МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1992

УДК 539.4

© 1992 г. Н. В. ЗВОЛИНСКИЙ, Б. С. ЧЕКИН

СОВМЕЩЕНИЕ С ПЛОСКОСТЬЮ УПРУГОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ МЕМБРАНЫ ПУТЕМ РАВНОМЕРНОГО ЕЕ РАСТЯЖЕНИЯ

В работе рассматривается натяжение эластичной пленки, мембраны, имеющей форму поверхности вращения, на плоскость. В зависимости от величины сил, равномерно распределенных по окружности, лежащей в некоторой плоскости, и растягивающих пленку, либо вся пленка будет натянута на плоскость, либо только ее часть.

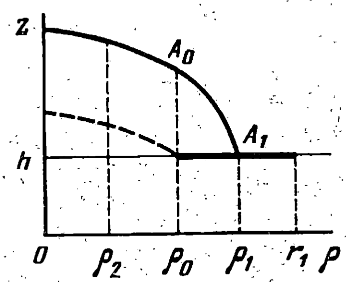
Результаты исследования используются в задаче, возникающей в офтальмологии при проектировании искусственного хрусталика. Естественный хрусталик помещается в хрусталиковой сумке. После удаления естественного хрусталика, периферические мышцы растягивают сумку и ее диаметр, первоначально равный диаметру естественного хрусталика, увеличивается. Знание этого увеличения важно для точного размера заготовляемого искусственного хрусталика.

1. Задача, рассмотренная в настоящей работе, имеет целью ответить на вопрос, возникающий в офтальмологии при проектировании искусственного хрусталика, долженствующего заменить хрусталик естественный, удаляемый при операции катаракты и других заболеваниях. Естественный хрусталик помещается в так называемой хрусталиковой сумке. Эта сумка образована тонкой эластичной пленкой, плотно прилегающей с обеих сторон к хрусталику, и имеет чечевицеобразную форму. По окружности хрусталиковая сумка поддерживается мышцами. После удаления естественного хрусталика сумка оказывается пустой и периферические мышцы, растягивая ее, превращают в плоскую мембрану (при операции только одна сторона сумки подвергается разрезу). Диаметр сумки, первоначально равный диаметру естественного хрусталика, увеличивается. Знание этого увеличения важно для точного размера заготовляемого искусственного хрусталика.

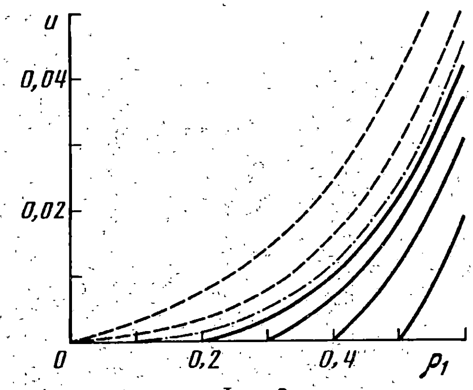
Вопрос о расчете увеличения диаметра хрусталиковой сумки поставлен хирургом-офтальмологом Борисом Николаевичем Алексеевым. Ниже предлагается ответ на этот вопрос, рассматривая равномерное по окружности растяжение мембраны, имеющей предварительно форму сферического сегмента. Общие соотношения и некоторые выводы делаются для произвольной поверхности вращения. Конкретные вычисления выполнены для сферического сегмента. Задача рассматривается в рамках геометрической нелинейности, однако упругие свойства мембраны предполагаются подчиняющимися линейному закону Гука.

2. Упругая пленка мембраны в ненапряженном состоянии имеет форму поверхности вращения. Пусть ρ, α, z — цилиндрические координаты. Поверхность пленки получается вращением кривой $z=\zeta_0(\rho)$ вокруг оси z. Будем растягивать пленку, прилагая однородные силы к границе (краю) пленки $\rho=\rho_1$ (фиг. 1) так, чтобы при деформации пленки эта граница оставалась в плоскости $z=h$.

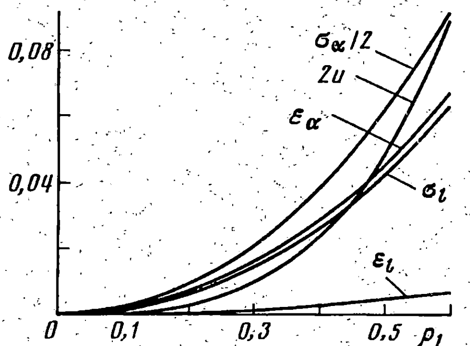
Далее мы покажем, что в результате такого растяжения часть пленки A_0A_1



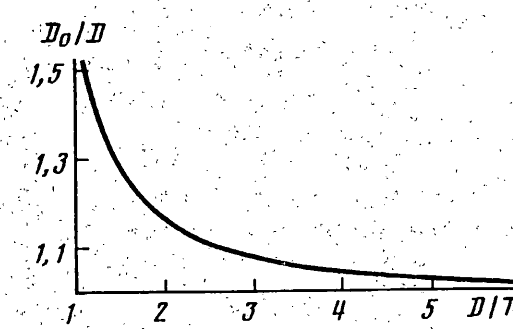
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

будет деформирована и окажется совмещенной с плоскостью $z = h$ и находиться в кольце $\rho_0 \le \rho \le r_1$. Остальная часть пленки будет находиться в ненапряженном состоянии. Можно, например, представить себе, что она опустится вниз на расстояние $\zeta_0(\rho_0) - h$. При достаточно большом натяжении вся пленка окажется натянутой на плоскость и напряжения в точке $\rho = 0$ будут равны нулю. При дальнейшем растяжении эти напряжения будут увеличиваться.

3. Пусть $\rho, \zeta_0(\rho)$ — лагранжевы координаты, $r = \rho + u(r)$, $z = \zeta(r)$, где $u(r)$ — смещение вдоль оси r, эйлеровы координаты деформированной пленки.

Если в недеформированном состоянии расстояние между двумя бесконечно близкими точками пленки обозначить dS_0, то

$$dS_0^2 = d\rho^2 + (\rho d\alpha)^2 + dz^2 = [1 + (\zeta_0'(\rho))^2]\,[1 - u'(\rho)]^2 dr^2 + (1 - u/r)^2 (r d\alpha)^2$$

В деформированном состоянии это расстояние изменится

$$dS^2 = [1 + (\zeta'(r))^2] dr^2 + (r d\alpha)^2$$

Введем деформации пленки $\varepsilon_l, \varepsilon_\alpha$ следующим образом [1]:

$$dS^2 - dS_0^2 = 2\varepsilon_l dl^2 + 2\varepsilon_\alpha (r d\alpha)^2$$

где $dl = \sqrt{1 + [\zeta'(r)]^2}\, dr$ — элемент длины дуги кривой $z = \zeta(r)$. Тогда

$$2\varepsilon_l = 1 - [1 - u'(r)]^2 \frac{1 + [\zeta_0'(\rho)]^2}{1 + [\zeta'(r)]^2}$$

$$2\varepsilon_\alpha = 2\frac{u}{r} - \left(\frac{u}{r}\right)^2, \quad \rho = r - u(r)$$

Уравнения равновесия можно записать в виде

$$\zeta''(r) = -\frac{\zeta'(r)}{r}[1 + (\zeta'(r))^2]\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_l} \tag{3.1}$$

$$\sigma_l'(r) = -(\sigma_l - \sigma_\alpha)/r \tag{3.2}$$

где σ_l, σ_α — напряжения, соответствующие деформациям ε_l, ε_α. Соотношения (3.1), (3.2) — это система двух дифференциальных уравнений второго порядка для определения $u(r)$, $\zeta(r)$. Эту систему можно один раз проинтегрировать и получить

$$r\sigma\zeta'(r) = C_0\sqrt{1 + (\zeta'(r))^2} \tag{3.3}$$

где C_0 — произвольная постоянная. С целью разъяснить физический смысл равенства (3.3), вырежем из осесимметричной мембраны элемент двумя плоскими меридиональными сечениями и двумя круговыми цилиндрами с осью Oz. Проекция на ось Oz равнодействующей внутренних напряжений, действующих на выраженный элемент, равна нулю. Следствие этого утверждения является равенство (3.3).

4. Предположим, что напряжение $\sigma_l(r)$ — ограниченная функция. Тогда постоянная $C_0 = 0$ и из уравнения (3.3) следует: либо напряжение $\sigma_l(r)$ везде равно нулю и, следовательно, $\sigma_\alpha = 0$ и пленка будет находиться в ненапряженном состоянии, либо везде $\zeta'(r) = 0$ и пленка будет совмещена с плоскостью $z = h$.

При достаточно малом растяжении пленку нужно разбить на две части $0 \le \rho \le \rho_0$ и $\rho_0 \le \rho \le \rho_1$. Часть $0 \le \rho \le \rho_0$ останется в ненапряженном состоянии. При $\rho = \rho_0$ поверхность пленки испытывает излом. Другая часть $\rho_0 \le \rho \le \rho_1$ будет натянута на плоскость. Уравнение (3.3) превращается в тождество.

Часть пленки, совмещенная с плоскостью и заполняющая кольцо $\rho_0 \le \rho \le \rho_1$, находится в обобщенном плоском напряженном состоянии и поэтому, предполагая линейную зависимость между напряжениями и деформациями, можно написать

$$\sigma_l = \nu\varepsilon_l + \lambda'\varepsilon_\alpha, \sigma_\alpha = \lambda'\varepsilon_l + \nu\varepsilon_\alpha$$

$$\lambda' = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu), \nu = \lambda' + 2\mu$$

Здесь λ, μ — коэффициенты Ляме.

Для определения смещения $u(r)$ нужно решить уравнение второго порядка (3.2) на отрезке $r_0 = \rho_0 \le r \le r_1$, где $r_1 = \rho_1 + u(r_1)$. При $r = r_0$, очевидно, нужно требовать $\sigma_l = \sigma_\alpha = 0$. Это требование эквивалентно граничным условиям

$$u(r_0) = 0, \quad u'(r_0) = 1 - \frac{1}{(1 + [\zeta_0'(\rho_0)]^2)^{1/2}} \tag{4.1}$$

При достаточно большом растяжении, когда вся пленка будет совмещена с плоскостью, также должно использоваться уравнение (3.2). Одним из граничных условий должно быть

$$u(0) = 0. \tag{4.2}$$

В качестве другого условия можно, например, взять

$$\sigma_l(0) = \sigma_0 > 0 \tag{4.3}$$

или

$$u(r_1) = r_1 - \rho_1 \tag{4.4}$$

где σ_0, r_1 — заданы.

Можно рассматривать пленки, поверхность которых не односвязна. Пусть поверхность пленки имеет две границы (края): $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$ (рис. 1). Если граница $\rho = \rho_2$ свободна от напряжения, $\sigma_l = 0$, то постоянная в уравнении (3.3) $C_0 = 0$ и решение задачи сводится опять к решению уравнения (3.2) с граничными условиями (4.1), если вся пленка уже совмещена с плоскостью, условиями $\sigma_l(0) = 0$ и (4.4).

5. Рассмотрим пленку, имеющую форму сферического сегмента. Введем безразмерные координаты: напряжения нормируем на модуль сдвига μ, смещение u и координаты ρ, r на радиус сферы. В этом случае

$$\zeta_0(\rho) = \sqrt{1-\rho^2}, \quad 0 \le \rho \le \rho_1 \le 1$$

$$h = \sqrt{1-\rho_1^2}$$

Сегмент, который определяется лишь одним параметром ρ_1, будем натягивать на плоскость $z = h$. Смещение u находим, решая задачу Коши для уравнения второго порядка (3.2), в котором необходимо положить $\zeta'(r) = 0$, с граничными условиями (4.1), или, если вся пленка натянута на плоскость, с граничными условиями (4.2), (4.3). Результаты вычислений для случая $\lambda = \mu$ представлены на фиг. 2 и 3.

На фиг. 2 даны зависимости смещения края пленки от размера сферического сегмента ρ_1 при фиксированных значениях ρ_0. Штрих-пунктирная кривая соответствует случаю, когда вся пленка натянута на плоскость ($\rho_0 = 0$) и напряжения в центре $\rho = 0$ равны нулю. Кривые, расположенные ниже этой кривой, вычислены для значений $\rho_0 = 0{,}2$, $\rho_0 = 0{,}3$, $\rho_0 = 0{,}4$, $\rho_0 = 0{,}5$. Штриховые кривые соответствуют положительным напряжениям σ_l в точке $\rho = 0$ и вычислены для значений $\sigma_l = 0{,}0333$ и $\sigma_l(0) = 0{,}1$.

На рис. 3 представлена зависимость напряжений и деформаций от ρ_1 для случая $\rho_0 = 0$, $\sigma_l(0) = 0$.

6. Решенная задача позволяет ответить на поставленный вначале вопрос об изменении диаметра хрусталиковой сумки. Сформулируем наш результат, обращаясь к тем величинам, с которыми непосредственно имеет дело хирург. Исходными данными являются диаметр D естественного хрусталика и его толщина T по центру. Эти величины могут быть измерены средствами ультразвука. Предполагая поверхности хрусталика сферическими и, для упрощения, симметричными, можем выразить радиус R сферического сегмента (радиус сферы) в виде

$$R = {}^1/_4\,(T^2 + D^2)/T$$

а безразмерную величину ρ_1 в виде

$$\rho_1 = \frac{D}{2R} = \frac{2D/T}{1 + (D/T)^2}$$

Если обозначить через D_0 диаметр растянутой хрусталиковой сумки, то

$$D_0/D = 1 + u(\rho_1)/\rho_1$$

Упругие свойства пленки неизвестны и для расчета взято некоторое среднее значение модулей упругости $\lambda/\mu = 1$. Отношение D_0/D в функции D/T представлено на фиг. 4. Были проведены также вычисления этого отношения для других значений λ/μ. Полученные кривые мало отличались от кривой фиг. 4. Например, если $0{,}5 \le \lambda/\mu \le 2$, то при $D/T \ge 1{,}1$ кривые отличаются от кривой, соответствующей $\lambda/\mu = 1$, не более, чем на 1,5%.

Если пленка растянута до неполного совмещения с плоскостью или в исходном состоянии была уже в какой-то степени напряжена, то увеличение ее диаметра будет меньше. Поэтому можно думать, что рис. 4 дает наибольшее возможное отношение D_0/D.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во ин. лит., 1963, 228 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.VII.1992