

УДК 539.3

1992 г. В. В. ГРИБОВА, О. В. ОНИЩУК, Г. Я. ПОПОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ ПЛАСТИН С ЛИНЕЙНЫМИ ОПОРАМИ, ВЫХОДЯЩИМИ НА ЗАЩЕМЛЕННУЮ ГРАНИЦУ

Предлагаемая статья относится к созданному в 1977—1987 годах научному направлению, посвященному исследованию взаимодействия пластин и оболочек Кирхгофа — Лява с жесткими телами в случае, когда областью контакта является отрезок линии, один или оба конца которого находятся внутри области, занятой оболочкой. Для решения таких задач было предложено два подхода [1], один из которых принадлежит В. М. Толкачеву, а другой Г. Я. Попову. В связи с тем, что подход Г. Я. Попова был инициирован неопубликованной рукописью В. М. Толкачева и впервые опубликован в [2], представляется важным обсудить приоритетную сторону дела, тем более что в предыдущих работах авторов этому вопросу не уделялось достаточно внимания.

1. Обзорная статья [1] по инициативе Н. Х. Арутюняна была заказана редакцией журнала МТТ в начале 1977 года Г. Я. Попову, который привлек к работе над ней В. М. Толкачева, успешно занимавшегося контактными задачами теории оболочек. При написании раздела, посвященного контакту по отрезку линии, В. М. Толкачевым было предложено решение модельной задачи о взаимодействии неограниченной пластинки с линейным штампом: область контакта — отрезок $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$ (см. также [3]) и с этим решением он ознакомил Г. Я. Попова. Основные положения подхода В. М. Толкачева состоят в следующем: а) выбор контактных реакций в виде погонных усилий (скачка перерезывающих сил) с интегрируемыми особенностями $q(x) = q_0(x)(1-x^2)^{-1/2}$ не позволяет удовлетворить всем условиям задачи (не дает нужного числа произвольных констант); б) всем условиям задачи можно удовлетворить, если предположить, что контактные реакции состоят из погонных усилий $q(x) = q_0(x)(1-x^2)^{-1/2}$, сосредоточенных сил P_1 на концах $x = \pm 1$ зоны контакта и распределенных по зоне контакта погонных моментов с интегрируемыми особенностями $M(x) = m_0(x)(1-x^2)^{-1/2}$, т. е. прогиб пластинки записать в виде

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 [R^2 \ln Rq(\tau) + (x - \tau)(\ln R^2 + 1)M(x)] d\tau + \quad (1.1)$$

$$+ \frac{1}{8\pi} P_1 (R_1^2 \ln R_1 + R_2^2 \ln R_2)$$

$$R^2 = (x - \tau)^2 + y^2, \quad R_1^2 = (x - 1)^2 + y^2, \quad R_2^2 = (x + 1)^2 + y^2$$

Как показали дальнейшие исследования, оба сформулированных В. М. Толкачевым положения являются правильными, хотя доказательство пункта (а) может показаться не достаточно строгим, а построения пункта (б) оказываются громоздкими даже для простой модельной задачи. Это побудило Г. Я. Попова

решить эту модельную задачу другим путем и перенести его на более сложную задачу об изгибе прямолинейной пластинки с линейным включением [4], которую он вместе с О. В. Онищуком начал решать. Он решил отказаться от привлечения распределенной моментной нагрузки и использовать только погонные усилия $q(x) = \psi(x)$. При этом прогиб бесконечной пластины $w(x, y)$ записывается в виде

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 R^2 \ln R \psi(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

а для определения $\psi(x)$ получается интегральное уравнение

$$\frac{1}{8\pi} \int_{-1}^1 (x - \tau)^2 \ln |x - \tau| \varphi(\tau) d\tau = W_0 + W_1 x \quad (1.3)$$

Было обнаружено, что если в соотношении (24) работы [5] положить формально $a = -3/2$, $k = -3$, $m > 2$ и считать, что производная минус второго порядка соответствует двукратному взятию первообразной, то получается спектральное соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (x - \tau)^2 \ln |x - \tau| \frac{P_m^{-3/2, -3/2}(\tau)}{(1 - \tau^2)^{3/2}} d\tau = \frac{P_m^{-3/2, -3/2}(x)}{m(m-1)(m-2)} \quad (1.4)$$

позволяющее применить для решения уравнения (1.3) метод ортогональных многочленов [6, 7].

Кроме того, с учетом связи между $M(x)$ и P_1 можно путем интегрирования по частям прийти от представления (1.1) к представлению (1.2) при

$$\varphi(x) = (\zeta_0(x) - m_0'(x)) (1 - x^2)^{-1/2} - m_0(x) (1 - x^2)^{-3/2} \quad (1.5)$$

Формулы (1.4), (1.5) сыграли роль наводящих рассуждений при разработке метода, основанного на использовании только погонных усилий с неинтегрируемыми особенностями $\psi(x) = \psi_0(x) (1 - x^2)^{-3/2}$. Сам метод был разработан к началу 1978 года, когда Г. Я. Поповым было получено строгое доказательство соотношения (1.4) с использованием аппарата регуляции расходящихся интегралов [8]. Им также было доказано отсутствие интегрируемого решения интегрального уравнения для задачи, рассмотренной в [4]. Подтверждением приемлемости с точки зрения механики использования контактных усилий с неинтегрируемыми особенностями явились данная О. В. Онищуком механическая интерпретация равенства $\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-3/2} dx = 0$, а также численные результаты, полученные им при решении рассмотренной в [4] задачи.

Суммируя вышесказанное, еще раз подчеркнем, что метод В. М. Толкачева был разработан раньше и являлся стимулом для разработки метода Г. Я. Попова, эквивалентность же представлений (1.1) и (1.2) приводит к совпадению решений, построенных обоими методами.

Настоящая статья, хотя и основана на идеях подхода Г. Я. Попова, существенно отличается от предыдущих публикаций [4, 7] тем, что разбиваемые в ней задачи не формулируются в виде интегрального уравнения, а решение соответствующей краевой задачи изгиба пластин строится в виде линейной комбинации функций, несущих требуемые неинтегрируемые особенности в соответствующих сингулярных точках краевой задачи

2. Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная пластина ($0 \leq x \leq a$, $|y| \leq b_1 = b/2$), сторона которой $x=0$, $|y| \leq b_1$ закреплена, сторона $x=a$, $|y| \leq b_1$ свободна, варианты одинаковых граничных условий на сторонах

$y = \pm b_1$, $0 \leq x \leq a$ указаны ниже. Внутри пластинки на отрезке $y = 0$, $0 < x < c$ расположена абсолютно жесткая линейная опора, выходящая на защемленную сторону. Математически задача формулируется следующим образом: найти прогиб $w(x, y)$, удовлетворяющий следующему уравнению и граничным условиям:

$$D\Delta^2 w(x, y) = q(x, y) \quad (0 < x < a, |y| < b_1 \text{ кроме } y = 0, 0 \leq x \leq c) \quad (2.1)$$

$$w = w_x' = 0 \quad (x = 0, |y| < b_1) \quad (2.2)$$

$$M_x = V_x = 0 \quad (x = a, |y| < b_1) \quad (2.3)$$

$$\text{для задачи A: } w = w_y' = 0 \quad (y = \pm b_1, 0 < x < a) \quad (2.4)$$

$$\text{для задачи B: } w = M_y = 0 \quad (y = \pm b_1, 0 < x < a)$$

$$\text{для задачи C: } w_y' = V_y = 0 \quad (y = \pm b_1, 0 < x < a)$$

$$\text{для задачи D: } M_y = V_y = 0 \quad (y = \pm b_1, 0 < x < a)$$

$$w = w_y' = 0 \quad (y = 0, 0 \leq x \leq c) \quad (2.5)$$

Пусть нагрузка $q(x, y)$ симметрична относительно оси x , и, следовательно, $w(x, y)$ четна по y . Приближенное решение задачи будем разыскивать в виде

$$w(x, y) = w_0(x, y) + w_1(x, y) + w_q(x, y) \quad (2.6)$$

$$w_0(x, y) = \sum_{k=1}^N (a_k \operatorname{Re}(z - z_0)^{k-1} + b_k \operatorname{Re}[(\bar{z} - \bar{z}_0)(z - z_0)^k]) \quad (2.7)$$

$$w_1(x, y) = \sum_{k=1}^N c_k w_k(z), \quad z = x + iy = r \exp i\theta, \quad \bar{z} = x - iy, \quad z_0 = a/2 \quad (2.8)$$

$w_q(x, y)$ — четное по y частное решение уравнения $\Delta^2 w(x, y) = q(x, y)$.

Слагаемые в (2.7) являются бигармоническими многочленами и приведены, например, в [9]. Они обычно используются при решении бигармонических задач для областей с гладкими границами. Наличие опоры требует привлечения функций $w_k(z)$, учитывающих наличие особых точек $x = 0$, $y = 0$, и $x = 0$, $y = c$, а также скачка обобщенных перерезывающих сил на опоре

$$V_y(x, -0) - V_y(x, +0) = \psi(x), \quad (0 < x < a, \psi(x) \equiv 0 \text{ при } c < x < a) \quad (2.9)$$

(см., например [10]). Построению такой системы функций посвящен п. 2.

Функция (2.6) удовлетворяет уравнению (2.1) для любых a_k , b_k , c_k

($k = \overline{1, N}$). Коэффициенты a_k , b_k , c_k находятся ниже при удовлетворении граничным условиям (2.2)–(2.5).

3. Построение системы бигармонических функций, учитывающих наличие опоры. Функции $w_k(z) = w_k(r, \theta)$ ($k = 1, 2, 3 \dots$) выберем как решения краевых задач для полубесконечной пластинки ($0 < r < \infty$, $-1/2\pi < \theta < 1/2\pi$), защемленной по краю $\theta = \pm 1/2\pi$, $0 < r < \infty$ и содержащей на отрезке $\theta = 0$, $0 < r < c$ абсолютно жесткое линейное включение

$$D\Delta^2 w_k(r, \theta) = 0 \quad (0 < r < \infty, -1/2\pi < \theta < 1/2\pi, \text{ кроме } \theta = 0, 0 < r < c) \quad (3.1)$$

$$w(r, 0) = r^{k+1} \quad (0 < r < c), \quad Dw_{k,\theta\theta\theta}'(r, 0) = 0 \quad (c < r < \infty) \quad (3.2)$$

$$w_{k,\theta}'(r, 0) \quad (0 < r < \infty) \quad (3.3)$$

$$w_k(r, \pm 1/2\pi) = w_{k,\theta}'(r, \pm 1/2\pi) = 0 \quad (0 < r < \infty) \quad (3.4)$$

Далее для удобства выкладок полагаем $s = 1$. Применяя к данной задаче интегральное преобразование Меллина, получим следующую краевую задачу относительно трансформанты Меллина

$$w_p(\theta) = \int_0^\infty w_k(r, \theta) r^{p-2} dr, \quad w^k(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} w_p(\theta) r^{1-p} dp \quad (3.5)$$

$$w_p^{IV} + 2(p^2 + 1)w_p'' + (p^2 - 1)^2 w_p(\theta) = 0 \quad (|\theta| < 1/2\pi) \quad (3.6)$$

$$w_p(0) = (k + p)^{-1} + F^+(p), \quad Dw_p'''(0) = \Phi^-(p) \quad (3.7)$$

$$F^+(p) = \int_1^\infty w_k(r, +0) r^{p-2} dr, \quad \Phi^-(p) = \int_0^1 w_{k,\theta\theta\theta}''(r, +0) r^{p-2} dr \quad (3.8)$$

$$w_p'(0) = 0 \quad (3.9)$$

$$w_p(\pm \pi/2) = w_p'(\pm \pi/2) = 0 \quad (3.10)$$

где $F^+(p)$, $\Phi^-(p)$ — неизвестные функции.

Решая дифференциальное уравнение (3.6) и удовлетворяя граничным условиям (3.7)–(3.10), приходим к следующей задаче Римана

$$F^+(p) + \frac{\sin^2 1/2\pi p - p^2}{2p(p^2 - 1) \sin 1/2\pi p \cos 1/2\pi p} \Phi^-(p) + \frac{1}{k + p} = 0 \quad (3.11)$$

Задача (3.11) после замены p на $p-2$ совпадает с задачей (3.4) работы [10]. Находя $F^+(p)$, $\Phi^-(p)$ методом факторизации аналогично [10], получаем

$$F^+(p) = -\frac{1}{k + p} \left(1 - \frac{G^+(p)}{G^+(-k)} \right) \quad (3.12)$$

$$\Phi^-(p) = -\frac{1}{(k + p) G^-(p) G^+(-k)} \quad (3.13)$$

$$G^+(p) = K^+(p) \Gamma(1/2(1 - p)) / [2(p - 1) \Gamma(1 - 1/2 p)] \quad (3.14)$$

$$G^-(p) = K^-(p) \Gamma(1/2(1 + p)) / [2(p + 1) \Gamma(1 + 1/2 p)] \quad (3.15)$$

$$\|K^+(p), K^-(p)\| = \begin{cases} \|K(p) E(p), 1/E(p)\| & (\operatorname{Re} p > 0) \\ \|E(p), 1/E(p)\| [K(p)]^{1/2} & (\operatorname{Re} p = 0) \\ \|E(p), K(p)/E(p)\| & (\operatorname{Re} p < 0) \end{cases} \quad (3.16)$$

$$E(p) = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi i}^{\infty} \ln K(t) \frac{dt}{t - p} \right), \quad K(p) = 1 - \frac{p^2}{\sin^2 1/2\pi p}$$

В [10] показано, что $\Phi^-(p) = O(p^{1/2})$ при $p \rightarrow \infty$. Рост $\Phi^-(p)$ при $p \rightarrow \infty$ допускается при использовании преобразования Меллина обобщенных функций и указывает на наличие неинтегрируемых особенностей у функций (2.9):

$$\psi(x) = O((1 - x)^{-3/2}) \text{ при } x \rightarrow 1 \quad (3.17)$$

Решение задачи (3.6)–(3.10) имеет вид

$$w_p(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k + p} + F^+(p) + \frac{\operatorname{ctg} 1/2\pi p}{2(p^2 - 1)} \Phi^-(p) \right) \cos(p - 1)\theta + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k + 1} + F^+(p) - \frac{\operatorname{ctg} 1/2\pi p}{2(p^2 - 1)} \Phi^-(p) \right) \cos(p + 1)\theta +$$

$$+ \frac{1}{4p(p-1)} \Phi^-(p) \sin(p-1)\theta - \frac{1}{4p(p+1)} \Phi^-(p) \sin(p+1)\theta$$

Подставим (3.18) в (3.5), вычислим соответствующие контурные интегралы по теореме о вычетах и перейдем к комплексной переменной z . В итоге получаем

$$w_k(z) = \begin{cases} U_k(z) + V_k(z), & r < 1, |\theta| \leq \pi/2 \\ W_k(z), & r \geq 1, |\theta| \leq \pi/2 \end{cases} \quad (3.19)$$

$$U_k(z) = \begin{cases} \operatorname{Re} xz^k, & (k = 1, 3, 5, \dots) \\ 1/2 \operatorname{Re} ((k-1)z^{k+1} + (k+1)\bar{z}z^k) k^{-1}, & (k = 2, 4, 6, \dots) \end{cases} \quad (3.20)$$

$$V_k(z) = \frac{1}{G^+(-k)} \sum_{n=1}^{\infty} (v_k(z, p_n, -1) + v_k(z, q_n, 1)) \quad (3.21)$$

$$v_k(z, p, d) = \frac{cG^+(p)}{(4\pi c + 8d)(p+k)} \left[2icdy(z^{-p} - \bar{z}^{-p}) - \right. \quad (3.22)$$

$$\left. - i(p+1)(z^{1-p} - \bar{z}^{1-p}) + i(p-1)(\bar{z}z^{-p} - \bar{z}\bar{z}^{-p}) \right], \quad c = c(p) = \cos 1/2\pi p \quad (3.23)$$

$$W_k(r, \theta) = \frac{1}{2\pi G^+(-k)} \sum_{n=1}^{\infty} W_{kn}(r, \theta)$$

$$W_{kn}(z) = \left[\frac{1}{G^-(2n)(k+2n)} \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{z}z^{-2n}}{2n+1} + \frac{z^{1-2n}}{2n-1} \right) - \right. \quad (3.24)$$

$p_n, q_n (n=1, 2, \dots)$ находятся как корни трансцендентных уравнений

$$\sin 1/2\pi p = p, \sin 1/2\pi q = -q \quad (\operatorname{Re} p < 0, \operatorname{Re} q < 0, \operatorname{Im} p > 0, \operatorname{Im} q > 0)$$

$$p_n = O(n), q_n = O(n), v_k(r, \theta, p_n, -1) = O(n^{-1/2}r^n),$$

$$v_k(r, \theta, q_n, 1) = O(n^{-1/2}r^n), W_{kn}(r, \theta) = O(n^{-3/2}r^{-2n}) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

При $r \neq 1$ ряды (3.21) и (3.23) сходятся со скоростью геометрической прогрессии и функции V_k и W_k являются бесконечно дифференцируемыми. При $r = 1$ ряд (3.23) сходится медленно, ряды из производных (при вычислении моментов и перерезывающих сил) будут расходиться.

Используя формулу 5.2.11.16 [11], перепишем $W_k(z)$ в виде

$$\begin{aligned} W_k(z) = & \frac{1}{2\pi G^+(-k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2\Gamma(n+1)}{K^-(2n)\Gamma(n+1/2)(k+2n)} - \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} \right) \operatorname{Re} \bar{z}z^{-2n} + \right. \\ & + \left(\frac{2(2n+1)\Gamma(n+1)}{(k+2n)\Gamma(n+1/2)K^-(2n)} - \frac{(2n-1)\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+2)} \right) \operatorname{Re} \frac{z^{1-2n}}{2n-1} - \\ & - \left(\frac{2n\Gamma(n-1/2)}{K^-(2n-1)\Gamma(n)(k+2n-1)} - \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} \right) 2x \operatorname{Re} z^{1-2n} \Big] + \\ & + \frac{\pi^{-1/2}}{2G^+(-k)} \operatorname{Re} \left[(z^2-1)^{3/2}z(z+1)^{-1/2} + (1-\bar{z})z \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{1/2} + \right. \\ & \left. + (z-1)(\bar{z}-z^2) - 1/2z \right] \end{aligned}$$

Члены полученного ряда ведут себя как $O(n^{-3/2}r^{-2n})$ при $n \rightarrow \infty$.

Наличие выражений, содержащих $(z^2-1)^{3/2}$ и $(1-\bar{z})(z-1)^{1/2}$, показывает, что соответствующее выражение для обобщенной перерезывающей силы содержит $(z^2-1)^{-3/2}$, т. е. на конце опоры, расположенном внутри пластины, особенность

контактных усилий совпадает с особенностью, полученной в [4, 7] для задач об изгибе пластин с тонкими включениями.

4. Численная реализация метода. Пусть в точке $x = d$, $y = 0$ на пластинку действует сосредоточенная сила, т. е. $q(x, y) = P \delta(x - d) \delta(y)$, тогда

$$w_q(x, y) = \frac{P}{8\pi} R^2 \ln R, \quad R^2 = (x - d)^2 + y^2$$

Функция (2.6) четна по y , поэтому второе из условий (2.5) удовлетворяется при любых значениях a_k , b_k , c_k ($k = \overline{1, N}$).

Для удовлетворения первого из условий (2.5) потребуем, чтобы прогибы $w(x, 0)$ ($0 < x < 1$) были ортогональны функциям

$$\theta_l(x) = w_{l,yyy}''(x, 0) \quad (l = \overline{1, N}) \quad (4.1)$$

аналогично тому, как это делалось при решении интегрального уравнения методом базисных правых частей в [10]. Указанное требование записывается в виде:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 w_q(x, 0) \theta_l(x) dx &= \sum_{k=1}^N \left(a_k \int_0^1 (x - x_0)^{k-1} \theta_l(x) dx + \right. \\ &+ b_k \int_0^1 (x - x_0)^{k+1} \theta_l(x) dx + c_k \int_0^1 w_k(x, 0) \theta_l(x) dx \left. \right) \quad (l = \overline{1, N}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для вычисления входящих в (4.2) интегралов введем обозначение

$$\Psi_l(k) = \int_0^1 x^{k+1} \theta_l(x) dx \quad (4.3)$$

С учетом (2.9), (3.8), (3.17) получаем

$$\theta_l(x) = r^{-3} w_{l,000}''' = O((1-x)^{-3/2}) \text{ при } x \rightarrow 1-0$$

Следовательно, интеграл $\Psi_l(k)$ является расходящимся и его следует понимать в регуляризованном смысле. Как и в [10], регуляризация осуществляется посредством применения преобразования Меллина обобщенных функций. На основании (3.8), (3.13) получаем

$$\Psi_l(k) = \Phi^-(k) = - \frac{1}{(k+1) G^-(k) G^+(-l)} \quad (4.4)$$

$$\int_0^1 (x - x_0)^{k-1} \theta_l(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i (-x_0)^{k-1-i} \Psi_l(i-1) = A_{lk}$$

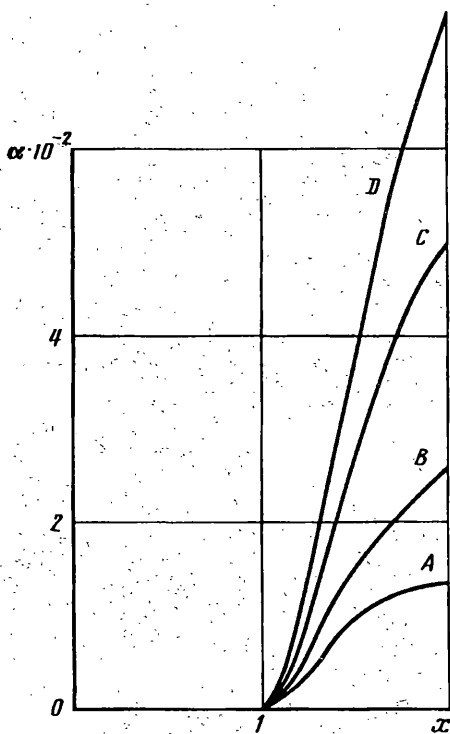
$$\int_0^1 (x - x_0)^{k+1} \theta_l(x) dx = \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i (-x_0)^{k+1-i} \Psi_l(i-1) = B_{lk}$$

$$\int_0^1 w_k(x, 0) \theta_l(x) dx = \Psi_l(k) = C_{lk}, \quad C_{lk} = \frac{k!}{i! (k-i)!}$$

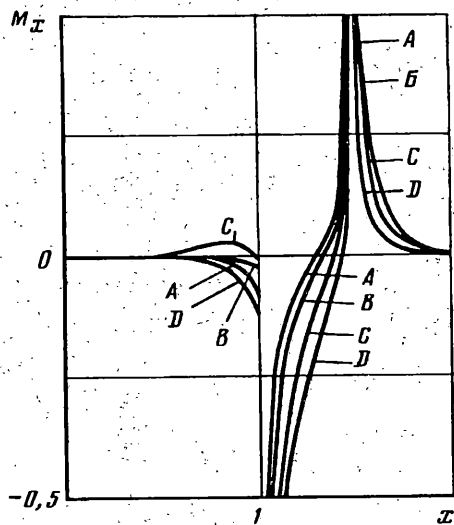
(при вычислении C_{lk} использовано условие (3.2)).

Разлагая функцию $w_q(x, 0)$ в степенной ряд по формуле 1.511 [12], получаем

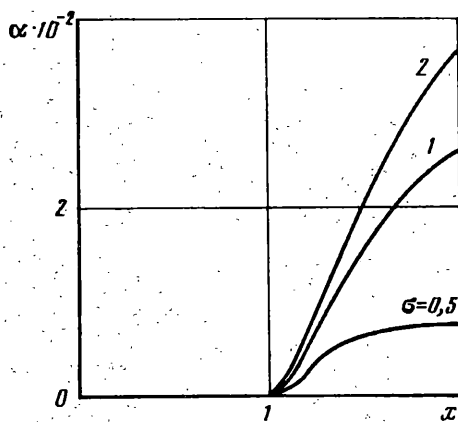
$$- \int_0^1 w_q(x, 0) \theta_l(x) dx = \frac{1}{8\pi} \left(\ln d (\Psi_l(1) - 2d\Psi_l(0) + d^2\Psi_l(-1)) - \right.$$



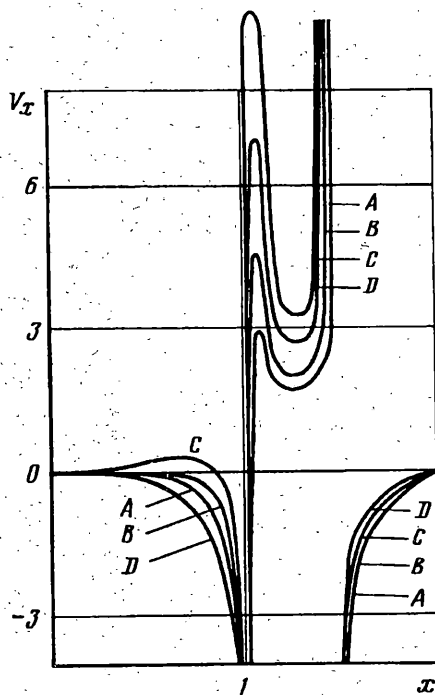
Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2



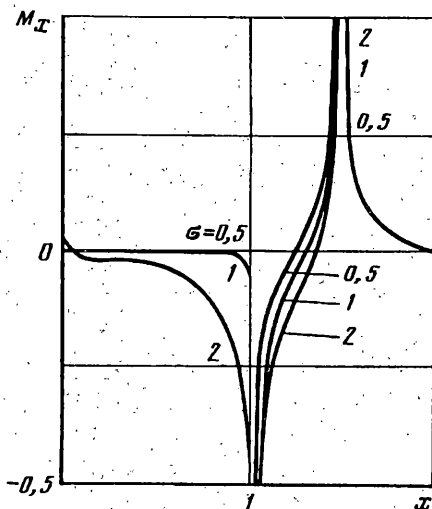
Фиг. 4

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kd^k} (\Psi_l(k+1) - 2d\Psi_l(k) + d^2\Psi_l(k-1)) = D_l$$

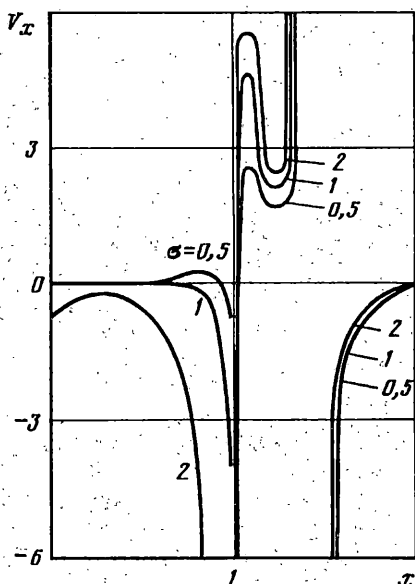
В итоге (4.2) переписывается в виде:

$$D_l = \sum_{k=1}^N (a_k A_{lk} + b_k B_{lk} + c_k C_{lk}) \quad (l = \overline{1, N}) \quad (4.5)$$

Граничным условиям (2.2) — (2.4) удовлетворим методом граничной коллока-



Фиг. 5



Фиг. 6

ции, для чего на сторонах пластины выберем по $M = N/3$ точек коллокации (аналогично [13]):

$$\begin{aligned} x = 0, \quad y_i &= b_i \cos((2i-1)\pi/(4M)), \quad i = \overline{1, M} \\ y = b_1, \quad x_i &= a \cos((2i-1)\pi/(4M)), \quad i = \overline{1, M} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Требую удовлетворения граничных условий (2.2)–(2.4) в точках коллокации (4.6) и добавляя уравнения (4.5), получим систему $3N$ линейных алгебраических

уравнений относительно $3N$ неизвестных a_k, b_k, c_k ($k = \overline{1, N}$).

4. Результаты счета. Расчеты, проведенные для случая $a = 2, c = 1, d = 1.5$ и различных значений $\sigma = ba^{-1}$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0, 3$. Получены значения прогибов, изгибающих моментов, обобщенных перерезывающих сил для задач A, B, C, D .

На фиг. 1 для случая $\sigma = 1$ (квадратная пластинка) приведены графики безразмерной величины $a(\sigma) = w(x, 0) DP^{-1} a^{-2}$ для задач A, B, C, D . Прогибы равны нулю на опоре и растут за ней. Наименьшие прогибы соответствуют задаче A , наибольшие — задаче D . На фиг. 2 приведены графики $a(\sigma)$, полученные для задачи B при различных соотношениях размеров пластины σ . Наибольшие прогибы соответствуют случаю $\sigma = 2$ (вытянутая по y пластина), наименьшие — $\sigma = 0.5$.

На фиг. 3 для случая $\sigma = 2$ приведены графики изгибающего момента M_x , на фиг. 4 графики обобщенной перерезывающей силы V_x вдоль линии $y = 0, 0 \leq x \leq a$ для задач A, B, C, D . На фиг. 5 приведены графики изгибающего момента M_x , фиг. 6 графики обобщенной перерезывающей силы V_x вдоль линии $y = 0, 0 \leq x \leq a$ для задачи B при различных σ . Расположение значений σ соответствует расположению кривых по вертикали.

При $r \rightarrow c + 0$ $M_x = O((r-c)^{-1/2})$, $V_x = O((r-c)^{-3/2})$, при $r \rightarrow d \pm 0$ $M_x = O(\ln|r-d|)$, $V_x = O((r-d)^{-1})$, при $r \rightarrow a$ $M_x \rightarrow 0$, $V_x \rightarrow 0$.

Отметим, что задача B была решена в [10], где при решении существенно

использовалось условие опирания по сторонам $y = \pm b_1$, $0 \leq x \leq a$, и требовалось, чтобы отношение $\lambda = c/b_1 < 1/2$. Данный метод снимает эти ограничения и позволяет получить в удобном для вычислений виде выражения для прогибов, изгибающих моментов и обобщенных перерезывающих сил.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Г. Я., Толкачев В. М. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами//Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 192—206.
2. Онищук О. В., Попов Г. Я. О некоторых бигармонических проблемах с неинтегрируемыми решениями//2 респ. симпоз. по дифференц. и интегр. уравнениям: Тез. докл. Одесса: ОГУ, 1978. С. 60.
3. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 411 с.
4. Онищук О. В., Попов Г. Я. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями// Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 141—150.
5. Попов Г. Я. Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби//Укр. матем. журнал. 1968. Т. 20, № 4. С. 540—547.
6. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания Киев; Одесса: Вища школа, 1982. 167 с.
7. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
8. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Гостехиздат, 1958. 440 с.
9. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 296 с.
10. Онищук О. В., Попов Г. Я., Фаршайт П. Г. Задача об изгибе прямоугольной пластины с линейной опорой, выходящей одним концом на защемленную границу//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 160—168.
11. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений М.: Наука, 1971. 1108 с.
13. Грибова В. В., Онищук О. В. Расчет защемленной пластинки с тонким включением методом граничной коллокации//Гидроаэромеханика и теория упругости. 1985. № 33. С. 71—75.

Одесса

Поступила в редакцию
10.VI.1992