенного движения переменные $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ входят в квадратах. Поэтому все коэффициенты при нелинейных членах в уравнениях (1.7) чисто мнимые [12].

Пусть $\omega_1 \neq 3\omega_2$. Тогда с помощью полиномиального преобразования

$$u_1 = y_1 + \Psi_3(y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2), \quad u_2 = y_2 + \chi_3(y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) \tag{1.8}$$

(Ψ_3, χ_3 — однородные формы третьего порядка) систему уравнений (1.7) можно нормализовать до членов третьего порядка включительно. Преобразованная таким образом система уравнений примет вид

$$y_1' = i\omega_1 y_1 + iey_1^2\bar{y}_1 + iky_1y_2\bar{y}_2 + \ldots, \quad y_2' = i\omega_2 y_2 + icy_1y_2\bar{y}_1 + id_1y_2^2\bar{y}_2 + \ldots$$

Коэффициенты e, k, c, d вещественные и равны соответствующим коэффициентам при $u_1^2v_1$ и $u_1u_2v_2$ в первом уравнении и при $u_1u_2v_1$ и $u_2^2v_2$ во втором уравнении системы (1.7). Эти коэффициечты имеют следующие значения

$$e = [8\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)]^{-1}[\omega_1^2(24p^3 - 177p^2 + 442p - 328) + 12p^2 - 52p + 56],$$

$$k = [4\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)]^{-1}p(p-2)(\omega_2^2 - 2)$$

$$c = -[4\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)]^{-1}p(p-2)(\omega_1^2 - 2)$$

$$d = -[8\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)]^{-1}[\omega_2^2(24p^3 - 177p^2 + 442p - 328) + 12p^2 - 52p + 56]$$

Если определить, $\Delta = ed - ck \neq 0$, то положение равновесия (1.2) устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий [13]. Определитель Δ равен $\Delta = [64\omega_1\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2]^{-1}(p-2)^2(40p^3 - 205p^2 + 320p - 128)$.

В области $0 < p < 2$ $\Delta = 0$ только при одном значении $p = p_1 \simeq 0{,}6102\ldots$.

Если между частотами ω_1, ω_2 имеется резонанс нечетного порядка, то, как правило, он приводит к неустойчивости [14]. В рассматриваемой задаче неустойчивость при наличии этого резонанса не будет иметь места, так как разложения нелинейных членов содержат члены только нечетных порядков. Отметим, что резонансу четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$ отвечает значение $p_2 = 4/3$. Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Равновесие (1.2) устойчиво при $0 < p < 2$ для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий, кроме, быть может двух значений $p = p_1 \simeq 0{,}6102\ldots$ и $p = p_2 = 4/3$.

2. Автоколебательный режим при наличии трения. Учтем теперь действие сил трения в шарнирах A и B, которые имеют равные коэффициенты трения. Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$2\varphi_1'' + \varphi_2''\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2'^2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\varphi_1 - \varphi_2 - \\ - p\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\beta\varphi_1' - \beta\varphi_2' = 0 \tag{2.1}$$

$$\varphi_2'' + \varphi_1'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \varphi_1'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2 - \varphi_1 + \beta\varphi_2' - \beta\varphi_1' = 0 \quad \beta = l^{-1} b\,(ma)^{-1/2}$$

Применяя к характеристическому уравнению системы (2.1):

$$\lambda^4 + 6\beta\lambda^3 + (\beta^2 + 6 - 2p)\,\lambda^2 + 2\beta\lambda + 1 = 0 \tag{2.2}$$

критерий Гурвица, получим условие асимптотической устойчивости равновесия (1.2) системы (2.1) $p < 1/6\,(3\beta^2 + 8)$. Величина $p_0 = 1/6\,(3\beta^2 + 8)$ представляет собой верхнюю границу для величины касательной нагрузки в том смысле, что при $p > p_0$ равновесие (1.2) будет неустойчивым. При $p = p_0$ характеристическое уравнение (2.2) имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm\, 3^{-1/2} i$ и два отрицательных $\lambda_{3,4} = -3\beta \pm (9\beta^2 - 3)^{1/2}$ (при $\beta^2 \geq 1/3$), или имеющих (при $\beta^2 \geq 1/3$) отрицательные вещественные части. Таким образом, при переходе через критическое значение нагрузки может возникнуть автоколебание маятника. Для этого необходимо чтобы два корня характеристического уравнения (2.2) пересекали мнимую ось с ненулевой скоростью.

Рассмотрим поведение корней в окрестности $p = p_0$. Пусть $\lambda_{1,2} = -\alpha(p) \pm i\beta(p)$, $\lambda_3 = -\gamma_1(p)$, $\lambda_4 = -\gamma_2(p)$ (случай $\beta^2 \geq 1/3$), причем $\alpha(p_0) = 0$, $\beta(p_0) = 3^{-1/3}$, $\gamma_1(p_0) = 3\beta - (9\beta^2 - 3)^{1/2}$, $\gamma_2(p_0) = 3\beta + (9\beta^2 - 3)^{1/2}$.

Из системы алгебраических уравнений

$$2\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 = 6\beta, \quad \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha(\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_1\gamma_2 = \beta^2 + 6 - 2p$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma_1 + \gamma_2) + 2\alpha\gamma_1\gamma_2 = 2\beta, \quad (\alpha^2 + \beta^2)\,\gamma_1\gamma_2 = 1$$

можно найти $(d/dp)\mathrm{Re}\lambda/_{p = p_0}$ $(\mathrm{Re}\lambda = -\alpha)$. Опуская выкладки, приведем сразу результат $(d/dp)\,\mathrm{Re}\,\lambda\,|_{p=p_0} = 9\beta\,[2\,(16 + 27\beta^2)]^{-1} > 0$. Аналогично можно рассмотреть случай $\beta^2 < 1/3$ ($\lambda_{3,4}$ — комплексно сопряжены). Вычисления показывают, что и в этом случае результат будет тот же. Следовательно, два корня характеристического уравнения пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью.

Для возникновения автоколебательного режима при переходе через критическую нагрузку p_0 достаточно чтобы при $p = p_0$ равновесие (1.2) было асимптотически устойчивым или неустойчивым. В первом случае автоколебательный режим возникает при $p > p_0$ и является асимптотически устойчивым, а во втором возникает при $p < p_0$ и будет неустойчивым. Отсюда следует, что возникновение автоколебания связано с задачей устойчивости равновесия (1.2) в критическом случае пары чисто мнимых корней [15]. Для решения этой задачи запишем уравнения возмущенного движения (2.1) при $p = p_0$ в виде

$$\begin{gathered}
\varphi_1'' + 1/6\,(10 - 3\beta^2)\,\varphi_1 + 1/6\,(3\beta^2 - 4)\,\varphi_2 + 3\beta\varphi_1' - 2\beta\varphi_2' + \\
+ (\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)\,(\varphi_1 - \varphi_2) + 1/36\,(3\beta^2 - 10)\,(\varphi_1 - \varphi_2)^3 + 1/6\,(3\beta^2 - 10)\,\varphi_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 - \\
- 1/6\,(3\beta^2 - 4)\,\varphi_2(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + 5/2\beta\varphi_2'(\varphi_1 - \varphi_2)^2 - \\
- 7/2\beta\varphi_1'(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \ldots = 0
\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}
\varphi_2' + 1/6\,(3\beta^2 - 16)\,\varphi_1 + 1/6\,(10 - 3\beta^2)\,\varphi_2 - 4\beta\varphi_1' + 3\beta\varphi_2' - \\
- (2\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)\,(\varphi_1 - \varphi_2) + 1/6\,(22 - 3\beta^2)\,\varphi_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 - 1/6\,(13 - 3\beta^2)\,\varphi_2(\varphi_1 - \varphi_2)^? - \\
- 1/9\,(3\beta^2 + 8)\,(\varphi_1 - \varphi_2)^3 + 5\beta\varphi_1'(\varphi_1 - \varphi_2)^2 - 7/2\beta\varphi_2'(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \ldots = 0
\end{gathered}$$

В системе (2.3) сделаем замену переменных. Вместо переменных φ_1', φ_2' введем комплексно сопряженные ξ, η:

$$\begin{gathered}
\xi = [3\beta^3 + 8\beta + (3^{-1/2}\cdot 16 - 3^{1/2}\beta^2)\,i]\,\varphi_1 + [-3\beta^3 - 14\beta + (3^{1/2}\beta^2 + 3^{-1/2}\cdot 8)\,i]\,\varphi_2 + \\
+ (16 - 3\beta^2 + 8\cdot 3^{1/2}\beta i)\,\varphi_1' + (8 - 3\beta^2 + 6\cdot 3^{1/2}\beta i)\,\varphi_2', \quad \eta = \overline{\xi}
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Уравнения (2.3) после замены (2.4) приводятся к виду

$$\xi' = 3^{-1/2} i\xi + (16 - 3\beta^2 + 8\cdot 3^{1/2}\beta i)\, F_1 + (8 - 3\beta^2 + 6\cdot 3^{1/2}\beta i)\, F_2$$

$$\eta' = -3^{-1/2} i\eta + (16 - 3\beta^2 - 8\cdot 3^{1/2}\beta i)\, \overline{F}_1 + (8 - 3\beta^2 - 6\cdot 3^{1/2}\beta i)\, \overline{F}_2$$

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \frac{6\cdot 3^{1/2}\beta + (8 - 3\beta^2)\, i}{4\cdot 3^{1/2}\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\xi + \frac{6\cdot 3^{1/2}\beta - (8 - 3\beta^2)\, i}{4\cdot 3^{1/2}\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\eta + \\ &+ \frac{128 - 45\beta^4 - 216\beta^2}{6\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\varphi_1 + \frac{64 + 45\beta^4 + 252\beta^2}{6\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\varphi_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2' &= -\frac{8\cdot 3^{1/2}\beta + (16 - 3\beta^2)\, i}{4\cdot 3^{1/2}\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\xi - \frac{8\cdot 3^{1/2}\beta - (16 - 3\beta^2)\, i}{4\cdot 3^{1/2}\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\eta - \\ &- \frac{256 - 288\beta^2 - 63\beta^4}{6\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\varphi_1 - \frac{128 + 360\beta^2 + 63\beta^4}{6\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\varphi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= -(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)(\varphi_1 - \varphi_2) - 1/36\,(3\beta^2 - 10)(\varphi_1 - \varphi_2)^3 - 1/6(3\beta^2 - 10)\,\varphi_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \\ &+ 1/6\,(3\beta^2 - 4)\,\varphi_2(\varphi_1 - \varphi_2)^2 - 5/2\beta\varphi_2'(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + 7/2\beta\varphi_1'(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= (2\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)(\varphi_1 - \varphi_2) - 1/6\,(22 - 3\beta^2)\,\varphi_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + 1/6(13 - 3\beta^2)\,\varphi_2(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \\ &+ 1/9\,(3\beta^2 + 8)(\varphi_1 - \varphi_2)^3 - 5\beta\varphi_1'(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + 7/2\beta\varphi_2'(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \ldots \end{aligned}$$

В выражениях для F_1 и F_2 переменные φ_1', φ_2' равны

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \frac{6\cdot 3^{1/2}\beta + (8 - 3\beta^2)\, i}{4\cdot 3^{1/2}\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\xi + \frac{6\cdot 3^{1/2}\beta - (8 - 3\beta^2)}{4\cdot 3^{1/2}\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\eta + \\ &+ \frac{128 - 45\beta^4 - 216\beta^2}{6\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\varphi_1 + \frac{64 + 45\beta^4 + 252\beta^2}{6\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\varphi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2' &= -\frac{8\cdot 3^{1/2}\beta + (16 - 3\beta^2)\, i}{4\cdot 3^{1/2}\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\xi - \frac{8\cdot 3^{1/2}\beta - (16 - 3\beta^2)\, i}{4\cdot 3^{1/2}\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\eta - \\ &- \frac{256 - 288\beta^2 - 63\beta^4}{6\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\varphi_1 - \frac{128 + 360\beta^2 + 63\beta^4}{6\beta\,(3\beta^2 + 16)}\,\varphi_2 \end{aligned}$$

Критические переменные ξ, η линейно входят в уравнения для некритических переменных φ_1, φ_2 системы уравнений (2.5). В дальнейшем применяется известная процедура сведения к системе второго порядка [15, 16]. Приведем лишь основные формулы. Вместо переменных φ_1, φ_2 в первые уравнения системы (2.5) подставляются выражения

$$v_1 = m_1\xi + \overline{m}_1\eta + \ldots, \qquad v_2 = m_2\xi + \overline{m}_2\eta + \ldots \tag{2.6}$$

$$m_1 = -\frac{3\beta\,(27\beta^4 + 192\beta^2 + 256)}{8\,(3\beta^2 + 16)^2\,(16 + 27\beta^2)} - \frac{3^{1/2}\,(90\beta^4 + 576\beta^2 + 512)}{8\,(3\beta^2 + 16)^2\,(16 + 27\beta^2)}\, i$$

$$m_2 = -\frac{9\beta}{8\,(16 + 27\beta^2)} - \frac{3^{1/2}}{2\,(16 + 27\beta^2)}\, i$$

Функции v_1, v_2 удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных [15, 16]. После подстановки выражений (2.6), уравнение для переменной ξ примет вид

$$\xi' = 3^{-1/2} i\xi + F(\xi, \eta), \quad \eta = \overline{\xi} \tag{2.7}$$

где $F(\xi, \eta)$ — совокупность членов не ниже третьего порядка относительно ξ, η.

С помощью полиномиального преобразования $\xi, \eta \to y_1,\ y_2 = \bar{y}_1$, аналогичному (1.8), система уравнений (2.7) преобразуется к виду

$$y_1' = 3^{-1/2} i y_1 + A y_1^2 y_2 + \ldots, \quad y_2' = -3^{-1/2} i y_2 + \bar{A} y_2^2 y_1 + \ldots$$

Коэффициент A равен соответствующему значению коэффициента при $\xi^2\eta$ в условиях (2.7). Опуская вычисления, сразу приведем точное выражение для $\mathrm{Re} A$:

$$\mathrm{Re}\,A = -3\beta\,[256\,(3\beta^2+16)^6\,(16+27\beta^2)^3]^{-1}\,(531441\beta^{14} + 15693912\beta^{12} + 192471552\beta^{10} + 1258260480\beta^8 + 4662558720\beta^6 + 9536274432\beta^4 + 9462349824\beta^2 + 3085828096]$$

Из выражения для $\mathrm{Re} A$ видно, что при любом $\beta > 0$ $\mathrm{Re}\,A < 0$. Таким образом, при $p = p_0 = {}^1/_6\ (3\ \beta^2 + 8)$ равновесие (1.2) системы (2.1) является асимптотически устойчивым и автоколебательный режим возникает после перехода через значение критической нагрузки p_0 и является так же асимптотически устойчивым [17]. При этом граница области устойчивости $p = p_0$ является «безопасной» [16].

Автор благодарит Ю. К. Жбанова и В. Ф. Журавлева за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik//Ing.-Arch. 1952. Bd. 20. H. 1. S. 49—56.
2. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. *Plaut R. H.* A new destabilization phenomenon in nonconservative systems//ZAMM. 1971. Bd. 51. H. 4. P. 319—321.
4. *Herrmann G., Jong I. C.* On the destabilizing effect of Damping in Nonconservative Elastic Systems//J. Appl. Mech. Trans. ASME Ser. E. 1965. B. V. 87. No. 3. P. 592—597.
5. *Nemat-Nasser S., Herrmann G.* Some general considerations concerning the destabilizing effect in non-conservative systems//ZAMP. 1966. V. 17. № 2. P. 305—313.
6. *Денисов Г. Г., Новиков В. В.* Об устойчивости стержня, нагруженного следящей силой//Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 1. С. 150—154.
7. *Bolotin V. V., Zhinzher N. I.* Effects of damping on stability of elastic systems subjected to non-conservative forces//Int. J. Solids and Structures. 1969. V. 5. No. 9. P. 965—989.
8. *Пановко Я. Г., Сорокин С. В.* О квазиустойчивости упруговязких систем со следующими силами//Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 135—139.
9. *Милославский А. И.* О дестабилизирующем воздействии малого демпфирования на абстрактные неконсервативные системы//Успехи мат. наук. 1986. Т. 41. Вып. 1. С. 199—200.
10. *Hagedorn P.* On the destabilizing effect of non-linear damping in non-conservative systems with follower forces//Int. J. Non-linear. Mech. 1970. V. 5. No. 2. P. 341—358.
11. *Сейранян А. П.* Парадокс дестабилизации и критерии колебательной устойчивости: Препринт № 301. М.: ИПМ АН СССР, 1987.
12. *Старжинский В. М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 255 с.
13. *Бибиков Ю. Н., Плисс В. А.* О существовании инвариантных торов в окрестности нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений//Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 11. С. 1864—1881.
14. *Гольцер Я. М., Куницын А. Л.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе//ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 6. С. 974—984.
15. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1935. 386 с.
16. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
17. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.VI.1990