МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1992

УДК 624.072.4

© 1992 г. И. А. КИЙКО, А. Д. ЧАРУХЧЕВ

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Приведена постановка задачи об устойчивости (по схеме Кармана либо Энгессера — Шенли) стержня переменного прямоугольного сечения. Установлена справедливость теоремы существования для собственных значений; их определение сведено к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Для случая, когда диаграмма упрочнения материала стержня мало отличается от линейной, дано приближенное решение, и на его основе сформирована и решена задача об оптимальной форме стержня, которая максимизирует критическую силу.

1. Исследуется шарнирно опертый по торцам стержень прямоугольного поперечного сечения, который сжимается осевой силой. Введем характерные размеры b_0, h_0 ширины и высоты сечения и рассмотрим три случая: $b = b_0$, $h = h_0 h_1(x)$, $S = S_0 h_1(x)$, $J = J_0 h_1^3(x)$; $b = b_0 b_1(x)$, $h = h_0$, $S = S_0 b_1(x)$, $J = J_0 b_1(x)$; $b = b_0 \varphi_1(x)$, $h = h_0 \varphi_1(x)$, $S = S_0 \varphi_1^2(x) \equiv S_0 \varphi(x)$, $J = J_0 \varphi_1^4(x) \equiv J_0 \varphi^2(x)$, где $S_0 = b_0 h_0$; $J_0 = b_0 h_0^3/12$. Видно, что площадь поперечного сечения и момент инерции могут быть записаны единообразно через одну функцию $h(x)$: $S = S_0 h(x)$, $J = J_0 h^\alpha(x)$.

Допустим, что во всех сечениях материал стержня вышел за пределы упругости. Задача об устойчивости прямолинейной формы равновесия такого стержня (по схеме Крамана или по схеме продолжающего нагружения Энгессера — Шенли) формулируется тогда следующим образом [1, 2]:

$$E^* J_0 h^\alpha w'' + P w = 0, \quad w(0) = w(l) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь приведенный модуль E^* — это либо модуль Кармана K, либо касательный E_1:

$$K = 4EE_1/(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2, \quad E_1 = d\sigma/d\varepsilon \tag{1.2}$$

где $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ — кривая упрочнения, E — модуль Юнга.

В области малых упругопластических деформаций кривую упрочнения целесообразно представить в форме

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma) = \varepsilon_s + (\sigma - \sigma_s)/E_0 - \psi_1(\sigma) \tag{1.3}$$

Модуль линейного упрочнения E_0 может быть выбран, например, из условия минимума квадратичного уклонения реальной кривой упрочнения от линейной. Из (1.3) находим

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{1}{E_0} - \psi_1'(\sigma) = \frac{1 - E_0\psi(\sigma)}{E_0}, \quad \psi = \psi_1'$$

$$E_1 = d\sigma/d\varepsilon = E_0/(1 - E_0\psi(\sigma)) \qquad (1.4)$$

В соответствии с этим из (1.2) для модуля Кармана получаем

$$K = \frac{K_0}{1 - K_1(\sigma)}, \quad K_0 = \frac{4EE_0}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_0})^2} \qquad (1.5)$$

$$K_1 = 0{,}25K_0\psi(\sigma) + \sqrt{K_0}\,[1 - (1 - E_0\psi(\sigma))^{1/2}]\,(\sqrt{E} + \sqrt{E_0})^{-1}$$

Подставляя (1.4) и (1.5) вместо приведенного модуля в (1.1) и вводя безмерную координату $x^\circ = x/l$ (градус в дальнейшем опустим), приходим к однотипным задачам

$$\frac{K_0J_0}{(1 - K_1(\sigma))\,l^2} h^\alpha w'' + Pw = 0$$

$$\frac{E_0J_0}{(1 - E_0\psi(\sigma))\,l^2} h^\alpha w'' + Pw = 0, \quad w(0) = w(1) = 0$$

Обе они эквивалентны следующей задаче на собственные значения

$$h^\alpha w'' + \lambda^2(1 - f(\sigma))\,w = 0, \quad \sigma = \gamma\lambda^2/h(x)$$

$$w(0) = w(1) = 0 \qquad (1.6)$$

При схеме Кармана $\lambda^2 = Pl^2/(K_0J_0)$, $f(\sigma) = K_1(\sigma)$, $\gamma = K_0J_0/(l^2S_0)$, при схеме Шенли $\lambda^2 = Pl^2/(E_0J_0)$, $f(\sigma = E_0\psi(\sigma)$, $\gamma = E_0J_0/(l^2S_0)$.

У большинства реальных материалов функция упрочнения такова, что $f(\sigma)$ стремится к некоторому конечному пределу с ростом σ; будем формально считать, что $f(\sigma) \to f_0 > 0$ при $\sigma \to \infty$. Положим (для дальнейшего это будет существенно), что $h(x) \neq 0$, $x \in [0, 1]$; тогда условие $\sigma \to \infty$ эквивалентно условию $\lambda \to \infty$, следовательно, $\lambda^2(1 - f) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$ равномерно по x. При этих условиях справедлива теорема существования [3] для собственных значений системы (1.6). В дальнейшем сосредоточим внимание на первом не равном нулю собственном значении.

Положим $h = 1 + \omega$, причем $|\omega| < 1$, в соответствии со сделанным предположением; тогда $h^\alpha = 1 + \alpha\omega + \ldots \equiv 1 + g$, $\sigma = \gamma\lambda^2/(1 + \omega)$. Подставим эти зависимости в уравнение (1.6) и запишем его в виде $w'' + \lambda^2 w = \lambda^2 fw - gw''$.

Приведем это уравнение к интегральному, разыскивая его решение в форме $w = C_1(x)\sin\lambda x + C_2(x)\cos\lambda x$ и пользуясь методом вариации постоянных. В результате получим

$$w = a_1\sin\lambda x + a_2\cos\lambda x + \lambda\int_0^x \frac{f + g}{1 + g}\sin\lambda(x - s)\,w(s)\,ds$$

Нормируя w и учитывая, что $a_2 = 0$ на основе первого из граничных условий, окончательно будем иметь

$$w = \sin\lambda x + \lambda\int_0^1 \frac{f + g}{1 + g}\sin\lambda(x - s)\,w(s)\,ds \qquad (1.7)$$

Поскольку f и g — функции непрерывные, то решение (1.7) может быть с любой точностью найдено методом последовательных приближений

$$w_n = \sin\lambda x + \lambda\int_0^x H_n(x, s; \lambda)\sin\lambda s\,ds \qquad (1.8)$$

где резольвента H_n находится как сумма последовательных итераций ядра (1.7).

Удовлетворяя второе из граничных условий, из (1.8) получим характеристическое уравнение

$$\sin\lambda + \lambda\int_0^1 H_n(1, x; \lambda)\sin\lambda x\,dx = 0 \tag{1.9}$$

где первый положительный корень λ_1 определяет, при заданной функции $h(x)$, критическую силу $P_1 = \lambda_1^2 K_0 J_0/l^2$ по схеме Кармана или $P_1 = \lambda_1^2 E_0 J_0/l^2$ по схеме Шенли.

2. Допустим, что диаграмма упрочнения материала стержня мало отличается от линейной, а $h(x)$ — слабо и плавно меняющаяся функция. Тогда приближенно можно положить

$$\sigma = \gamma\lambda^2/(1+\omega) \cong \gamma\lambda^2(1-\omega), f(\sigma) \cong f(\gamma\lambda^2) - \gamma\lambda^2 f'(\gamma\lambda^2)\omega$$

$$g \cong \alpha\omega, (f+g)/(1+g) \cong f(\gamma\lambda^2) + \omega(\alpha - \alpha f(\gamma\lambda^2) - \gamma\lambda^2 f'(\gamma\lambda^2)) \equiv f(\gamma\lambda^2) + \omega f_1(\gamma\lambda^2)$$

В уравнении (1.9) ограничимся вторым приближением $H_2 = F_1 + \lambda F_2$, при этом с точностью до слагаемых с ω в первой степени

$$F_1(1, x; \lambda) = (f + f_1\omega(x))\ \sin\ \lambda(1-x)$$

$$F_2(1, x; \lambda) = \int_x^1 [f^2 + ff_1(\omega(y) + \omega(x))]\sin\lambda(1-y)\sin\lambda(y-x)\,dy$$

Тогда уравнение (1.9) примет окончательный вид

$$\sin\lambda + \lambda\int_0^1 [F_1(1, x; \lambda) + \lambda F_2(1, x; \lambda)]\sin\lambda x\,dx = 0 \tag{2.1}$$

Последующее изложение проведем для случая $|H_2| << 1$. Представим (2.1) в виде $\sin\lambda + \lambda\psi_0(\lambda) = 0$ и запишем выражение для его корня по методу Ньютона в первом приближении, положив $\lambda_0 = \pi$. Тогда будем иметь

$$\lambda_1 = \pi\,[1 + \psi_0(\pi)/(1 - \psi_0(\pi) - \pi\psi_0'(\pi))]$$

С учетом оценки для H_2 можно положить $\lambda_1 \cong \pi(1 + \psi_0(\pi))$, что на основании (2.1) приводит к результату

$$\lambda_1 = \pi\left(1 + \int_0^1 [F_1(1, x; \pi) + \pi F_2(1, x; \pi)]\sin\pi x\,dx\right) \tag{2.2}$$

Преобразуем $F_2(1, x; \pi)$, представив $\omega(y)$ разложением в ряд Тейлора по степеням $(y-x)$ в предположении существования и ограниченности всех нужных производных от $\omega(y)$. В результате найдем

$$F_2(1, x; \pi) = f\,[f\varphi_0(x) + f_1(2\omega(x)\varphi_0(x) + \omega'(x)\varphi_1(x) + \omega''(x)\varphi_2(x) + \ldots)],$$

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k!}\int_x^1 (y-x)^k \sin\pi(y-x)\sin\pi y\,dy \tag{2.3}$$

Подставив зависимость (2.3) в (2.2), придем к выражению

$$\frac{\lambda_1}{\pi} - 1 = 0{,}5f + f_1\int_0^1 \omega(x)\sin^2\pi x\,dx + \pi f^2\int_0^1 \varphi_0(x)\sin\pi x\,dx +$$

$$+ \pi ff_1\int_0^1 [2\omega(x)\varphi_0(x) + \omega'(x)\varphi_1(x) + \omega''(x)\varphi_2(x) + \ldots]\sin\pi x\,dx \tag{2.4}$$

Дальнейшее упрощение этой формулы может состоять в том, что можно положить $f_1 \cong \alpha$ и опустить слагаемые с производными от ω. Тогда

$$\frac{\lambda_1}{\pi} - 1 = 0{,}5f + \alpha \int_0^1 \omega(x)\,(\sin\pi x + 2\pi f\varphi_0(x))\sin\pi x\,dx \tag{2.5}$$

3. На основе решений (2.4), (2.5) может быть сформулирована задача оптимизации: определить функцию $\omega(x)$, так чтобы критическая сила достигла максимума. Следуя [4], введем максимизируемый функционал и ограничения

$$\varepsilon_1 = \int_0^1 (\sin\pi x + 2\pi f\varphi_0(x))\,\omega(x)\sin\pi x\,dx$$

$$\int_0^1 \omega(x)\,dx = 0, \quad \int_0^1 [\omega'(x)]^2\,dx \le C^2$$

где второе из ограничений означает условие сохранения объема стержня. Функция и обобщенный функционал Лагранжа будут иметь вид

$$L = (\sin\pi x + 2\pi f\varphi_0(x))\,\omega(x)\sin\pi x - \varkappa_1\omega(x) - \varkappa_2[\omega'(x)]^2$$

$$J^0 = \int_0^1 L(x)\,dx$$

Условие стационарности J^0 (классическая вариация) приводит после нормировки к уравнению

$$\omega'' = \varkappa_1 - \sin^2\pi x - 2\pi f\varphi_0(x)\sin\pi x \equiv \varkappa + \frac{\cos 2\pi x}{2} - 2\pi f\varphi_0(x)\sin\pi x$$

откуда следует

$$\omega = 0{,}5\varkappa x^2 + C_1x + C_2 - \frac{\cos 2\pi x}{8\pi^2} + \pi f\int_x^1 (y-x)^2\varphi_0(y)\sin\pi y\,dy \tag{3.2}$$

Для определения параметров $\varkappa$, C_1, C_2 служат граничные условия и первое из ограничений (3.1). В качестве граничных могут быть выбраны условия двух типов

$$\omega(0) = \omega(1) = -\delta\ (0 < \delta < 1),\ \omega'(0) = \omega'(1) = 0 \tag{3.3}$$

Во втором случае вследствие однородности условий в окончательное выражение для ω следует ввести нормирующий множитель.

Чтобы не загромождать изложение выкладками, проведем качественный анализ результатов в случае, когда интегральное слагаемое в (3.2) можно опустить. При условиях (3.3) соответственно получим

$$\omega^{(1)}(x) = -\left(\delta - \frac{1}{8\pi^2}\right)(1 - 6x(1-x)) - \frac{\cos 2\pi x}{8\pi^2} \quad \left(\frac{1}{8\pi^2} < \delta < 1\right)$$

$$\omega^{(2)}(x) = -\delta_1\cos 2\pi x \quad (0 < \delta_1 < 1)$$

С той же степенью точности из (3.1) найдем значения функционала ε_1: $\varepsilon_1^{(1)} = 1{,}5\delta/\pi^2 + (1 - 6/\pi^2)/(32\pi^2)$, $\varepsilon_1^{(2)} = 0{,}25\delta_1$, где второе слагаемое в выражении $\varepsilon_1^{(1)}$ мало в сравнении с первым (при $\delta = 0{,}2$ оно будет составлять ~0,04 от первого), поэтому можно принять $\varepsilon_1^{(1)} \cong 1{,}5\delta/\pi^2$. Отсюда следует, что эффект будет одинаковым, если $\varepsilon_1^{(1)} = \varepsilon_1^{(2)}$, т. е. при $\delta = \delta_1\pi^2/6$. Полученный результат качественно согласуется с известным из решения соответствующей упругой задачи

[5]: более выгодным оказывается такое распределение $h(x)$, при котором материал в большей степени концентрируется в центральной его части.

Отметим, что к решению системы (1.6) может быть применен энергетический подход в совокупности с одним из проекционных методов, который, вообще говоря, не приводит к вариационной постановке и возможности получить оценку сверху для критической силы (как, впрочем, и полученное выше решение). Как представляется, одно из преимуществ предложенного метода — это возможность на основе (1.9) анализировать весь спектр и сформулировать задачу на $\max(\lambda_1)_h$.

Подчеркнем, что для успешного применения предложенного способа существенны ограничения на h: $h > 0$, $|dh/dx| \ll 1$. Должно быть также выполнено условие полной пластичности $\sigma_{\min} = P/(S_0 h_{\max}) \geq \sigma_s$; выполнимость последнего для оптимальной формы должна быть проверена после решения задачи оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
3. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит. 1962. 351 с.
4. *Братусь А. С., Картвелишвили В. М.* Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций//Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 110—139.
5. *Баничук Н. В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука. 1986. 302 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.V.1991