

УДК 539.375

© 1992 г. Н. М. АЛЕКСЕЕВ, Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН, Н. М. ОСИПЕНКО

## НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ К МОДЕЛИРОВАНИЮ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ТРИБОЛОГИИ

Традиционно задача о контакте деформируемых тел с трением рассматривается без учета процессов разрушения их приповерхностных слоев. При этом характеристики контактного взаимодействия находятся после определения зон скольжения и сцепления в области контакта из решения соответствующей задачи теории упругости. Положение границ, разделяющих эти зоны, может быть найдено из доказываемого в рамках теории упругости условия несингулярности на них напряжений. С энергетической точки зрения последнее эквивалентно условию обращения в нуль удельного приращения энергии деформации контактирующих тел при смещении положения границ зон скольжения и сцепления относительно равновесного ( $\delta W/\delta S$ ) = 0.

В данной работе задача о контакте рассматривается в иной постановке. Будем считать, что в результате контактного взаимодействия, сопровождаемого разрушением приповерхностных слоев, формируется промежуточная прослойка, в которой относительное скольжение осуществляется через частицы (конгломераты частиц), появившиеся в результате контактного разрушения в приповерхностных слоях. О правомерности такой постановки задачи свидетельствуют многочисленные экспериментальные данные [1, 2] (фиг. 1). Образование (выкальвание) частиц характерно для начальной фазы контактного взаимодействия. Формирование конгломератов частиц — окатышей может продолжаться и в следующих фазах.

**1. Модель процесса.** Для построения количественной модели процесса примем следующие предположения:

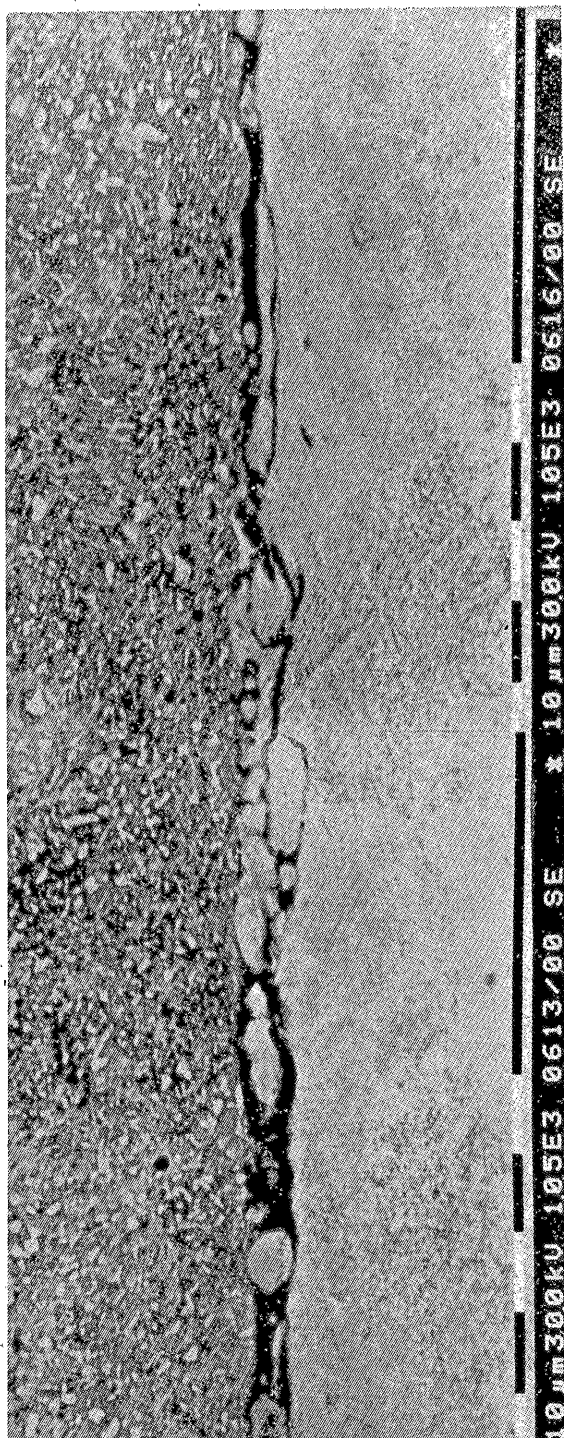
1. Толщина промежуточной прослойки в области скольжения много меньше двух других ее характерных размеров;

2. Инициирование разрушения — образование и развитие поверхностных трещин, приводящих к выкальванию отдельных частиц или кусков материала, происходит вблизи подвижной границы зон скольжения и сцепления, где имеет место напряженное состояние, обусловленное сменой граничных условий;

3. Подвижно-равновесное состояние границы зон скольжения и сцепления определяется условием достижения величиной ( $\delta W/\delta S$ ) некоторого критического значения ( $\delta W/\delta S$ )<sub>кр</sub>;

4. Величина ( $\delta W/\delta S$ )<sub>кр</sub> зависит от конкретного механизма (механизмов) разрушения, который реализуется в концевых областях зоны скольжения, и может быть рассчитана (оценена), исходя из модели этих концевых областей (аналог внутренней задачи теории трещин [3]);

5. Процессами в концевых областях управляют локальные характеристики напряженно-деформированного состояния (коэффициенты интенсивности напряжений), определяющиеся контактным взаимодействием в масштабе области контакта (аналог внешней задачи теории трещин [3]).



Фиг. 1

Поскольку контактному взаимодействию с трением и поверхностным разрушением присущи механизмы саморегуляции, само формирование внутренней и внешней задач, а также взаимосвязь между ними оказываются сложнее, чем в теории трещин. В частности, может быть существенным влияние внутренней задачи на внешнюю.

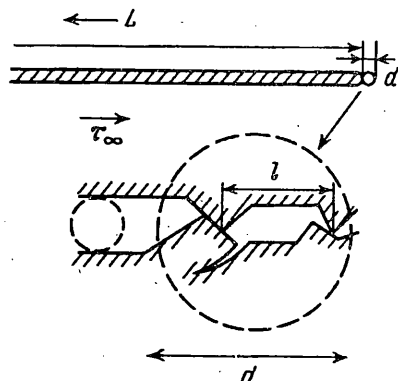
Ниже в рамках сделанных предположений рассмотрены примеры описания наблюдаемых схем разрушения при трении. При этом проясняются высказанные соображения о внутренней и внешней задачах. Для простоты считается, что упругие свойства контактирующих тел одинаковы.

2. Инициирование промежуточного слоя. Рассмотрим один из типичных механизмов формирования промежуточной структурированной прослойки между двумя трущимися телами. Пусть два упругих тела, имеющие плоский шероховатый контакт, подвержены в удаленных от области контакта точках однородному взаимному сжатию ( $\sigma_\infty$ ) и сдвигу ( $\tau_\infty$ ). Будем считать (см. фиг. 1), что взаимодействие между телами осуществляется посредством перекатывания между ними структурных элементов промежуточного слоя (шариков, катышков), образующихся в результате разрушения приповерхностных слоев трущихся тел. Области обычного контакта между телами соответствуют участкам, в которых еще не сформировался промежуточный слой. Примем для определенности, что формирование структурных элементов происходит путем их выкалывания посредством развития в окрестностях отдельных пар контактирующих бугорков исходных шероховатых тел трещин нормального разрыва, ориентированных вдоль нормали к поверхности. Возможны и другие механизмы, например, спекание в катышки раздробленной массы тел и др.

Вследствие приведенной выше аналогии между зонами взаимодействия с промежуточным слоем и трещинами в первых под действием внешней нагрузки также нарушается непрерывность касательных (и нормальных) смещений границ контактирующих тел. В результате на контуре области развивается концентрация напряжений. Их величина может оказаться достаточной для инициирования трещин нормального отрыва (или сдвига) в окрестностях контактирующих выступов, а затем и разрушения (выкола) последних, вследствие чего область получает приращение до следующей пары контактирующих выступов, а выделенный трещинами блок пополняет промежуточный слой. Естественно при этом предположить, что энергетические условия выкалывания типичного (характерного) для системы объема материала определяют основной вклад в затраты энергии при движении зоны проскальзывания в предельно-равновесном состоянии и величину  $(\delta W/\delta S)_{cr}$ . Так же, как и трещиностойкость материалов, величина  $(\delta W/\delta S)_{cr}$  может быть определена в рамках внешней задачи экспериментально. В приведенной схематической модели не учтены многие детали процесса, такие как оформление катышков из выколотого блока, рельефа образующихся поверхностей и т. п. Их учет не имеет принципиального значения для предлагаемого подхода. Представляется интересным произвести некоторые оценки, используя параметры конкретного механизма разрушения в рамках внутренней задачи.

Рассмотрим плоскую модельную задачу. Пусть две контактирующие упругие шероховатые полуплоскости имеют зону проскальзывания размера  $L$  (фиг. 2). Характерный размер шероховатости (расстояние между точками зацепления на границе контакта) —  $l$ . В окрестности (в концевой области) зоны, содержащей промежуточный слой, имеется область концентрации напряжений, в которой в частности, в состоянии предельного равновесия контура происходит развитие хрупкого выкола материала на характерную глубину  $h \sim d/2$ . Продвижение зоны происходит при завершении выкалывания (отделении блока материала). Следовательно, сопротивляемость системы этому продвижению определяется совокупностью процессов необратимого деформирования и разрушения на всех участках контакта, где развивается выкалывание в пределах концевой зоны  $d$ .

В соответствии с высказанными выше положениями можно утверждать, что



Фиг. 2

на контуре зоны, содержащей промежуточный слой (в рассматриваемом варианте в виде выколловшихся элементов качения), и представляемой во внешней задаче как эффективная трещина поперечного сдвига, в состоянии предельного равновесия выполняется условие  $K_{II} = T_{IIc}$ , где  $K_{II}$  — коэффициент интенсивности напряжений поперечного сдвига,  $T_{IIc}$  — критический коэффициент интенсивности напряжений поперечного сдвига. В приведенной аналогии величина  $(\delta W / \delta S)_{cr}$  есть аналог эффективной поверхностной энергии, поэтому в данном случае  $(\delta W / \delta S)_{cr} \approx \gamma \approx T_{IIc}^2 / 2E$ , где  $E$  — эффективный модуль упругости. Величина  $T_{IIc}$  характеризует сопротивляемость системы контактирующих тел развитию промежуточного слоя. Заметим, что величину  $\tau_{\infty}$  при этом можно соотнести с интегральной характеристикой усредненного по пятну касания напряжения сил трения, а величину  $T_{IIc}$  можно найти экспериментально или оценить, исходя из модели внутренней задачи.

Произведем оценку  $T_{IIc}$  по параметрам внутренней задачи о выкалывании элементов качения в концевой зоне  $d$  промежуточного слоя. Считая для простоты, что область  $d$  охватывает один выкалываемый элемент, т. е.  $l \sim d$  и представляя силы сцепления в виде определенного по области  $d$  касательного напряжения, соответствующего максимальной нагрузке при выкалывании блока (модель типа Дагдейла [4]), имеем

$$T_{IIc} \sim \int_0^l \tau^* / t^2 dt, \quad \tau^* = P_{\max} / l \quad (1)$$

где  $P_{\max}$  — максимальное усилие при выкалывании блоков. Величину  $P_{\max}$  из соображений размерности запишем в виде  $P_{\max} \sim K_{Ic} h^2$ , где  $K_{Ic}$  — трещиностойкость контактирующих материалов,  $h$  — размер выкалываемого блока (максимальная глубина внедрения трещины при его выкалывании), отсюда

$$T_{IIc} \sim K_{Ic} (h/l)^2 \quad (2)$$

Соответственно,  $(\delta W / \delta S)_{cr} \sim K_{Ic}^2 h / 2El$ . Оценки показывают, что в принятой схеме разрушения величина  $T_{IIc}$  по порядку близка к трещиностойкости материала по отношению к трещинам нормального разрыва. Присутствие поперечного сжатия в области контакта может видоизменить приведенные соотношения. Пусть, например, сжатие вызывает появление дополнительных контактов в концевой области. В рассматриваемом приближении это означает, что размер  $l$  становится зависимым от величины  $\sigma_{\infty}$ :

$$l \sim E \Delta h / \sigma_{\infty} \quad (3)$$

где  $\Delta h$  — некоторое начальное раскрытие в области контакта. Воспользовавшись (3), получим из (1), (2):

$$T_{IIc} \sim K_{Ic} (\sigma_{\infty}/E)^{1/2} (h/\Delta h)^{1/2}, \quad (\delta W/\delta S)_{cr} \sim (K_{Ic}/E)^2 (\sigma_{\infty} h/\Delta h)$$

Заметим, что возрастание  $T_{IIc}$  с увеличением  $\sigma_{\infty}$  может, в частности, привести к смене механизма разрушения — развитию сдвиговых нарушений в основном материале ( $K_{IIc}$  конструкционных материалов примерно в два раза превышает  $K_{Ic}$  [5]).

3. Структура промежуточного слоя в механике трения. Взаимное влияние внешней и внутренней задач в механике трения удобно продемонстрировать, используя ту же структуру промежуточного слоя в более развитой стадии. Положим, что посредством локального разрушения (выкалывания) в приграничной области двух контактирующих тел возник промежуточный слой, состоящий из обкатанных элементов (кусков), выколовшихся при прохождении через рассматриваемый участок концевой зоны области «качения». Образовавшаяся при этом структура, напоминающая роликовый подшипник, изменяет эффективные условия трения рассматриваемых тел. При этом сама эта структура с деталями внутреннего устройства и взаимодействия может быть отнесена к внутренней задаче для процесса трения в целом, а эффективный ее вклад в напряженно-деформированное состояние при обобщенных граничных условиях на поверхности контакта (условиях трения) — к внешней задаче. Внутренняя задача также может быть представлена в виде совокупности внешней и внутренней задач на следующей ступени иерархии масштабов процесса. В данном случае при контакте перекатывающихся элементов (катышков) с шероховатой поверхностью внутренняя задача относится к субструктуре контакта между катышком и подложкой.

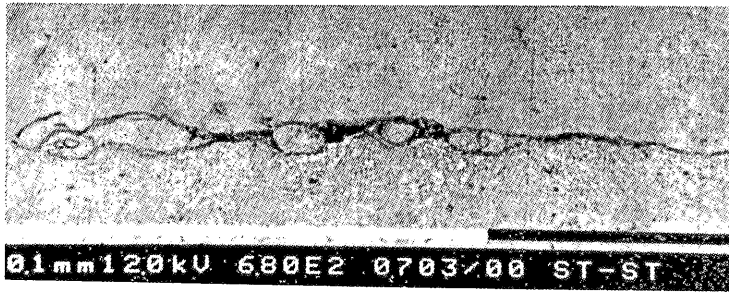
Будем считать также, что в стационарном режиме существования описанных структур трения, предпочтительность того или иного состояния связывается с величинами полной потенциальной энергии упругой системы, соответствующими этим состояниям. Из двух возможных состояний более вероятно такое, в котором полная потенциальная энергия системы меньше.

В сформировавшейся совокупности элементов промежуточного слоя единственным параметром, влияющим на потенциальную энергию упругой системы, является взаимное расположение элементов вдоль линии контакта тел при действии на них сдвигающих и сжимающих нагрузок.

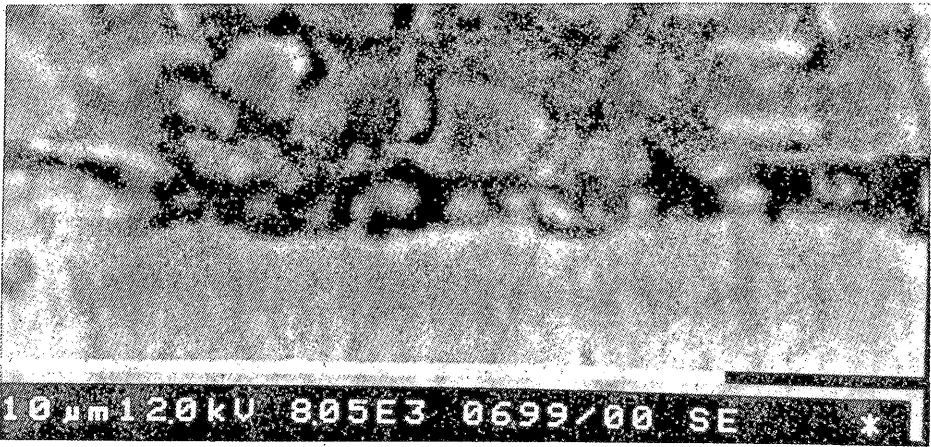
В эксперименте наблюдается два характерных варианта расположения элементов качения (фиг. 3, 4) — равномерное их распределение вдоль линии контакта с более или менее значительным удалением друг от друга и компактное расположение в виде цепочки соприкасающихся тел, либо в виде округлых образований, возникающих после соединения и смятия многих элементов (фиг. 5).

Характер взаимодействия тел во внешней задаче зависит от взаимного расположения элементов в промежуточном слое (во внутренней задаче), например, следующим образом: присутствие элементов качения снижает эффективные касательные напряжения в зоне контакта, однако, увеличивает локальные нормальные напряжения за счет эффекта расклинивания. Совокупность элементов качения, расположенных поодаль друг от друга, иначе влияет на энергию упругого деформирования системы в целом, чем те же элементы, собранные вместе.

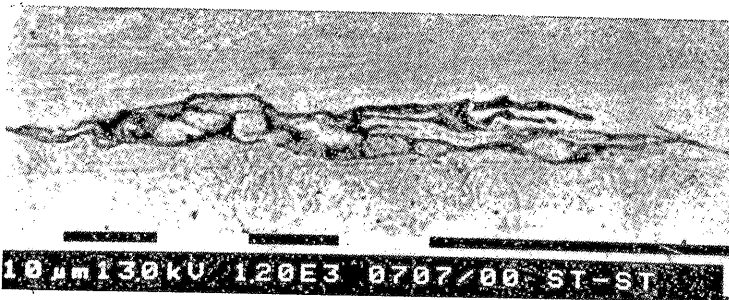
Поясним сказанное на примере. Рассмотрим следующую плоскую модельную задачу. Пусть, как и ранее, на некотором выделенном участке две упругие полуплоскости контактируют через промежуточный слой, представляющий собой систему одинаковых круглых элементов качения, имеющих характерный диаметр  $h$ , и нагруженных в удаленных от контакта точках однородным напряжением  $\sigma_{\infty}$  по нормали к линии контакта и  $\tau_{\infty}$  вдоль линии контакта. Представим задачу



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

о нарушении непосредственного контакта между полуплоскостями под действием расклинивающего влияния элементов качения в виде совокупности двух задач теории упругости, одна из которых определяет раскрытие контакта под действием нормальных напряжений и тождественна задаче о трещине нормального разрыва на границе двух тел, а вторая — является аналогом задачи о трещине поперечного сдвига. Будем считать, что длина зоны нарушения контакта (т. е. длина эффективных трещин отрыва и сдвига) определяется только условиями нормального разрыва. Для определенности примем, что при этом выполняется условие плавного смыкания берегов ( $K_1 = 0$ ). Эффективные трещины считаются невзаимодействующими.

На берегах эффективной трещины поперечного сдвига действуют напряжения  $\Delta\tau$ , представляющие собой разницу между  $\tau_\infty$  и эффективным сопротивлением сдвигу (трение) в области отслоения. В области контакта предполагается как и ранее, что касательное напряжение в зоне проскальзывания и сцепления различаются незначительно. Имеется в виду, что сопротивление перекатывания элементов меньше сопротивления при проскальзывании для системы, находящейся вблизи предельного равновесия.

При сделанных предположениях энергия упругого деформирования полуплоскости под действием расклинивания (или эффективного усилия  $P$ , обеспечивающего тот же размер отслоения) увеличивает потенциальную энергию системы, в то время как энергия эффективной трещины поперечного сдвига, совмещенной с тем же отслоением, уменьшает ее. Элементы качения считаются жесткими. Следовательно, энергетический баланс системы определяется алгебраической суммой этих двух составляющих. В частности, если суммарная энергия совокупности  $N$  одиночных отслоений больше, чем для собранных в цепочку, то система будет стремиться обеспечить компактную конфигурацию элементов, в противном случае более выгодно их раздельное расположение. Условие сближения элементов запишется в виде

$$[W(h) - W(\Delta\tau)]N > W_n(h) - W_n(\Delta\tau) \quad (4)$$

Здесь  $W(h)$ ,  $W(\Delta\tau)$  — энергия упругого деформирования плоскости с трещиной нормального разрыва и сдвига соответственно: индекс  $n$  относится к трещинам-расслоениям около групп элементов, содержащих  $N$  элементов.

Произведем некоторые оценки. Определим размер индивидуального расслоения (фиг. 6, а) из условия плавного смыкания берегов, т. е. смещение в средней части расслоения, вызванное напряжениями  $\sigma_\infty$  должно быть порядка полуразмера элемента промежуточного слоя  $\sigma_\infty(1 - \mu^2)l/E \sim h$ . Отсюда

$$l \sim hE/\sigma_\infty(1 - \mu^2) \quad (5)$$

Соответственно, упругая энергия плоскости с трещиной размера  $2l$  под действием нормального давления [6] равна:

$$W = 0,5\pi(1 - \mu^2)\sigma_\infty^2 l^2/E \quad (6)$$

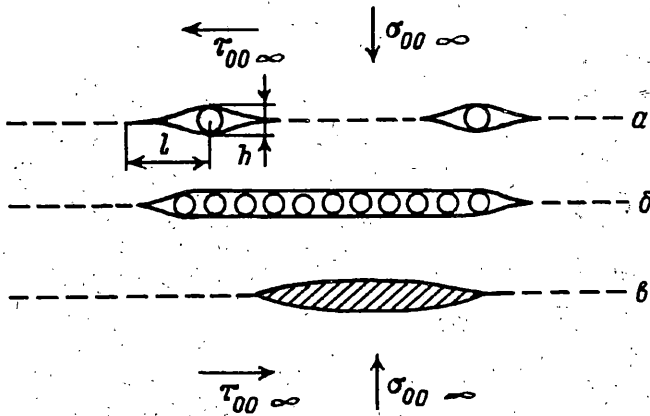
или, используя (5):

$$W(h) \sim h^2 E/(1 - \mu^2) \quad (7)$$

Аналогичным образом, для трещины поперечного сдвига той же длины имеем

$$W(\Delta\tau) \sim 0,5\pi h^2 E/(1 - \mu^2)(\Delta\tau/\sigma_\infty)^2 \quad (8)$$

Оценим величину  $W_n(h)$  для расслоения, содержащего цепочку собранных вместе элементов качения (фиг. 6, б). Будем считать, например, что профиль образующейся при этом щели близок к раскрытию трещины, находящейся под



Фиг. 6

действием некоторого эффективного внутреннего давления  $\sigma^*$  так, что среднее раскрытие совпадает с размером элемента качения  $h$ , т. е.

$$l^{-1} \int_0^l \sigma^* (1 - \mu^2) E^{-1} (l^2 - x^2)^{1/2} dx = h$$

где  $l$  — полудлина эффективной трещины. Отсюда найдем эффективное давление  $\sigma^*$ :

$$\sigma^* = 2Eh/\pi l(1 - \mu^2) \quad (9)$$

Учитывая (6) и (9), для энергии упругого деформирования имеем

$$W_n(h) \sim Eh^2/(1 - \mu^2) \quad (10)$$

что совпадает с (7). Отметим также, что  $W_n(h)$  не зависит от  $N$ . Этот результат очевиден, так как в рассматриваемой модели изменение упругой энергии связано только с вариациями раскрытия трещины, а присутствие в ее средней части участка постоянного раскрытия не вносит изменения в энергетику трещины.

Иной результат получается, если, как это наблюдается в эксперименте, группа элементов качения при объединении сливается в компактный объект, полностью заполняющий некоторую вытянутую область. Будем моделировать этот объект трещиноподобной полостью, заполненной материалом слившихся элементов качения, поддерживающим в полости постоянное по ее длине противодействие  $\sigma^*$ , причем объем полости близок к сумме объемов всех  $N$  поглощенных ей элементов. Предельное равновесие такой системы в случае  $K_1 \equiv 0$  обеспечивается только при  $\sigma^* \sim \sigma_\infty$ . Учитывая это, можно записать соотношения

$$4 \int_0^l \sigma_\infty (1 - \mu^2) E^{-1} (l^2 - x^2)^{1/2} dx \sim N\pi h^2; \quad l \sim h/2 (NE/(1 - \mu^2) \sigma_\infty)^{1/2} \quad (11)$$

Отсюда, используя (6), найдем

$$W_n(h) \sim Nh^2\sigma_\infty/(1 - \mu^2) \quad (12)$$

Предложенное схематическое представление основано на наблюдаемой аналогии формы описываемого объекта и трещины, находящейся под действием внутреннего давления, а также известной (фиг. 3) из экспериментальных наблюдений трущихся металлических пар способностью ряда металлов к течению с очень большими удлинениями.

Для эффективной трещины поперечного сдвига, составленной из цепочки



отслоений, имеющей протяженность, обеспечиваемую условиями отсутствия нормального контакта взаимодействующих поверхностей, можно представить следующие соотношения.

Если расслоение содержит цепочку элементов качения, то

$$W_n(\Delta\tau) \sim \pi(1 - \mu^2)\Delta\tau^2 r^2 / 2E$$

$$l^* \sim Nh + Eh/\sigma_\infty(1 - \mu^2) \quad (13)$$

В частности, для очень больших скоплений элементов качения (или больших давлений  $\sigma_\infty$ ):

$$W_n(\Delta\tau) \sim \pi(1 - \mu^2)N^2 h^2 \Delta\tau^2 / 2E \quad (14)$$

для малого числа  $N$ , т. е. ( $Nh \ll Eh/\sigma_\infty(1 - \mu^2)$ ):

$$W_n(\Delta\tau) \sim \pi r^3 h^3 E \Delta\tau^2 / 2\sigma_\infty^2 (1 - \mu^2) \quad (15)$$

Если шарики скучены (слившиеся элементы качения), используя (11), (13), получим

$$W_m(\Delta\tau) \sim \pi h^2 EN \Delta\tau^2 / 8\sigma_\infty \quad (16)$$

Снижение эффективных касательных напряжений на границе контакта в этом случае возможно только вследствие изменения структуры переработанной массы элементов качения, т. к. промежуточный слой, состоящий из собственно элементов, исчезает. Поскольку такие эффекты здесь не рассматриваются, можно считать в данном случае  $\Delta\tau \rightarrow 0$ .

Воспользуемся приведенными соотношениями для иллюстрации возможных вариантов энергетической оптимальности системы. Рассмотрим комбинации формул (7), (16) в условии сближения элементов качения (4).

Если элементов качения мало, т. е. собственно цепочка элементов значительно короче по своей длине, чем общая протяженность зоны нарушения контакта, возникшей вследствие расклинивающего действия этой цепочки или, что тоже самое, протяженность зоны нарушения контакта для цепочки элементов близка по размерам к таковой для одиночного элемента (7), (8), (10), (15), то условие (4) приобретает тривиальный вид  $W(h) > W(\Delta\tau)$  или  $\sigma_\infty > \alpha\Delta\tau$ ;  $\alpha \sim (\pi/2)^{1/2}$ .

Элементам качения энергетически выгодно сблизиться, когда нормальное давление, определенное по всей области взаимодействия  $\sigma_\infty$  превышает разницу касательных напряжений на контакте и в области его нарушения промежуточным слоем элементов качения  $\Delta\tau$ . В противном случае элементы качения размещаются раздельно. Отметим, что на результат не влияет количество элементов вращения.

Другой возможный вариант заключается в том, что в цепочку объединяется большое количество элементов качения (14). При этом энергия упругого деформирования зависит от количества содержащихся в этой цепочке элементов.

В связи с этим существует критическое число элементов качения  $N_{cr}$ , определяемое в соответствии с (4) соотношением  $N_{cr} \sim E^2/g\tau(1 - \mu^2) \cdot (\pi/2\Delta\tau^2 - \sigma_\infty^2)/\Delta\tau^2\sigma_\infty^2$ , такое, что его превышение при сохранении силовых параметров задачи ( $\sigma_\infty$  и  $\tau_\infty$ ) приводит к предпочтительности сближения элементов качения в цепочку. Это означает, что возможны варианты изменения структуры промежуточного слоя (переход от раздельного существования элементов качения к их объединению) при неизменных внешних нагрузках только за счет накопления элементов промежуточного слоя. Разумеется, приведенный вариант не исчерпывает возможные трансформации, причинами которых могут быть изменения иных параметров внутренней задачи, например, взаимодействия между элементами качения, их разрушение и т. п.

Таким образом, внутренняя задача о промежуточном слое обладает самосто-

ятельными механизмами регулирования структуры и, вместе с ней, обобщенных реакций на параметры внешней задачи.

Рассмотрим третий вариант. Слияние элементов вращения при объединении (например, вследствие их пластической деформации) (12), (16) сдвигает условия объединения элементов в другую сторону вследствие исчезновения самих элементов качения и связанного с ними эффекта облегчения перекатывания по ним контактирующих тел (фиг. 6, в). В рассматриваемой схематической модели условия объединения в данном варианте не зависят от числа элементов. Элементы объединяются, если выполняется следующее соотношение между силовыми параметрами  $\Delta\tau < \sigma_{\infty} [2\pi^{-1}(1 - \sigma_{\infty}/E)]^{1/2}$ .

Во всех перечисленных вариантах внешнее напряжение  $\sigma_{\infty}$  сохраняет регулируемую функцию. При его увеличении возрастает предпочтительность структур промежуточного слоя, содержащих близко расположенные элементы вращения или их конгломераты. Поэтому изменение внешних условий посредством вариаций  $\sigma_{\infty}$  также может вызвать трансформацию структуры промежуточного слоя.

Подведем итоги проведенного выше анализа.

Процесс контактного взаимодействия в напряженных узлах трения, сопровождающийся формированием промежуточного слоя, характеризуется наличием по крайней мере двух резко различающихся масштабов геометрических и силовых параметров. Большой масштаб соотносится с размерами зоны контакта в целом и внешними силами. Меньший — определяется наличием активной зоны деформирования и разрушения контактирующих тел, сканирующей их приповерхностные слои согласованно с перемещениями границы подобластей проскальзывания и сцепления в области контакта.

В рамках предложенной модели процессами параметрами, управляющими возникновением и развитием характерных структур промежуточного слоя, являются деформационные характеристики и трещиностойкость контактирующих тел, компоненты напряженно-деформированного состояния в области контакта, исходная шероховатость и локальный коэффициент трения взаимодействующих поверхностей.

Основным параметром внешнего нагружения, определяющим переход от одной структуры промежуточного слоя к другой, служит нормальное напряжение  $\sigma_{\infty}$ .

Зная параметры, входящие в модель, можно, пользуясь ее соотношениями, определить диапазон изменения сил трения скольжения, характеристик относительного смещения и износа в узлах трения в зависимости от типа структуры промежуточного слоя. Регулируя параметры модели процесса, можно целенаправленно повышать долговечность узлов трения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев Н. М., Богданов Р. И., Буше Н. А. и др. Новое о структурных особенностях трения твердых тел//Трение и износ. Т. 9. N 6. 1988. С. 965—974.
2. Алексеев Н. М. Новое о структурных особенностях изнашивания твердых тел//Трение и износ. Т. 10. № 2. 1989. С. 197—205.
3. Баренблатт Г. И. Математическая теория трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПИМФ. 1961. N 4. С. 3—56.
4. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits//J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8, No. 2. P. 100—136.
5. Melin S. Fracture from a straight crack subjected to mixed mode loading//Fracture. V. 32. N 4. 1987. P. 257—263.
6. Гудьер Дж. Математическая теория равновесных трещин//В сб. Разрушение. Т. 11. М.: Мир. 1975. С. 13—82.