

УДК 539.376

© 1992 г. Ю. И. КАДАШЕВИЧ, С. П. ПОМЫТКИН

УЧЕТ ФАЗЫ ПОДОБИЯ ДЕВИАТОРОВ  
В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

В [1—9] было показано, что для ряда материалов имеет место существенное отклонение от закона подобия девиаторов скоростей деформаций ползучести и напряжений. В [10] высказана точка зрения авторов данной публикации на построение теории пластичности, учитывающей влияние параметра Лоде. Ниже предложения этой работы распространяются на теорию ползучести.

1. Если суммировать результаты работ [1—10], то их авторами предлагаются различные модификации формы связи соосных девиаторов  $a_{ij}'$  и  $b_{ij}'$  предложенных В. В. Новожиловым [11] и К. Ф. Черных [12]. В частности, если предложения [11] имеют вид

$$a_{ij}' = 2G \{ \cos(3\beta + \omega) b_{ij}' / \cos 3\beta - \sqrt{6} \sin \omega (b_{ik}' b_{kj}' - B_2^2 \delta_{ij} / 3) / (B_2 \cos 3\beta) \}$$

$$2G = f_1(B_2, \beta), \quad \omega = f_2(B_2, \beta), \quad \omega = \alpha - \beta$$

$$\sin 3\beta = -\sqrt{6} (B_3 / B_2)^3, \quad -\pi/6 \leq \beta \leq \pi/6 \quad (1.1)$$

$$\sin 3\alpha = -\sqrt{6} (A_3 / A_2)^3, \quad -\pi/6 \leq \alpha \leq \pi/6$$

$$B_2 = (b_{ij}' b_{ij}')^{1/2}, \quad B_3 = (b_{ik}' b_{kj}' b_{ji}')^{1/3}$$

$$A_2 = (a_{ij}' a_{ij}')^{1/2}, \quad A_3 = (a_{ik}' a_{kj}' a_{ji}')^{1/3}$$

( $\omega$  — фаза подобия девиаторов  $a_{ij}'$  и  $b_{ij}'$ , характеризующая меру отклонения девиаторов от закона подобия), то в [12] предложена следующая модификация (1.1):

$$a_{ij}' = A_2 \{ \sin \alpha \cdot \partial (B_2 \sin \beta) / \partial b_{ij}' + \cos \alpha \cdot \partial (B_2 \cos \beta) / \partial b_{ij}' \} \quad (1.2)$$

$$A_2 = \Phi_1(B_2, \beta), \quad \omega = \Phi_2(B_2, \beta)$$

В [4] предложена форма представления девиаторов в виде

$$a_{ij}' = W \{ (\partial B_2 / \partial b_{ij}') / B_2 + \operatorname{tg} \omega \cdot \partial \beta / \partial b_{ij}' \}$$

$$W = A_2 B_2 \cos \omega, \quad W = \Phi_3(B_2, \beta), \quad \omega = \Phi_4(B_2, \beta) \quad (1.3)$$

В [9] рекомендована следующая зависимость

$$a_{ij}' = W \{ (1 - \operatorname{tg} 3\beta \operatorname{tg} \omega) b_{ij}' / B_2^2 - \operatorname{tg} 3\beta \operatorname{tg} \omega (b_{ik}' b_{kj}' - B_2^2 \delta_{ij} / 3) / B_3 \} \quad (1.4)$$

В [10] предложены следующие соотношения

$$a_{ij}' = A_2 \{ \cos \omega b_{ij}' / B_2 - \sin \omega b_{ij}' / B_2 \}$$

$$A_2 = \Phi_1(B_2, \beta), \quad \omega = \Phi_2(B_2, \beta) \quad (1.5)$$

$$b_{ij}' = (\sqrt{6} / \cos 3\beta) \{ b_{ik}' b_{kj}' / B_2 - B_2 \delta_{ij} / 3 + \sin 3\beta b_{ij}' / \sqrt{6} \}$$

Формулу (1.5) можно переписать в более компактном виде

$$a_{ij}' = A_2 \{ \cos \omega \eta_{ij} - \sin \omega \mu_{ij} \} \quad (1.6)$$

$$\eta_{ij} = \partial B_2 / \partial b_{ij}' = b_{ij}' / B_2, \quad \mu_{ij} = -B_2 \cdot \partial \beta / \partial b_{ij}' = b_{ij}' / B_2$$

$$A_2 = \Phi_1(B_2, \beta), \quad \omega = \Phi_2(B_2, \beta)$$

$\eta_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  — нормированные градиенты инвариантов  $B_2$  и  $\beta$ , которые обладают очевидными свойствами  $\eta_{ij} \eta_{ij} = 1$ ,  $\mu_{ij} \mu_{ij} = 1$ ,  $\eta_{ij} \mu_{ij} = 0$ . Если же связь тензоров  $a_{ij}'$  и  $b_{ij}'$  имеет градиентальный характер [12], то  $a_{ij}' = \text{grad}_{b_{ij}'} \Phi(B_2, \beta)$ . Отсюда

$$A_2 = (\partial \Phi / \partial b_{ij}' \cdot \partial \Phi / \partial b_{ij}')^{1/2}, \quad \text{tg } \omega = (\partial \Phi / \partial \beta) (B_2 \cdot \partial \Phi / \partial B_2)^{-1}$$

Отметим, что приведенные соотношения легко перестраиваются, если рассматриваются не девиаторы, а непосредственно соосные тензоры, а первые инварианты оказывают влияние на характер связи соосных тензоров. В этом случае полные соотношения [11] могут быть записаны следующим достаточно простым образом

$$a_{ij} = A_1 \delta_{ij} / 3 + A_2 \{ \cos \omega b_{ij}' / B_2 - \sin \omega b_{ij}' / B_2 \}$$

$$A_2 = \Phi_1(B_1, B_2, \beta), \quad \omega = \Phi_2(B_1, B_2, \beta)$$

$$A_1 = \Phi_3(B_1, B_2, \beta), \quad B_1 = b_{ii}, \quad A_1 = a_{ii}$$

Если же тензор  $a_{ij}$  является градиентальным, то вместо трех функций  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  остается одна заданная функция  $\Phi(B_1, B_2, \beta)$  и справедливы следующие соотношения:

$$A_1 = 3 \partial \Phi / \partial B_1, \quad A_2 = \{ (\partial \Phi / \partial B_2)^2 + (B_2^{-1} \cdot \partial \Phi / \partial \beta)^2 \}^{1/2}$$

$$\text{tg } \omega = (\partial \Phi / \partial \beta) (B_2 \cdot \partial \Phi / \partial B_2)^{-1}$$

2. Допустим теперь, что  $a_{ij}' = d\varepsilon_{ij}^H / d\mu$ ,  $b_{ij}' = \sigma_{ij}' - \rho_{ij} \equiv \tau_{ij}$ . Здесь  $\sigma_{ij}'$  — девиатор тензора напряжений,  $\varepsilon_{ij}^H$  — девиатор тензора неупругих деформаций,  $\tau_{ij}$  — девиатор тензора активных напряжений,  $\rho_{ij}$  — девиатор тензора остаточных микронапряжений. Параметр  $\mu$  можно трактовать как «приведенное» время. Если, например, принять  $\mu = \lambda$ , где  $d\lambda = (d\varepsilon_{ij}^H d\varepsilon_{ij}^H)^{1/2}$ , то будут получаться различные варианты классической теории пластичности. Наиболее общая формула для определения  $\mu$ , удобная для практических расчетов, может быть взята в форме  $d\mu / d\lambda = 1 / Q(\lambda, \lambda^*, \mu)$ ,  $\lambda^* = d\lambda / dt$ .

Тензор  $\rho_{ij}$ , необходимость введения которого детально обсуждена еще в [13], может быть представлен в следующем виде

$$\rho_{ij} = \int_0^\mu R(\mu - \mu') \frac{d\varepsilon_{ij}^H}{d\mu'} d\mu'$$

В данной статье ограничимся простейшим случаем, когда

$$\rho_{ij} = k \varepsilon_{ij}^H, \quad \Phi_1(B_2, \beta) = \Phi_1(T_2 \cdot \varphi(\beta))$$

Тогда определяющие соотношения примут вид

$$de_{ij}^H/d\mu = \Phi_1(T_2 \cdot \varphi(\beta)) \cdot L_{ij}$$

$$\dot{\mu}/d\lambda = 1/Q(\lambda, \lambda^*), T_2 = (\tau_{ij}\tau_{ij})^{1/2}$$

$$L_{ij} = \cos \omega\tau_{ij}/T_2 - \sin \omega\tau_{ij}^*/T_2$$

Указанные соотношения более удобно представить следующим образом

$$de_{ij}^H/dt = F(T_2 \cdot \varphi(\beta), \lambda) L_{ij}$$

$$\lambda^* = F(T_2 \cdot \varphi(\beta), \lambda), Q(\lambda, \lambda^*) = \Phi_1(T_2 \cdot \varphi(\beta))$$

Отметим, что в [4] рекомендовалось использовать  $\varphi(\beta)$  в виде  $\varphi(\beta) = 1 + k_1 \cdot \sin 3\beta + k_2 \sin^2 3\beta$  (при  $\rho_{ij} = 0$ ). Проверяться и зависимость вида

$$\varphi(\beta) = \exp(k_1(\cos 6\beta - 1)), \beta \leq 0$$

$$\varphi(\beta) = \exp(k_2(\cos 6\beta - 1)), \beta \geq 0$$

Заслуживает внимания и рекомендация [14]:

$$\varphi(\beta) = \exp(k_1 \sin 3\beta + k_2 \sin^2 3\beta)$$

3. Для проверки возможностей теории рассматривался ее простейший вариант в форме

$$F(T_2 \cdot \varphi(\beta), \lambda) = B[T_2 \cdot \varphi(\beta) + k\lambda]^n \lambda^m$$

В этом случае рабочие формулы примут вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^H \equiv de_{ij}^H/dt = B[T_2 \cdot \varphi(\beta) + k\lambda]^n \lambda^m L_{ij}$$

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij}' - \rho_{ij}, \quad \sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}\delta_{ij}/3, \quad \rho_{ij} = k\varepsilon_{ij}^H$$

$$L_{ij} = \cos \omega\tau_{ij}/T_2 - \sin \omega\tau_{ij}^*/T_2$$

$$T_2 = (\tau_{ij}\tau_{ij})^{1/2}, \quad T_3 = (\tau_{ik}\tau_{kj}\tau_{ji})^{1/3}$$

$$\sin 3\beta = -\sqrt{6} (T_3/T_2)^3$$

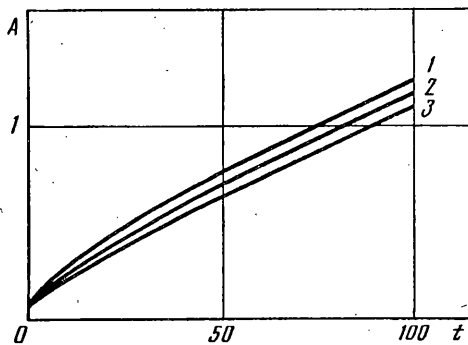
$$\varphi(\beta) = \exp(k_1(\cos 6\beta - 1)), \beta \leq 0$$

$$\varphi(\beta) = \exp(k_2(\cos 6\beta - 1)), \beta \geq 0$$

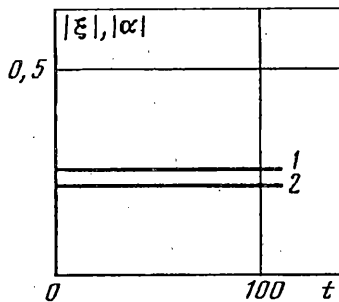
$$\tau_{ij}^* = (\sqrt{6}/\cos 3\beta) (\tau_{ik}\tau_{kj}/T_2 - T_2\delta_{ij}/3 + \sin 3\beta\tau_{ij}/\sqrt{6})$$

где  $k, k_1, k_2, B, n, m$  — константы материала. Параметры  $B, n, m$  определяются из опытов на одноосную ползучесть. Например, по данным [4] для материала АК4—1Т параметры соответственно равны  $B = 0,73 \times 10^{-14}$ ,  $n = 9$ ,  $m = -2$ . Параметры  $k_1$  и  $k_2$  можно получить из данных работы [5], перестроив опытные данные в осях  $\lg \omega \sim \xi$ , где  $\sin 3\xi = -\sqrt{6} (\sigma_3/\sigma_2)^3$ ,  $\sigma_2 = (\sigma_{ij}'\sigma_{ij}')^{1/2}$ ,  $\sigma_3 = (\sigma_{ik}'\sigma_{kj}'\sigma_{ji}')^{1/3}$ . Оказалось, что  $k_1 = 0,0505$ ,  $k_2 = 0,1364$ . Что касается параметра  $k$ , то методика его нахождения будет указана несколько позднее.

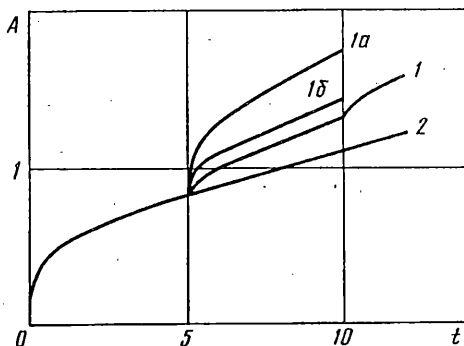
На фиг. 1 представлены данные расчетов стационарного ( $\theta = \text{const}$ ,  $\sigma_u = (3\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'/2)^{1/2} = \text{const}$ ) нагружения в условиях ползучести в координатах  $A \sim t$ , где  $A$  — диссипируемая в процессе ползучести работа,  $A = \int_0^t \sigma_{ij} de_{ij}^H$ , при  $k = 0$  (тогда  $\beta = \xi$ ) (1 —  $\theta = 90^\circ$ , 2 —  $\theta = 60^\circ$ , 3 —  $\theta = 0^\circ$ ). Появляется «расщепление»



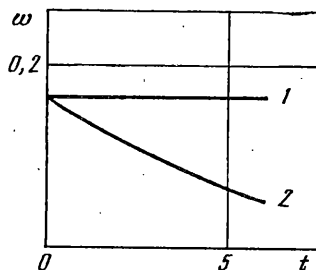
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

графиков  $A(t)$  для разных  $\theta = \text{arctg}(\sqrt{3}\tau/\sigma)$  ( $\sigma$  — осевое напряжение,  $\tau$  — сдвиговое напряжение), которого не наблюдается без учета  $\varphi(\beta)$ , что соответствует опытам [5]. На фиг. 2 представлены расчеты углов  $\xi$  (кривая 1) и  $\alpha$  (кривая 2) при стационарном нагружении ( $\theta = 60^\circ$ ) для того же сплава. Четко фиксируется фаза подобия девиаторов  $d\epsilon_{ij}^H/dt$  и  $\sigma_{ij}'$ , которая остается постоянной во времени. Этот факт соответствует опытным данным работ [6, 9].

Для проверки теории в условиях сложного напряженного состояния использовались результаты работ [3, 6]. Из [3] брались и параметры  $B = 7 \times 10^{-34}$ ,  $n = 18$ ,  $m = -2$ . (Опыт на одноосную ползучесть показал, что справедлив закон теории упрочнения  $\dot{\epsilon} = B\sigma^n e^m$  [3]). Так как ползучесть материалов в [3, 6] не зависит от вида напряженного состояния при стационарном нагружении, полагалось  $\varphi(\beta) = 1$ . Для этих материалов фаза подобия девиаторов скоростей деформаций ползучести и напряжений в условиях стационарного нагружения отсутствует, а появляется только при сложном напряженном состоянии [3, 6]. Для определения параметра  $k$  использовались опыты с вариацией интенсивности напряжений при требовании неизменности интенсивности процесса ползучести  $W = dA/dt$ ,  $W = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^H/dt$  в точке изменения напряженного состояния [3]. Расчет показал, что значение  $k = 2000$ . На фиг. 3 представлены данные расчетов, когда при  $\sigma_u = \text{const}$  происходит изменение угла  $\theta$ . При учете тензора  $\rho_{ij}$  ( $k = 2000$ ), после перегрузки ( $\Delta\theta = 25^\circ$ ) происходит увеличение интенсивности изменения  $A(t)$  (кривая 1), без учета  $\rho_{ij}$  ( $k = 0$ ) этот эффект почти не выражен (кривая 2). При изменении  $\theta$  во время  $t$ , кривая  $A(t)$  получает приращение тем больше, чем больше разность  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$  (кривая 1a —  $\Delta\theta = 60^\circ$ , кривая 1б —  $\Delta\theta = 30^\circ$ ), что соответствует экспериментальным данным [3]. После изменения  $\theta$  появляется фаза подобия (фиг. 4) девиаторов  $d\epsilon_{ij}^H/dt$  и  $\sigma_{ij}'$ , которая остается постоянной (при  $k = 2000 = \text{const}$ , кривая 1). На опытах же качественно установлено [3, 6], что фаза подобия стремится к нулю при увеличении времени (количе-

ственных данных для этого эффекта в [3, 6] не приводится). Для учета этого эффекта предложено считать  $k = k(\beta)$  или  $k = k(\gamma)$ , где  $\sin 3\gamma = -\sqrt{6} (\dot{\epsilon}_3^H/\dot{\epsilon}_2^H)^3$ ,  $\dot{\epsilon}_3^H = (\dot{\epsilon}_{ik}^H \dot{\epsilon}_{kj}^H \dot{\epsilon}_{ji}^H)^{1/3}$ ,  $\dot{\epsilon}_2^H = (\dot{\epsilon}_{ij}^H \dot{\epsilon}_{ij}^H)^{1/2}$ . Считалось, что  $k(\gamma) = C_1 + C_2(\gamma)$ , где  $C_1 = 2000$ ,  $C_2 = -1000$ . Это позволяет учесть изменение  $\omega = \alpha - \xi$  от  $\omega_0$  до 0 при  $t \rightarrow \infty$  ( $\sin 3\alpha = -\sqrt{6} (\dot{\epsilon}_3^H/\dot{\epsilon}_2^H)^3$ ,  $\dot{\epsilon}_3^H = (\dot{\epsilon}_{ik}^H \dot{\epsilon}_{kj}^H \dot{\epsilon}_{ji}^H)^{1/3}$ ,  $\dot{\epsilon}_2^H = (\dot{\epsilon}_{ij}^H \dot{\epsilon}_{ij}^H)^{1/2}$ ) (фиг. 4, кривая 2). На всех фигурах значения углов — в радианах, время — в часах, работа — в мДж/м<sup>3</sup>.

Таким образом, сформулированная уже в простейшем варианте, теория позволяет описать ряд интересных эффектов ползучести, таких как наличие и изменение фазы подобия девиаторов при простом и сложном нагружении [3, 4, 6, 9], отсутствие «единой» кривой деформирования для материалов, чувствительных к виду напряженного состояния [2, 5—9], изменение поверхности мощности при изменении напряженного состояния [3, 5]. Специально поставленные опыты, несомненно, позволят более детально оценить достоинства теории при сложном нагружении для  $\omega \neq 0$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наместников В. С. О ползучести при постоянных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния//Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 4. С. 141—146.
2. Никитенко А. Ф., Соснин О. В., Торшинов Н. Г., Шокало И. К. О ползучести упрочняющихся материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие//ПМТФ. 1971. № 2. С. 118—122.
3. Соснин О. В. К вопросу о существовании потенциала ползучести//Инж. ж. МТТ. 1971. № 5. С. 85—89.
4. Цвелодуб И. Ю. О некоторых подходах к описанию установившейся ползучести в сложных средах//Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1976. Вып. 25. С. 113—121.
5. Никитенко А. Ф. Экспериментальная проверка гипотезы существования термосиловой поверхности процесса ползучести//Пробл. прочности. 1978. № 9. С. 12—15.
6. Никитенко А. Ф. Экспериментальное обоснование гипотезы существования поверхности ползучести в условиях сложного нагружения//Пробл. прочности. 1984. № 8. С. 3—10.
7. Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О ползучести материалов с разными свойствами при растяжении и сжатии//Пробл. прочности. 1979. № 7. С. 62—67.
8. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С., Антипов Е. А. Пластичность и прочность материалов при нестационарных нагружениях. Киев: Наук. думка, 1984. 216 с.
9. Никитенко А. Ф. Об одной гипотезе в теории ползучести металлических материалов//Динамика упруго-пластич. систем. Новосибирск, 1986. Вып. 75. С. 102—112.
10. Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П. Статистическая теория пластичности, учитывающая влияние параметра Лоде//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 91—95.
11. Новожилов В. В. О связи между нагружениями и деформациями в нелинейно-упругой среде//ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 2. С. 183—194.
12. Черных К. Ф. О функциональных связях между соосными симметричными тензорами второго ранга//Проблемы механики твердого деформированного тела/Отв. ред. Л. И. Седов. Л.: Судостроение, 1970. С. 481—486.
13. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения//ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 78—89.
14. Панов А. Д., Стасенко И. В. К построению теории пластичности материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию//Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1985. Вып. 26. С. 32—52.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
4.XII.1990