

УДК 533.6.013.42

© 1992 г. Н. А. ВЕКЛИЧ

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ОБ УДАРЕ УПРУГОГО ДИСКА О ЖИДКОСТЬ

При расчете на прочность ряда технических сооружений и конструкций, взаимодействующих с жидкостью, возникает необходимость исследовать динамическое взаимодействие упругих пластин с идеальной несжимаемой жидкостью. Некоторые плоские задачи гидроупругости для пластин рассмотрены ранее [1, 2]. Ниже приводятся результаты теоретического и экспериментального исследования осесимметричных задач для упругого диска, взаимодействующего с неограниченными и ограниченными объемами жидкости.

1. Уравнение колебаний упругого диска, взаимодействующего с жидкостью. Пусть упругий диск постоянной толщиной h и радиусом a совершает малые осесимметричные колебания на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, занимающей нижнее полупространство. Обозначим прогиб диска $w(r, t)$, r — радиальная координата ($0 \leq r \leq a$), t — время. Поверхности жидкости вне диска свободная, на ней давление равно нулю. На бесконечности жидкость покоится.

Давление $p(r, t)$ в жидкости непосредственно под диском определяем с помощью линеаризованного интеграла Коши — Лагранжа $p = -\rho \partial \varphi / \partial t$, (ρ — плотность жидкости). Так как потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа, а скорость жидкости под диском равна скорости диска, то методом интегральных преобразований получим

$$p(x, t) = \frac{2}{\pi c} \rho \int_0^1 \frac{\partial^2 w(\xi, t)}{\partial t^2} \xi K(x, \xi) d\xi, \quad x = \frac{r}{a} \quad (1.1)$$

Ядро $K(x, \xi)$ выражается через определенный интеграл, сводящийся к неполному эллиптическому

$$K(x, \xi) = \int_z^1 ((s^2 - x^2)(s^2 - \xi^2))^{-1/2} ds, \quad z = \max(x, \xi) \quad (1.2)$$

Из (1.1) — (1.2) можно с помощью предельного перехода определить давление в жидкости под диском радиусом a , вставленным в неограниченный непроницаемый и неподвижный экран, закрывающий вместе с диском всю поверхность жидкого полупространства. При этом формула (1.1) сохранится, но ядро $K(x, \xi)$ будет иметь вид несобственного интеграла

$$K(x, \xi) = \int_z^\infty ((s^2 - x^2)(s^2 - \xi^2))^{-1/2} ds, \quad z = \max(x, \xi) \quad (1.3)$$

также сводящегося к эллиптическому. Непосредственно под экраном нормальная скорость жидкости равна нулю.

Впервые колебания упругого диска в неподвижном экране, окруженном идеальной несжимаемой жидкостью, рассмотрел Ламб [3]. К упомянутой задаче Ламба тесно примыкает несколько более общий случай удара жидкого цилиндра по упругому диску. Расчет ударного взаимодействия жидкого цилиндра с недеформируемой преградой в линейной постановке был дан в [4]. Но вопрос взаимодействия цилиндра с упругим диском оставался нерешенным.

Удар жидкого цилиндра по диску будем считать нормальным и осесимметричным. Пусть a — радиус цилиндра, H — его высота, b — радиус диска ($b \geq a$). Жидкость идеальная, несжимаемая. Движение жидкости после удара потенциальное. Потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа. Боковая поверхность цилиндра и торцы $y = H$ свободные, на них потенциал сохраняет постоянное значение, а давление все время равно нулю. Нормальная скорость жидкости на другом торце (площадка контакта) совпадает со скоростью диска $\partial w / \partial t$. Граничные условия для потенциала задаются на первоначальной недеформированной поверхности цилиндра. В результате задача определения потенциала течения практически совпадает с рассмотренной ранее [4] для недеформируемой преграды, что характерно для задач гидроупругости.

Давление в жидкости под диском $p(x, t)$ выражается формулой (1.1), в которой ядро $K(x, \xi)$ представляется в виде ряда

$$K(x, \xi) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n x) J_0(\mu_n \xi)}{\mu_n J_1^2(\mu_n)} \operatorname{th} \frac{H}{a} \mu_n \quad (1.4)$$

где $J_0(x)$ и $J_1(x)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядков, μ_n — корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Рассмотрим еще колебания упругого диска радиусом a , заделанного в жесткий неподвижный экран, при ударе неограниченного слоя идеальной несжимаемой жидкости толщиной H . Давление в жидкости под диском по-прежнему выражается формулой (1.1), причем ядро $K(x, \xi)$ имеет следующий вид:

$$K(x, \xi) = \pi \frac{a}{H} \sum_{n=0}^{\infty} I_0(z_1 \varepsilon_n) K_0(z_2 \varepsilon_n) \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_n = \pi \frac{a}{H} (n + 1/2), \quad z_1 = \min(x, \xi), \quad z_2 = \max(x, \xi)$$

где $I_0(x)$ и $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя и Макдональда нулевого порядка мнимого аргумента.

Выпишем уравнение колебаний «смоченного» диска

$$\frac{D}{a^4} \Delta \Delta w + \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p(x, t), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.6)$$

где $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ — цилиндрическая жесткость диска; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; ρ_1 — плотность материала диска.

Давление $p(x, t)$ в правой части уравнения (1.6) определяется формулами (1.1) — (1.5). При окружении диска жидкостью с двух сторон это давление необходимо удвоить. Для «сухой» периферийной части диска, лежащей вне площадки контакта с жидкостью $a < r < b$, в уравнении колебаний (1.6) правую часть полагаем равной нулю.

2. Свободные колебания диска. Решения многих задач гидроупругости для диска можно получить в виде разложения его прогиба w в ряд по собственным функциям (модам) $R(x)$, которые удовлетворяют следующему уравнению:

$$\frac{1}{\Omega} \Delta \Delta R - R - 2\beta \int_0^1 R(\xi) \xi K(x, \xi) d\xi = 0, \quad \Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \quad (2.1)$$

где $\Omega = \rho_1 h a^4 \omega^2 / D$ — собственное число соответствующей моды колебаний диска $R(x)$ с частотой ω ; $\beta = a\rho / \pi h \rho_1$. На сухой части диска в (2.1) полагаем $\beta = 0$.

Кроме уравнения (2.1), собственные моды колебаний $R(x)$ должны удовлетворять граничным условиям в зависимости от вида закрепления контура диска.

Сначала остановимся на движениях, рассмотренных в п. 1, на которых край диска имеет радиальную координату $x = 1$, и напомним, что для заземленного контура

$$R(1) = dR(1)/dx = 0 \quad (2.2)$$

Для свободно опертого контура

$$R(1) = d^2R(1)/dx^2 + \nu dR(1)/dx = 0 \quad (2.3)$$

Для свободно плавающего диска

$$\frac{d^2R(1)}{dx^2} + \nu \frac{dR(1)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2R(1)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR(1)}{dx} \right) = 0 \quad (2.4)$$

Для случая удара жидкого цилиндра по диску условия (2.2)—(2.4) должны выполняться на крае диска, имеющем координату $x = 1 + x_0$, $x_0 = b/a - 1$, а при $x = 1$ в месте сопряжения сухой и смоченной частей должны выполняться условия непрерывности моды $R(x)$ и ее первых трех производных.

Центр диска $x = 0$ представляет собой особую точку уравнения (2.1). В этой точке также необходимо потребовать выполнения двух дополнительных условий. Одним из этих условий является требование гладкости изогнутой формы диска $d^3R(0)/dx^3 = 0$.

Приведем несколько примеров другого условия. Если центр диска испытывает заданное перемещение $w_0(t)$, то полагаем $R(0) = 0$. При ударе диска о жидкость должно выполняться условие

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dR}{dx} \right) \right) = 0 \quad (2.5)$$

означающее отсутствие в центре диска сосредоточенной силы. Условие (2.5) можно значительно упростить, придав ему с учетом требования гладкости изогнутой формы диска более удобный для программирования на ЭВМ вид $d^3R(0)/dx^3 = 0$.

Если движение вызвано ударом твердого тела массой m_0 в центре диска, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dR}{dx} \right) \right) = \frac{1}{2} \Omega M R'(0) \quad (2.6)$$

где $M = m_0/m$; $m = \pi a^2 h \rho_1$ — масса диска. Условие (2.6) является следствием уравнения движения ударяющего тела.

Согласно (2.6), перерезывающая сила при приближении к центру диска неограниченно возрастает, а производные собственной функции $R(x)$ имеют особенность при $x \rightarrow 0$.

Особенность решения целесообразно выделить и несколько преобразовать условие (2.6). Для этого будем вместо $R(x)$ искать новую функцию $R^*(x)$, полагая

$$R(x) = Ax^2 \ln x + R^*(x), \quad A = 1/8\Omega M R'(0) \quad (2.7)$$

Из (2.6)—(2.7) следует, что $R^*(x)$ удовлетворяет в центре более простому граничному условию (2.5), которое сводится к равенству $d^3R^*(0)/dx^3 = 0$, так как требование гладкости $dR^*(0)/dx = 0$ сохраняется.

Интегродифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $R^*(x)$, совпадает с (2.1), но стоящий в его правой части нуль следует заменить выражением (ядро $K(x, \xi)$) берется из (1.2))

$$A\{x^2 \ln x + \frac{2}{9} \beta [4x^3 \arccos x + (1 - x^2)^{1/2} ((2x^2 + 1) \ln 4 - \frac{4}{3} (7 + 20x^2))]\} \quad (2.8)$$

Пусть $R_m(x)$ и $R_n(x)$ — две собственные функции уравнения (2.1), соответствующие различным собственным числам Ω_m и Ω_n . Введем скалярное произведение (R_m, R_n) по формуле

$$(R_m, R_n) = \int_0^1 x R_m(x) R_n(x) dx + 2\beta \int_0^1 \int_0^1 x \xi R_m(x) R_n(\xi) K(x, \xi) dx d\xi \quad (2.9)$$

При наличии в центре диска сосредоточенной массы m_0 , к правой части (2.9) необходимо еще прибавить слагаемое $0,5MR_m(0)R_n(0)$. Если же рассматривается удар жидкого цилиндра по диску, то в правой части (2.9) в первом слагаемом (определенном интеграле) верхний предел 1 надо заменить на $1 + x_0$.

Проверка показывает, что собственные функции R_m и R_n во всех рассмотренных примерах ортогональные, т. е. при $m \neq n$ выполняется равенство $(R_m, R_n) = 0$.

Для решения различных нестационарных задач гидроупругости удобно применять нормированные собственные функции $R_n^0(x) = R_n(x) (R_n, R_n)^{-1/2}$, т. е. нормальные моды колебаний диска.

Уравнение (2.1) решалось при различных парах граничных условий (2.2) — (2.7) численно на ЭВМ. Для этого отрезок $[0, 1]$ разбивался равномерно узловыми точками $x_i = i/N, i = 0, 1, \dots, N$ на N частей. Вблизи точек $x = 0$ и $x = 1$ брались по два равноотстоящих фиктивных узла x_i , соответствующих индексам $i = -1, i = -2, i = N + 1, i = N + 2$.

Определению подлежали $N + 5$ значений собственной функции $R(x_i), i = -2, -1, \dots, N + 2$ в узлах интерполяции и собственное число Ω . Для них была составлена однородная система $N + 5$ линейных уравнений. Причем четыре уравнения являлись аппроксимацией двух пар граничных условий (2.2) — (2.7). Уравнение (2.1) удовлетворялось в $N + 1$ в точке $x_i, i = 0, 1, \dots, N$, что позволяло замкнуть алгебраическую систему уравнений.

Дифференциальный бигармонический оператор $\Delta \Delta R$ уравнения (2.1) заменялся в каждой точке $x_i (i \geq 1)$ обычными разностными отношениями. В центре диска использовалось приближенное равенство $\Delta \Delta R = 8/3 d^4 R(0)/dx^4$, так что при $x = 0$ разностными отношениями заменялась четвертая производная $d^4 R(0)/dx^4$. Аналогичная аппроксимация в центре диска применялась и для бигармонического оператора $\Delta \Delta R^*$, когда уравнение (2.1) решалось с поправкой (2.8).

Замена интеграла, входящего в (2.1), квадратурными суммами и решение однородной системы линейных уравнений относительно неизвестных $R(x_i)$ и собственного числа Ω проводились по аналогии с плоскими задачами гидроупругости [1].

При наличии свободной от нагрузки периферийной части диска $1 < x < 1 + x_0$ (в случае удара жидкого цилиндра по диску) нормальная мода на этом участке определяется аналитически:

$$R(x) = A' J_0(y) + B' Y_0(y) + C' I_0(y) + D' K_0(y) \quad (2.10)$$

где $y = \Omega^{1/4} x$; A', B', C', D' — постоянные, подлежащие определению; $Y_0(y)$ — функция Неймана.

Таким образом, к $N + 5$ неизвестным значениям моды $R(x_i)$ в узловых и фиктивных точках интерполяции x_i на отрезке $[0, 1]$ добавляются еще четыре неизвестных A', B', C', D' . В точке сопряжения $x = 1$ мода должна быть непрерывной до производных третьего порядка включительно, что дает четыре дополнительных уравнения. Кроме того, при $y = \Omega^{1/4} (1 + x_0)$ сумма (2.10) удовлетворяет одной из пар (2.2) — (2.4) граничных условий. Всего в задаче об ударе

жидкого цилиндра по диску для собственной функции $R(x)$ будем иметь систему $N + 9$ однородных линейных уравнений относительно $R(x)$ и A', B', C', D' , которую решаем аналогично [1].

Предлагаемый численный метод позволяет определять с достаточной степенью точности и без привлечения регуляризирующих процедур первые десять нормальных мод $R(x)$ и собственных чисел Ω при различных значениях параметра β , характеризующего инерционные и геометрические свойства диска и жидкости.

3. Вынужденные колебания диска на жидкости. Приведем несколько примеров вынужденных колебаний. Пусть движение упругого диска, свободно плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, началось из состояния покоя в результате заданного перемещения его центра по закону $w_0(t)$. Прогиб $w(x, t)$ ищем в виде ряда по нормальным модам $R_n^0(x)$, найденным из уравнения (2.1) с ядром (1.2):

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n^0(x) T_n(t) \quad (3.1)$$

Нормальные моды в центре диска обращаются в нуль $R_n^0(0) = 0$ и удовлетворяют условию гладкости $dR_n^0(0)/dx = 0$, а на контуре $x = 1$ для них выполняются условия (2.4). Поскольку нормальные моды $R_n^0(x)$ находятся совместно с собственными числами Ω из уравнения (2.1) численным методом, описанным в п. 2, и хранятся в памяти ЭВМ, то в (3.1) неизвестными будут только функции $T_n(t)$. Учитывая, что $T_n(t) = (w, R_n^0)$, и используя (2.1), для $T_n(t)$ можно получить неоднородное уравнение

$$d^2 T_n / dt^2 + \omega_n^2 T_n = \omega_n^2 q_n w_0(t), \quad q_n = (1, R_n^0) \quad (3.2)$$

где ω_n — собственная частота колебаний n -й моды, а скалярное произведение q_n берется в смысле (2.9). Очевидно, q_n представляет собой коэффициент Фурье разложения единицы в ряд по нормальным модам колебаний диска $R_n^0(x)$.

Решение уравнения (3.2), соответствующее нулевым начальным условиям $T_n(0) = T_n'(0) = 0$, можно получить методом вариации постоянных. Приведем окончательный результат:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n q_n R_n^0(x) \int_0^t w_0(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (3.3)$$

Отметим, что формально (3.3) совпадает с решением плоской задачи гидроупругости о вынужденных колебаниях плотины при «землетрясении» [1], полученным несколько иным методом.

При практических расчетах в ряде (3.3) можно ограничиться первыми десятью членами. Изгибающий момент, напряжения, скорости и другие характеристики движения диска можно определять с помощью преобразований ряда (3.3), аналогичных [1, 2].

В качестве другого типичного примера рассмотрим удар упругого диска со свободным контуром о поверхность жидкости. Непосредственно перед ударом диск имел скорость v_0 , а жидкость покоилась. В момент удара $t = 0$ диск скачком приобретает новую начальную скорость $\partial w(x, 0) / \partial t$, которую можно найти из уравнения сохранения количества движения элементарного кольца $(x, x + dx)$. Для безразмерной начальной скорости $v(x) = v_0^{-1} \partial w(x, 0) / \partial t$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$v(x) + 2\beta \int_0^1 v(\xi) \xi K(x, \xi) d\xi = 1 \quad (3.4)$$

с ядром $K(x, \xi)$ (1.2). Из уравнения (3.4), в частности, следует, что в момент удара край диска $x = 1$ не замедляется, так как $K(1, \xi) = 0$ и $v(1) = 1$.

Движение диска после удара описываем с помощью ряда (3.1), в котором нормальные моды $R_n^0(x)$ удовлетворяют таким же условиям, как и в предыдущей задаче, кроме одного. В центре диска $d^3 R_n^0(x)/dx^3 = 0$, вместо $R_n^0(0) = 0$, как было выше. В связи с этим одна нормальная мода при ударе диска о жидкость будет тождественной константой с нулевым собственным числом и нулевой частотой колебаний $\omega = 0$. Вклад этой моды в прогиб w удобно представить в виде отдельного слагаемого. Запишем окончательный результат:

$$w(x, t) = v_0 \sum_{k=1}^{\infty} q_k R_k^0(x) \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} + v_1 t \quad (3.5)$$

$$v_1 = v_0 \left(1 + \frac{4}{3} \beta\right)^{-1}, \quad q_k = (v(x), R_k^0) = \int_0^1 x R_k^0(x) dx$$

Входящие в (3.5) коэффициенты Фурье q_k разложения начальной скорости диска $v(x)$ в ряд по нормальным модам R_k^0 оказалось возможным найти, не решая уравнения (3.4).

Решение (3.5) позволяет проанализировать изгиб диска после удара о жидкость столь же подробно, как и аналогичное решение для упругой пластины в плоском случае [2].

Упростим формулу (3.5), сохранив в ней только ряд, а слагаемым $v_1 t$ пренебрежем. Будем также считать, что $R_k^0(x)$ и ω_k означают нормальные моды и собственные частоты, найденные из уравнения (2.1) с ядром (1.3) и граничными условиями (2.2). Тогда укороченная формула (3.5) даст решение следующей задачи. На нижнее полупространство падает со скоростью v_0 упругий диск радиусом a , заделанный в неограниченный жесткий экран. После соприкосновения с жидкостью экран мгновенно останавливается, а диск совершает колебания с учетом влияния жидкости.

Пусть движение диска, покоящегося на поверхности жидкости, вызвано ударом твердого тела массой m_0 с начальной скоростью v_0 . После удара тело движется вместе с диском. Для прогиба диска можно по аналогии с [5] (поперечный удар твердого тела по балке) получить ряд

$$w(x, t) = \frac{1}{2} M v_0 \sum_{n=1}^{\infty} R_n^0(x) R_n^0(0) \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \quad (3.6)$$

Нормальные моды $R_n^0(x)$ и собственные частоты колебаний ω_n в (3.6) определяются на ЭВМ из уравнений (2.1), (2.6)–(2.8) (ядро берется из формулы (1.2)). Для нормировки собственных функций скалярное произведение (R_n, R_n) необходимо брать по формуле (2.9) с дополнительным слагаемым $0,5MR_n^2(0)$, описанным в п. 2.

Рассмотрим колебания упругого диска при ударе по нему жидкого цилиндра со скоростью v_0 . Поскольку до удара диск покоился, то непосредственно после удара цилиндра скорость сухой периферийной части останется нулевой, а скорость смоченной части диска $0 \leq x < 1$ изменится скачком от нуля до $\partial w(x, 0)/\partial t$, причем для безразмерной начальной скорости $v(x) = v_0^{-1} \partial w(x, 0)/\partial t$ имеем интегральное уравнение Фредгольма

$$v(x) + 2\beta \int_0^1 v(\xi) \xi K(x, \xi) d\xi = -2\beta \int_0^1 \xi K(x, \xi) d\xi \quad (3.7)$$

В этом уравнении ядро $K(x, \xi)$ определяется формулой (1.4). В точке $x = 1$

ядро $K(1, \xi) = 0$ и $v(1) = 0$. Следовательно, граница смоченной части диска в начальный момент $t = 0$ остается неподвижной, как и вся периферийная сухая часть $1 < x < 1 + x_0$.

Учитывая, что начальный прогиб диска нулевой, представим прогиб $w(x, t)$ в виде ряда

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k^0(x) B_k \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \quad (3.8)$$

При произвольных постоянных B_k ряд (3.8) удовлетворяет уравнениям движения как сухой, так и смоченной частей диска с ядром (1.4), поскольку $R_k^0(x)$ — соответствующие нормальные моды, а ω_k — собственные частоты колебаний. Он также удовлетворяет граничным условиям в центре $x = 0$, на контуре $x = 1 + x_0$ и условиям сопряжения при $x = 1$. Поэтому достаточно подобрать постоянные B_k так, чтобы ряд (3.8) удовлетворял и начальной скорости диска — нулевой при $1 < x < 1 + x_0$ и равной $v(x)$ (3.7) при $0 \leq x \leq 1$. Несложные выкладки дают

$$B_k = -2\beta v_0 \int_0^1 \int_0^1 x \xi R_k^0(x) K(x, \xi) dx d\xi$$

Таким образом, снова оказалось возможным найти все члены ряда (3.8), не решая интегрального уравнения (3.7) для начальной скорости $v(x)$.

Точно также может быть решена и задача об ударе неограниченного жидкого слоя толщины H со скоростью v_0 по покоящемуся упругому диску, заделанному в неподвижный экран. Для прогиба диска справедлива формула (3.8). Нормальные моды $R_k^0(x)$ и собственные частоты колебаний ω_k удовлетворяют уравнениям (2.1)—(2.2) с ядром (1.5). Чтобы определить коэффициенты B_k , выпишем интегральное уравнение для безразмерной начальной скорости диска $v(x) = v_0^{-1} \partial w(x, 0) / \partial t$:

$$v(x) + 2\beta \int_0^1 v(\xi) \xi K(x, \xi) d\xi = -\frac{\rho H}{\rho_1 h} \quad (3.9)$$

Правая часть уравнения (3.9) менее сложная, чем (3.7). Поэтому коэффициенты B_k выражаются простой формулой

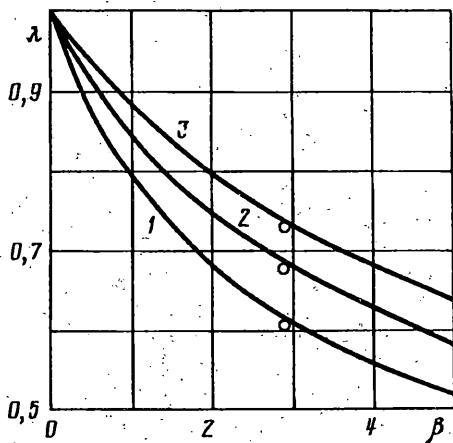
$$B_k = -v_0 \frac{\rho H}{\rho_1 h} \int_0^1 x R_k^0(x) dx \quad (3.10)$$

Согласно (3.8), (3.10) при ударе жидкого полупространства ($H \rightarrow \infty$) по диску в жестком экране все коэффициенты $B_k \rightarrow \infty$, и прогиб диска будет неограниченным.

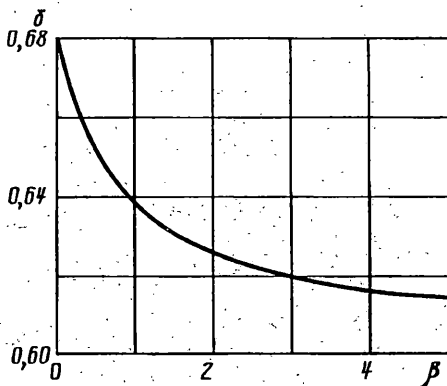
4. Результаты вычислений и экспериментальных измерений. Численные расчеты собственных мод и частот диска, взаимодействующего с жидкостью, проводились по методу, описанному в п. 2. Обычно принималось $N = 100$. Для оценки точности вычислений были определены три первых собственных числа Ω диска со свободным краем, несущего в центре сосредоточенную массу m_0 и совершающего колебания в пустоте ($\beta = 0$), $\nu = 0,3$.

Точное аналитическое решение этой задачи при различных m_0 было дано в [6]. Сравнение с [6] показало, что предлагаемый численный метод позволяет определять частоты и моды колебаний диска с достаточно высокой степенью точности (более подробных результатов сравнения не приводим для краткости изложения).

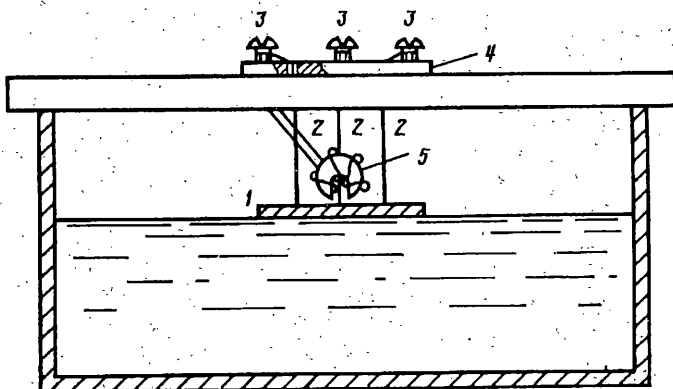
На фиг. 1 в виде кривых представлены результаты численного решения



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

уравнений (2.1), (2.4) с ядром (1.2) (свободные колебания диска на поверхности жидкости) при различных значениях параметра β , отложенного по оси абсцисс. По оси ординат отложены отношения $\lambda = \omega_\beta / \omega_0$ собственных частот диска на поверхности жидкости ω_β для первых трех нормальных мод к их значениям в пустоте ω_0 . Коэффициент Пуассона $\nu = 0,27$. Графики показывают, что собственные частоты существенно зависят от параметра β . Так, основная частота диска при $\beta = 5$ почти в 2 раза меньше, чем при $\beta = 0$.

На фиг. 2 показано изменение безразмерного радиуса $\delta = r_1/a$ узловой окружности первой моды колебаний диска в зависимости от параметра β . График показывает, что радиус δ узловой окружности с увеличением параметра β заметно уменьшается, от 0,680 при $\beta = 0$ до 0,615 при $\beta = 5$. Аналогичное поведение узлов первой нормальной моды колебаний отмечалось и в случае плоской задачи для свободной пластины, находящейся на поверхности жидкости [1, 2].

Дадим краткое описание экспериментального исследования осесимметричных колебаний свободного диска на поверхности жидкости. Схема постановки опыта представлена на фиг. 3.

Испытывался диск 1 радиусом $a = 72,5$ мм, изготовленный из стального листа толщиной 1 мм. Диск подвешивался на трех тонких капроновых нитях 2, одни концы которых приклеивались к диску в точках, расположенных в вершинах правильного треугольника, вписанного в узловую окружность первой моды, радиус δ которой равен 0,68. Другие концы нитей подвески наматывались на винты 3 на пластине 4. Такое устройство позволяло точно регулировать длину

нитей подвески диска. Электромагнит 5 для возбуждения колебаний крепился независимо над центром диска и питался от звукового генератора.

Определение собственных частот осуществлялось методом резонансных колебаний [1]. При испытаниях в воздухе резонансные колебания обнаруживались по максимуму силы звука, издаваемого диском, а формы колебаний — по фигурам Хладни (окружностям), которые образовывали насыпанные на диск песчинки.

Следует отметить, что на второй и третьей симметричных модах колебаний внутренние узловые окружности были слегка вытянуты и представляли собой эллипсы с небольшим эксцентриситетом. Это указывало на то, что диск имел какие-то небольшие неправильности.

Нити подвески диска были достаточно податливы. Они не мешали возникновению резонансных колебаний по другим модам, хотя и были приклеены в точках на узловой окружности первой моды.

Аналогичные результаты и качественные (собственные частоты) были получены, когда нити подвесок приклеивались к точкам на срединной узловой окружности третьей моды ($\delta = 0,59$).

Постановка опыта с подвешенным диском позволила достаточно чисто провести испытания диска, находящегося на поверхности жидкости. В бак (53×53×40 см) наливалась вода так, чтобы поверхность жидкости без учета мениска была на уровне нижней плоскости диска. Диск находился на расстоянии 30 см от дна бака.

При прохождении через резонанс при первой частоте колебаний на поверхности жидкости вокруг диска внезапно возникали капиллярные волны. На второй частоте этих волн почти не было видно, но поверхность жидкости становилась матовой, вокруг диска возникала «корона». Резонанс при третьей моде устанавливался лишь на слух по заметному усилению звука.

Нормальные моды колебаний диска при резонансе контролировались так же, как и при испытаниях в воздухе, по фигурам Хладни, но узловые окружности в силу малости амплитуд колебаний получались более размытыми, чем при колебаниях диска в воздухе. Для второй и третьей мод можно отметить лишь качественно, что узловые окружности смещаются к центру по сравнению с их положением при колебаниях диска в воздухе. При резонансных колебаниях с основной частотой радиус узловой окружности уменьшился приблизительно на 4 мм. Теория предсказывает для испытываемого диска ($\beta = 2,95$) смещение на 4,4 мм.

Ниже приведены три первые собственные частоты (в Гц) ω_0 при колебаниях в воздухе и ω_β — при колебаниях на поверхности жидкости, а также их отношения $\lambda = \omega_\beta/\omega_0$, экспериментальные λ_e и теоретические λ_t , соответствующие фиг. 1.

ω_0	450,3	1828	4150
ω_β	273,4	1238	3028
λ_e	0,607	0,677	0,730
λ_t	0,610	0,680	0,735

Значения λ_e нанесены также на фиг. 1 (кружки).

Сравнение полученных экспериментальных данных с теоретическим расчетом показывает вполне удовлетворительное согласие теории с экспериментом.

После проведенной экспериментальной проверки точных решений задач гидроупругости по наиболее важным характеристикам — собственным частотам и модам колебаний — отпадает настоятельная необходимость в экспериментальной проверке теоретических решений задач гидроупругости, например, при ударе, так как это будет, по-видимому, в первую очередь проверкой соответствия постановки опыта предположениям и допущениям в постановке теоретической

задачи (отсутствие отскока тела, безотрывность движения жидкости, неучет вязкости и т. п.).

Автор признателен Б. М. Малышеву за научное руководство работой и В. Б. Поручикову за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веклич Н. А., Малышев Б. М. Колебания упругой пластины в жидком объеме прямоугольной формы//Изв. АН СССР. МТТ. 1990, № 4. С. 155—163.
2. Веклич Н. А., Малышев Б. М. Удар упругой пластины по жидкому полупространству//Некоторые задачи о поведении вязких и упруго-пластических конструкций/Под ред. В. П. Нетребко. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 113—126.
3. Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water//Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1920. V. 98. № 690. P. 205—216.
4. Веклич Н. А. Осесимметричная задача об ударе по жидкому цилиндру//Сиб. физ.-техн. журн. 1991. Вып. 3. С. 66—72.
5. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
6. Roberson R. Transverse vibrations of a free circular plate carrying concentrated mass//J. Appl. Mech. 1951. V. 18. № 3. P. 280—282.

Москва

Поступила в редакцию
28.IX.1990