МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1992

УДК 593.3

 В. В. ВЛАСОВ

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ РАСЧЕТА ТРУБКИ БУРДОНА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Как известно, трубка Бурдона представляет собой часть тонкостенной торовой оболочки вращения произвольного угла раствора. Поперечное сечение ее обычно имеет две оси симметрии и может быть эллиптическим, плоскоовальным и других форм, причем одна из осей симметрии располагается в плоскости трубки. При закреплении одного конца трубки и нагружении ее внутренним давлением (концевые сечения трубки закрыты диафрагмами) она изгибается и свободный от закрепления конец трубки может иметь весьма большие перемещения. Это свойство широко используется на практике в манометрических приборах, где сама трубка, или пружина Бурдона, является одним из наиболее распространенных типов манометрических упругих элементов. Она также находит применение как исполнительный механизм в роботах-манипуляторах.

Теория расчета трубок Бурдона, основанная на энергетических соотношениях в сочетании с рядом гипотез, представляющих собой обобщение известных допущений балочной теории сопротивления материалов, была разработана В. И. Феодосьевым [1—3].

Здесь получено в аналитической форме безмоментное решение для замкнутой торовой оболочки эллиптического поперечного сечения, нагруженной постоянным внутренним давлением. Показывается, что с использованием этого решения задача равновесия для трубки Бурдона эллиптического поперечного сечения сводится к случаю чистого изгиба при известной величине изгибающего момента, приложенного по концам трубки.

Рассмотрим замкнутую оболочку вращения в форме тора с эллиптическим поперечным сечением. Обозначим через R и δ радиус оси тора и толщину оболочки, через a и b — полуоси эллипса поперечного сечения соответственно в плоскости тора и в направлении оси вращения оболочки, через c — расстояние от внутренней точки поверхности тора до оси вращения (фиг. 1). Введем систему координат z, r в плоскости поперечного сечения оболочки. Начало координат A примем в верхней точке сечения, ось z направим к центру O сечения, ось r к оси вращения оболочки.

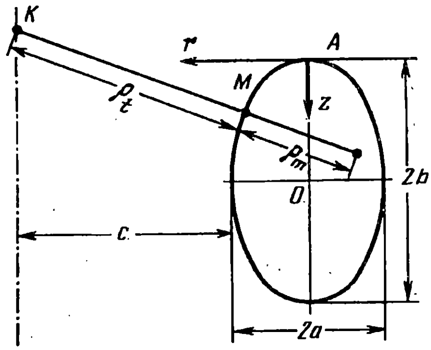
Уравнение контура поперечного сечения оболочки $r(z)$ записывается в виде $r = \pm ab^{-1}(2bz - z^2)^{1/2}$. Введем безразмерную координату ζ и параметры m и n по формулам

$$\zeta = z/b, \quad m = a/b, \quad n = c/b \tag{1}$$

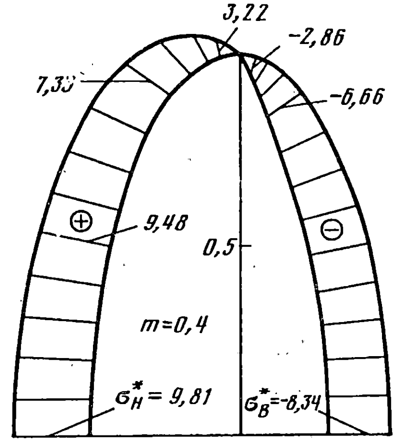
В таком случае зависимости для $r(z)$ и производных $r' = dr/dz$ и $r'' = d^2r/dz^2$ примут вид

$$r = mb\,(2\zeta - \zeta^2)^{1/2}, \quad r' = m\,(1 - \zeta)/(2\zeta - \zeta^2)^{1/2},$$

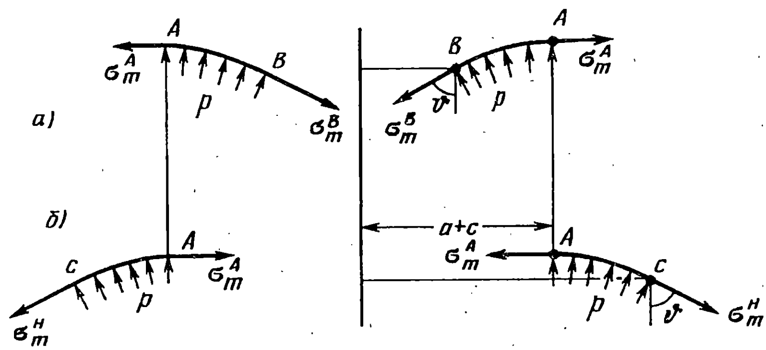
$$r'' = -\,m/b\,(2\zeta - \zeta^2)^{1/2} \tag{2}$$



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

Знаки в формулах отвечают положительным значениям r, что соответствует внутренней части контура поперечного сечения оболочки. Для наружной части оболочки $r < 0$, знаки должны быть изменены на обратные.

Для радиуса кривизны меридионального сечения в произвольной точке M контура имеем выражение $\rho_m = -(1 + r'^2)^{3/2}/r''$. С учетом (2) получим

$$\rho_m = a^{-1}b^2 \, [2\zeta - \zeta^2 + a^2b^{-2}(1-\zeta)^2]^{3/2} \tag{3}$$

Другой главный радиус кривизны оболочки вращения ρ_t определяется как расстояние по нормали к поверхности от точки M контура с координатами z, r до оси вращения, точки K с координатами z^*, r^* (фиг. 1). Вектор касательной к контуру сечения оболочки в точке M имеет составляющие dz, dr, вектор нормали — составляющие $z^* - z$, $r^* - r$. Вследствие ортогональности этих векторов их скалярное произведение равно нулю:

$$(z^* - z)\, dz + (r^* - r)\, dr = 0 \tag{4}$$

Величина радиуса кривизны в произвольной точке M поверхности оболочки определяется выражением

$$\rho_t^{\text{в,н}} = \mp \, [(z^* - z)^2 + (r^* - r)^2]^{1/2}$$

Здесь знак минус принимается для радиуса $\rho_t^{\text{в}}$ внутренней части оболочки, $r > 0$, знак плюс для радиуса $\rho_t^{\text{н}}$ наружной части, $r < 0$. Последнее следует из того, что во внутренней части оболочки гауссова кривизна $1/\rho_t \rho_m$ отрицательна, а во внешней части она положительна. Принимая во внимание (2), (4) и, что $r^* = a + c$, найдем

$$\rho_t^B = -\frac{Ab}{B}\left[m + n - m\,(2\zeta - \zeta^2)^{1/2}\right],\quad \rho_t^H = \frac{Ab}{B}\left[m + n + m\,(2\zeta - \zeta^2)^{1/2}\right] \tag{5}$$

$$A = \left[2\zeta - \zeta^2 + m^2(1 - \zeta)^2\right]^{1/2},\quad B = (2\zeta - \zeta^2)^{1/2}$$

На плоскости симметрии оболочки $\zeta = 1$ имеем $\rho_t^B = -c$, $\rho_t^H = 2a + c$. Окружности на поверхности оболочки, отвечающие значениям координат $\zeta = 0$ и $\zeta = 2$, являются асимптотическими линиями. На них гауссова кривизна оболочки обращается в нуль.

Меридиональные напряжения σ_m в оболочке вращения находятся из условия равновесия в смысле проекций на ось z для части оболочки, образованной вращением произвольной дуги контура AB, определенной на участке изменения переменной r от значения $r = 0$ до произвольного значения $|r| < a$ (фиг. 2):

$$\pi p\left[(a + c)^2 - (a + c - r)^2\right] = 2\pi\sigma_m\delta\,(a + c - r)\cos\theta$$

Принимая во внимание зависимость $\cos\theta = (1 + r'^2)^{-1/2} = B/A$, с учетом (1), (2) определим меридиональные напряжения σ_m^B и $\sigma_m^н$ соответственно для внутренней и наружной частей оболочки

$$\sigma_m^B = \frac{mAbp}{2\delta(m + n - mB)}\left[2(m+n) - mB\right],\quad \sigma_m^H = \frac{mAbp}{2\delta(m + n + mB)}\left[2(m+n) + mB\right]$$

Эти напряжения в плоскости симметрии тора и на асимптотических линиях принимают значения

$$\sigma_m^B\Big|_{\substack{\zeta=0\\ \zeta=2}} = \sigma_m^H\Big|_{\substack{\zeta=0\\ \zeta=2}} = \frac{pa^2}{b\delta},\quad \sigma_m^B\Big|_{\zeta=1} = \frac{pa}{2\delta}\,\frac{a + 2c}{c},\quad \sigma_m^H\Big|_{\zeta=1} = \frac{pa}{2\delta}\,\frac{3a + 2c}{2a + c}$$

Кольцевые напряжения σ_t в оболочке найдем из уравнения Лапласа

$$\sigma_t = \rho_t\,(p/\delta - \sigma_m/\rho_m) \tag{6}$$

С учетом (3), (5), (6) для кольцевых напряжений σ_t^B и σ_t^H соответственно во внутренней и наружной частях оболочки получим зависимости

$$\sigma_t^B = \sigma_0\sigma_B^*,\quad \sigma_t^H = \sigma_0\sigma_H^* \tag{7}$$

$$\sigma_B^* = -\frac{1}{AB}\left\{2\,(m + n - mB)\,A^2 - m^2\left[2\,(m + n) - mB\right]\right\},\quad \sigma_0 = Pb/2\delta \tag{8}$$

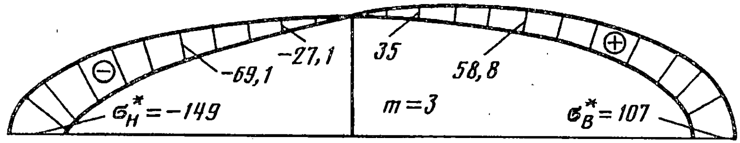
$$\sigma_H^* = \frac{1}{AB}\left\{2\,(m + n - mB)\,A^2 - m^2\left[2\,(m + n) + mB\right]\right\}$$

Множитель σ_0 отвечает постоянному значению кольцевого напряжения в торовой оболочке круглого поперечного сечения радиуса b, то есть при $m = 1$. Функция $\sigma^*(\zeta)$ представляет собой безразмерное кольцевое напряжение. В характерных точках поперечного сечения тора

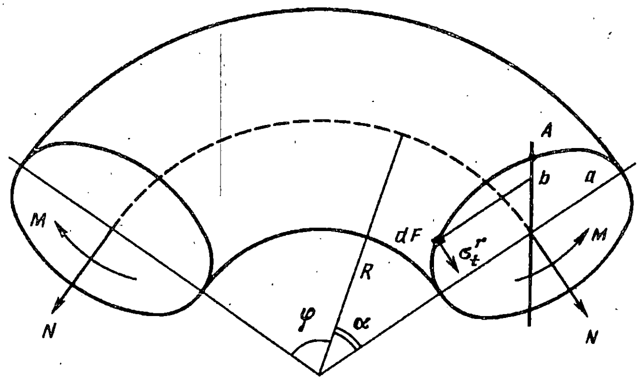
$$\sigma_t^B\Big|_{\substack{\zeta=0\\ \zeta=2}} = \sigma_t^H\Big|_{\substack{\zeta=0\\ \zeta=2}} = \sigma_0 m^2,\quad \sigma_t^B\Big|_{\zeta=1} = \sigma_0\left[m^3 + 2n\,(m^2 - 1)\right]$$

$$\sigma_t^H\Big|_{\zeta=1} = \sigma_0\left[m\,(4 - 3m^2) + 2n\,(1 - m^2)\right]$$

На асимптотических линиях оболочки, то есть при $\zeta = 0$ и $\zeta = 2$, в формулах



Фиг. 4



Фиг. 5

(8) имеется неопределенность, которая устраняется соответствующим предельным переходом.

Согласно (7), (8) в оболочке с сечением, вытянутым в направлении оси симметрии, $m < 1$, возникают большие кольцевые напряжения, причем наружная часть тора оказывается растянутой, а внутренняя сжатой. Если же сечение вытянуто в плоскости тора, $m > 1$, то, наоборот, наружная часть оболочки будет сжата, а внутренняя растянута. Изменение безразмерных кольцевых напряжений σ^* вдоль контура сечения для двух оболочек с параметрами $m = 0{,}4$, $n = 5$ ($a < b$) и $m = 3$, $n = 5$ ($a > b$) представлено на фиг. 3, 4 в форме графиков.

Следует также отметить, что приведенное здесь безмоментное решение носит приближенный характер. Это, в частности, выражается в том, что при непрерывном изменении напряжений при переходе через асимптотические линии $\zeta = 0$ и $\zeta = 2$ компоненты перемещений терпят разрыв на этих линиях, что в действительности не имеет места. Более правильные результаты можно получить, если воспользоваться моментной теорией оболочек. Однако сравнение полученных результатов расчета для торовой оболочки, нагруженной постоянным давлением, в случае симметричной деформации с соответствующими результатами, определенными численными методами по моментной теории другими авторами (В. И. Мяченков, О. Н. Золотов) показало, что погрешность в определении мембранных напряжений по безмоментной теории для тонких оболочек относительно невелика.

Как видно из графиков, распределение кольцевых напряжений σ_t в поперечном сечении оболочки можно привести к продольной силе N и изгибающему моменту M в плоскости тора, причем последний при значениях m, значительно отличающихся от единицы, достигает весьма большой величины. Будем разыскивать эти величины в виде

$$N = N_B + N_H, \quad M = M_B + M_H \tag{9}$$

$$N_B = 2\int_0^1 \sigma_t^B \, dF, \quad N_H = 2\int_0^1 \sigma_t^H \, dF \tag{10}$$

$$M_B = 2\int_0^1 \sigma_t^B \, r \, dF, \quad M_H = 2\int_0^1 \sigma_t^H \, r \, dF, \quad dF = \delta b \, (1 + r'^2)^{1/2} \, d\zeta$$

Здесь dF представляет собой элементарную площадь поперечного сечения оболочки. При этом слагаемыми N_B, M_B и N_H, M_H соответственно определяются части продольной силы и момента от напряжений σ_r, распределенных по внутренней и наружной частям оболочки.

Принимая во внимание зависимости (2), (7), преобразуем интегралы (10) к виду

$$N_{B,H} = -pb^2 \int_0^1 \frac{1}{B^2} \{2(m+n \mp mB) A^2 - m^2 [2(m+n) - mB]\} d\zeta \tag{11}$$

$$M_{B,H} = -pmb^3 \int_0^1 \frac{1}{B} \{2(m+n \mp mB) A^2 - m^2 [2(m+n) - mB]\} d\zeta$$

Здесь верхние знаки соответствуют выражениям для N_B и M_B, а нижние — для N_H и M_H. Введем новую переменную γ по формуле $1-\zeta = \sin\gamma$. Учитывая зависимости $d\zeta = -\cos\gamma d\gamma$, $2\zeta - \zeta^2 = \cos^2\gamma$ и производя интегрирование выражений (11) по γ в пределах от $\pi/2$ до нуля, на основании (9) получим

$$N = \pi pab, \; M = \pi pb^3 m (m+n)(m^2-1) \tag{12}$$

Согласно (12) продольная сила N определяется в виде произведения внутреннего давления p на площадь поперечного сечения, ограниченную контуром оболочки, что и следовало ожидать. Величина же изгибающего момента M зависит от значений геометрических параметров m и n (1). При $m > 1$, то есть для поперечного сечения, вытянутого в плоскости симметрии оболочки, момент M положителен и имеет направление показанное на (фиг. 5). При $m < 1$, сечение вытянуто в направлении оси вращения оболочки, момент M отрицателен и его направление изменяется на обратное.

Рассмотрим теперь трубку в виде части тора вращения произвольного раствора φ (фиг. 5). Считаем, что ее концы $\alpha = 0$ и $\alpha = \varphi$ закрыты днищами, а сама трубка нагружена постоянным давлением p. При определении ее напряженного состояния можно исходить из приведенного выше решения для замкнутой оболочки. Мысленно выделим из замкнутой оболочки участок с центральным углом, равным φ. В таком случае по концам этого участка необходимо приложить силу N и момент M (12), соответствующие решению для симметричной деформации замкнутой трубки. В действительности, для трубки в виде части кольца сила N в ее поперечных сечениях возникает, что обусловлено наличием днищ по ее концам. Моменты же M в ней будут отсутствовать, поскольку по концам этой трубки они не приложены. Этого результата можно достигнуть, если на решение задачи для симметричной деформации наложить достояние чистого изгиба трубки, определяемое концевыми моментами M, равными по величине (12), но обратного знака. При $m > 1$ поперечное сечение растянуто в плоскости трубки, моменты M увеличивают кривизну трубки, а при $m < 1$ сечение растянуто из плоскости трубки, моменты M уменьшают кривизну, что соответствует действительности. Для трубки с круглым поперечным сечением ($m = 1$), момент M обращается в нуль и изгиба трубки не происходит. Таким образом, расчет трубки Бурдона эллиптического поперечного сечения с произвольным углом раствора, нагруженной постоянным давлением, сводится к случаю чистого изгиба известным моментом.

В заключение отметим, что для торовой оболочки в виде части кольца чистый изгиб в плоскости оболочки, как известно, см. [1—3], представляет собой весьма сложную задачу. Соответствующий расчет следует производить на основе моментной теории с учетом поперечных изгибающих моментов в оболочке. Жесткость при изгибе кривой тонкостенной трубки зависит от ее начальной кривизны и может быть значительно меньше жесткости, рассчитанной по формулам сопротивления материалов, что приводит к большим перемещениям свободного от закрепления конца трубки, значительно превосходящим по своей величине перемещения, вычисленные на основе элементарной теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феодосьев В. И.* Расчет тонкостенной трубки Бурдона эллиптического сечения энергетическим методом. М.: Оборонгиз, 1940. 320 с.
2. *Феодосьев В. И.* Упругие элементы точного приборостроения. М.: Оборонгиз, 1949. 344 с.
3. *Андреев Л. Е.* Упругие элементы приборов М.: Машгиз, 1962. 445 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.VI.1992