МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1992

УДК 539.376

© 1992 г. Л. А. АГАЛОВЯН, Р. С. ГЕВОРКЯН

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДВУХСЛОЙНОЙ ПОЛОСЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ УПРУГОГО И РЕОЛОГИЧЕСКОГО СЛОЕВ

В строительстве, многих областях техники широко распространены конструктивные элементы типа многослойных полос и пластинок, часть слоев которых упругая, а часть с реологическими свойствами. Например, упругий фундамент, как правило, лежит на основании с реологическими свойствами, в слоистых конструктивных элементах летательных и других аппаратов некоторые слои имеют реологические свойства.

Поэтому разработка методов решения подобных задач представляет определенный теоретический и практический интерес. В работе асимптотическим методом [1] решаются смешанные краевые задачи полосы, состоящей из упругого и наследственно ползучего слоев. Считается, что между слоями выполняются условия полного контакта, на продольном крае наследственно ползучей части заданы перемещения, а на аналогичном крае упругого слоя — напряжения, перемещения или их соответствующие комбинации. Задача, в частности, моделирует взаимодействие упругого фундамента с основанием конечной мощности (толщины) и реологическими свойствами [2, 3]. Выведены рекуррентные формулы для вычисления напряжений и перемещений в каждом слое. На основе полученных асимптотически точных решений для конкретных случаев нагружения проводится анализ зависимости напряжений и перемещений от времени и вида граничных функций.

Полученные формулы характерны тем, что они, в отличие от [2, 3], выведены без принятия каких-либо гипотез и могут быть применены, в частности, в расчетах фундаментов и реономных оснований по модели сжимаемого слоя.

1. Пусть имеем двухслойную полосу $\Omega = \{x, z: -l \le x \le l, -h_2 \le z \le h_1, l \gg h_1 + h_2\}$, отнесенную к прямоугольной системе координат Oxz, где слой $0 \le z \le h_1$ упругий, а слой $-h_2 \le z \le 0$ упругоползучий (фигура).

Считается, что на границе $z = -h_2$ полосы заданы компоненты вектора перемещения

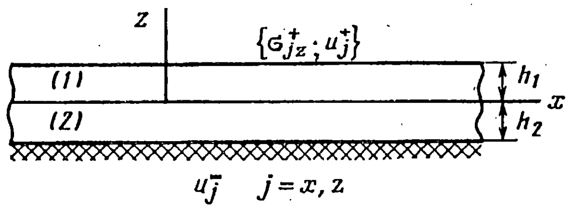
$$u_j(-h_2) = u_j^-, \ j = x, z \tag{1.1}$$

а на противоположной грани $z = h_1$ заданы напряжения

$$\sigma_{jz}(h_1) = \varepsilon^{-1}\sigma_{jz}^+, \ j = x, z \tag{1.2}$$

перемещения

$$u_j(h_1) = u_j^+, \ j = x, z \tag{1.3}$$



или их соответствующие комбинации

$$\text{а) } u_x(h_1) = u_x^+, \quad \sigma_{zz}(h_1) = \varepsilon^{-1}\sigma_{zz}^+$$

$$\text{б) } \sigma_{xz}(h_1) = \varepsilon^{-1}\sigma_{xz}^+, \quad u_z(h_1) = u_z^+ \tag{1.4}$$

Между упругим и реологическим слоями выполняются условия полного контакта

$$u_j^{(1)}(x, 0) = u_j^{(2)}(x, 0), \quad \sigma_{jz}^{(1)}(x, 0) = \sigma_{jz}^{(2)}(x, 0), \quad j = x, z \tag{1.5}$$

где индексом (1) обозначены величины упругого слоя, а индексом (2) — реологического слоя.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние двухслойной полосы. Для решения поставленной задачи должны быть удовлетворены уравнения равновесия

$$\partial\sigma_{xx}^{(i)}/\partial x + \partial\sigma_{xz}^{(i)}/\partial z = 0 \quad (x, z) \quad i = 1, 2 \tag{1.6}$$

справедливые для обоих слоев; соотношения упругости

$$\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} = \frac{1}{E_1}\left(\sigma_{xx}^{(1)} - \nu_1\sigma_{zz}^{(1)}\right) \quad (x, z)$$

$$\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x} = \frac{2(1 + \nu_1)}{E_1}\sigma_{xz}^{(1)} \tag{1.7}$$

для упругого ($i = 1$) слоя и соотношения наследственной теории ползучести [4] для слоя $i = 2$:

$$\frac{\partial u_x^{(2)}(t)}{\partial x} = \frac{1}{E_2(t)}\left[\sigma_{xx}^{(2)}(t) - \nu_2(t)\,\sigma_{zz}^{(2)}(t)\right] - \int_{\tau_1}^{t}\left[\sigma_{xx}^{(2)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau) - \sigma_{zz}^{(2)}\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)\right]d\tau,$$

$$(x,\ z) \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial u_x^{(2)}(t)}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(2)}(\tau)}{\partial x} = \frac{2}{E_2(t)}\left[1 + \nu_2(t)\right]\sigma_{xz}^{(2)}(t) - 2\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{xz}^{(2)}(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau) + \frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)\right]d\tau \tag{1.9}$$

где $E_2(t)$ — модуль упругомгновенной деформации, $\nu_2(t)$ — коэффициент поперечной упругой части деформации; $\delta(t,\tau) = 1/E_2(\tau) + C(t,\tau)$ — полная относительная деформация при сжатии или растяжении; $\delta_1(t,\tau) = \nu_2(\tau)/E_2(\tau) + \nu(t,\tau)\,C(t,\tau)$ — полная относительная поперечная деформация; $\nu(t,\tau)$ — коэффициент поперечного сжатия при деформации ползучести; $C(t,\tau)$ — мера ползучести при сжатии или растяжении; τ_1 — время (момент времени) приложения нагрузки.

Должны быть удовлетворены также граничные условия (1.1)—(1.5) и условия при $x = \pm l$, которые принимаются обычными.

Для решения поставленной задачи перейдем к безразмерным координатам

$\xi = x/l, \zeta = z/h = \varepsilon^{-1}z/l, \varepsilon = h/l, h = \max(h_1, h_2)$ и безразмерным перемещениям $u^{(i)} = u_x^{(i)}/l$, $w^{(i)} = u_z^{(i)}/l$, где l — характерный размер полосы. В результате получаем

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(i)}(t)}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xz}^{(i)}(t)}{\partial\zeta} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{xz}^{(i)}(t)}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{zz}^{(i)}(t)}{\partial\zeta} = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi} = \frac{1}{E_1}(\sigma_{xx}^{(1)} - \nu_1\sigma_{zz}^{(1)}) \tag{1.11}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial\xi} = \frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\sigma_{xz}^{(1)}, \quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\zeta} = \frac{1}{E_1}(\sigma_{zz}^{(1)} - \nu_1\sigma_{xx}^{(1)})$$

$$\frac{\partial u^{(2)}(t)}{\partial\xi} = \frac{1}{E_2(t)}[\sigma_{xx}^{(2)}(t) - \nu_2(t)\,\sigma_{zz}^{(2)}(t)] - \int_{\tau_1}^{t}[\sigma_{xx}^{(2)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau) - \sigma_{zz}^{(2)}\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)]\,d\tau \tag{1.12}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial u^{(2)}(t)}{\partial\zeta} + \frac{\partial w^{(2)}(t)}{\partial\xi} = \frac{2\,[1+\nu_2(t)]}{E_2(t)}\sigma_{xz}^{(2)}(t) - 2\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{xz}^{(2)}(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau) + \frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)\right]d\tau$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial w^{(2)}(t)}{\partial\zeta} = \frac{\sigma_{zz}^{(2)}(t) - \nu_2(t)\,\sigma_{xx}^{(2)}}{E_2(t)} - \int_{\tau_1}^{t}[(\sigma_{zz}^{(2)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau) - \sigma_{xx}^{(2)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)]\,d\tau \tag{1.13}$$

Преобразовав (1.12) и решив интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\sigma_{xx}^{(2)}(t)$, получим

$$\sigma_{xx}^{(2)}(t) = E_2(t)\frac{\partial u^{(2)}(t)}{\partial\xi} + \nu_2(t)\,\sigma_{zz}^{(2)}(t) + \int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial u^{(2)}(\tau)}{\partial\xi}E_2(\tau)\,R(t,\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t}\sigma_{zz}^{(2)}(\tau)\,R^*(t,\tau)\,d\tau$$

$$R^*(t,\tau) = \nu_2(\tau)\,R(t,\tau) - E_2(t)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau) - \int_{\tau}^{t}E_2(\alpha)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(\alpha,\tau)\,R(t,\alpha)\,d\alpha \tag{1.14}$$

где $R(t,\tau)$ — резольвента ядра $K(t,\tau) = E_2(t)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)$.

Решение системы (1.10), (1.11), (1.13), (1.14) ищем в виде асимптотического представления [1, 5, 6]:

$$Q_j^{(i)} = \sum_{s=0}^{N}\varepsilon^{\varkappa_j+s}\,Q_j^{(i,s)} \quad (i = 1, 2) \tag{1.15}$$

где $\varkappa_u = 0$ для перемещений и $\varkappa_\sigma = -1$ для напряжений.

Подставив (1.15) в (1.10), (1.11), (1.13), (1.14) и приравняв коэффициенты при соответствующих степенях ε получим систему относительно неизвестных коэффициентов $Q_j^{(i,s)}$, решив которую получим следующие рекуррентные формулы для определения общего интеграла указанной системы уравнений

$$\sigma_{jz}^{(i,s)} = \sigma_{jz0}^{(i,s)}(\xi) + \sigma_{jz*}^{(i,s)}(\xi,\zeta)\; j = x, z; \quad (i = 1, 2) \tag{1.16}$$

$$\sigma_{xx}^{(1,s)} = \nu_1\sigma_{zz0}^{(1,s)} + \sigma_{xx*}^{(1,s)}(\xi,\zeta)$$

$$u^{(1,s)}=\zeta\frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\sigma_{xz0}^{(1,s)}+u_0^{(1,s)}(\xi)+u_*^{(1,s)}(\xi,\zeta) \tag{1.17}$$

$$w^{(1,s)}=\zeta\frac{1-\nu_1^2}{E_1}\sigma_{zz0}^{(1,s)}+w_0^{(1,s)}(\xi)+w_*^{(1,s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_{jz*}^{(i,s)}=-\int_0^\zeta\frac{\partial\sigma_{jx}^{(i,s-1)}}{\partial\xi}d\zeta\quad j=x,z,\ (i=1,2)$$

$$\sigma_{xx*}^{(1,s)}=\nu_1\sigma_{zz*}^{(1,s)}+E_1\frac{\partial u^{(1,s-1)}}{\partial\xi}$$

$$u_*^{(1,s)}(\xi,\zeta)=\int_0^\zeta\left[\frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\sigma_{xz*}^{(1,s)}-\frac{\partial w^{(1,s-1)}}{\partial\xi}\right]d\zeta$$

$$w_*^{(1,s)}(\xi,\zeta)=\int_0^\zeta\frac{1}{E_1}(\sigma_{zz*}^{(1,s)}-\nu_1\sigma_{xx*}^{(1,s)})\,d\zeta$$

$$\sigma_{xx}^{(2,s)}(t)=\nu_2(t)\,\sigma_{zz0}^{(2,s)}(t)+\int_{\tau_1}^t\sigma_{zz0}^{(2,s)}(\tau)R^*(t,\tau)\,d\tau+\sigma_{xx*}^{(2,s)}(t) \tag{1.18}$$

$$u^{(2,s)}(t)=2\zeta\frac{1+\nu_2(t)}{E_2(t)}\sigma_{xz0}^{(2,s)}(t)+u_0^{(2,s)}+u_*^{(2,s)}-$$

$$-2\zeta\int_{\tau_1}^t\sigma_{xz0}^{(2,s)}(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)+\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)\right]d\tau$$

$$w^{(2,s)}(t)=\zeta\frac{1-\nu_2^2(t)}{E_2(t)}\sigma_{zz0}^{(2,s)}+w_0^{(2,s)}+w_*^{(2,s)}+\zeta\int_\tau^t\sigma_{zz0}^{(2,s)}(\tau)R_1(t,\tau)\,d\tau \tag{1.19}$$

$$R_1(t,\tau)=\nu_2(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)-\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)-\frac{\nu_2(t)}{E_2(t)}R^*(t,\tau)+\int_\tau^t R^*(\alpha,\tau)\frac{\partial}{\partial\alpha}\delta_1(t,\alpha)\,d\alpha$$

$$\sigma_{xx*}^{(2,s)}(t)=E_2(t)\frac{\partial u^{(2,s-1)}(t)}{\partial\xi}+\int_{\tau_1}^t E_2(t)\frac{\partial u^{(2,s-1)}(\tau)}{\partial\xi}R(t,\tau)\,d\tau+$$

$$+\nu_2(t)\,\sigma_{zz*}^{(2,s)}(t)+\int_{\tau_1}^t\sigma_{zz*}^{(2,s)}(\tau)R^*(t,\tau)\,d\tau$$

$$u_*^{(2,s)}(t)=\int_0^\zeta\left\{\frac{2}{E_2(t)}[1+\nu_2(t)]\,\sigma_{xz*}^{(2,s)}(t)-\frac{\partial w^{(2,s-1)}(t)}{\partial\xi}-\right.$$

$$\left.-2\int_{\tau_1}^t\sigma_{xz*}^{(2,s)}(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)-\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)\right]d\tau\right\}d\zeta \tag{1.20}$$

$$w_*^{(2,s)}(t)=\int_0^\zeta\left[\frac{\sigma_{zz*}^{(2,s)}(t)}{E_2(t)}-\int_{\tau_1}^t\sigma_{zz*}^{(2,s)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau-\right.$$

$$\left.-\frac{\nu_2(t)}{E_2(t)}\sigma_{xx*}^{(2,s)}(t)+\int_{\tau_1}^t\sigma_{xx*}^{(2,s)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)\,d\tau\right]d\zeta$$

где $\sigma_{xz0}^{(i,s)}$, $\sigma_{zz0}^{(i,s)}$, $u_0^{(i,s)}$, $w_0^{(i,s)}$ — неизвестные функции интегрирования, которые однозначно определяются из граничных условий (1.1)—(1.4) и условий контакта (1.5).

2. Удовлетворив условиям контакта (1.5), с учетом (1.18), (1.20) получим

$$\sigma_{jz0}^{(1,s)} = \sigma_{jz0}^{(2,s)} = \sigma_{jz0}^{(s)}, j = x, z$$

$$u_0^{(1,s)} = u_0^{(2,s)} = u_0^{(s)} \quad (u, v) \tag{2.1}$$

Удовлетворив затем граничным условиям (1.1) на линии $z = -h_2$ $(\zeta = \zeta_2 = -h_2/h)$, получаем

$$u_0^{(s)} = \frac{2\,[1 + \nu_2(t)]}{E_2(t)} \sigma_{xz0}^{(s)}(t) + u_x^{-(s)} - u_*^{(2,s)}(\zeta = -\zeta_2) -$$

$$- 2\int_{\tau_1}^{t} \sigma_{xz0}^{(2,s)}(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \delta\ (t, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_1 (t, \tau) \right] d\tau \tag{2.2}$$

$$w_0^{(s)} = \frac{1 - \nu_2^2(t)}{E_2(t)} \sigma_{zz0}^{(s)} + u_z^{-(s)} - w_*^{(2,s)}(\zeta = -\zeta_2) + \int_{\tau_1}^{t} \sigma_{zz0}^{(2,s)}(\tau) R_1(t, \tau)\, d\tau$$

$u_j^{-(0)} = u_j^-$, $u_j^{-(s)} = 0$ при $s \neq 0$, $j = x, z$. Остальные величины определяются из условий при $\zeta = \zeta_1 = h_1/h$.

Если удовлетворить граничным условиям (1.2), будем иметь

$$\sigma_{jz0}^{(s)} = \sigma_{jz}^{+(s)} - \sigma_{jz*}^{(1,s)}(\zeta_1), \quad j = x, z \tag{2.3}$$

$$\sigma_{jz}^{+(0)} = \sigma_{jz}^+; \quad \sigma_{jz}^{+(s)} = 0, \; j = x, z \text{ при } s \neq 0$$

Таким образом, решение поставленной краевой задачи с граничными условиями (1.1), (1.2) записывается в виде рекуррентных формул (1.16)—(1.20), (2.1)—(2.3).

Удовлетворив граничным условиям (1.3), для неизвестных интегрирования имеем

$$\sigma_{xz0}^{(s)} = \frac{E_1}{2\zeta_1(1 + \nu_1)} \left(u_x^{+(s)} - u_x^{-(s)} + u_*^{(2,s)}(-\zeta_2) - u_*^{(1,s)}(\zeta_1)\right) \tag{2.4}$$

$$\sigma_{zz0}^{(s)} = \frac{E_1}{\zeta_1(1 - \nu_1^2)} \left(u_z^{+(s)} - u_z^{-(s)} + w_*^{(2,s)}(-\zeta_2) - w_*^{(1,s)}(\zeta_1)\right)$$

$$u_j^{\pm(0)} = u_j^{\pm}, \quad u_j^{\pm(s)} = 0 \text{ при } s \neq 0, \; j = x, z$$

Решение поставленной задачи с граничными условиями (1.1), (1.3) определяется рекуррентными формулами (1.16)—(1.20), (2.1)—(2.2), (2.4).

Из граничных условий (1.4) для случаев а) и б) соответственно получаем

$$\text{а)} \quad \sigma_{zz0}^{(s)} = \sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{zz*}^{(1,s)}(\zeta_1) \tag{2.5}$$

$$\sigma_{xz0}^{(s)} = \frac{E_1}{2\zeta_1(1 + \nu_1)} \left(u_x^{+(s)} - u_x^{-(s)} + u_*^{(2,s)}(-\zeta_2) - u_*^{(1,s)}(\zeta_1)\right)$$

$$\text{б)} \quad \sigma_{zz0}^{(s)} = \frac{E_1}{\zeta_1(1 - \nu_1^2)} \left(u_z^{+(s)} - u_z^{-(s)} + w_*^{(2,s)}(-\zeta_2) - w_*^{(1,s)}(\zeta_1)\right) \tag{2.6}$$

$$\sigma_{xz0}^{(s)} = \sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{xz*}^{(1,s)}(\zeta_1)$$

Формулы (2.5) и (2.6) вместе с (1.16)—(1.20), (2.1), (2.2) дают решения краевых задач с граничными условиями (1.1), (1.4).

Полученные решения позволяют с любой заранее заданной асимптотической точностью определить напряженно-деформированные состояния двухслойной полосы, кроме небольшой вблизи краев $x = \pm l$ зоны затухания решений типа пограничного слоя [7, 8]. Для получения результатов, справедливых вплоть до краев $x = \pm l$, необходимо к найденному решению добавить решение погранслоя [7, 8].

Отметим также, что итерационный процесс обрывается и получается точное решение внутренней задачи после $n+1$ шага приближения, если граничные функции σ_{jz}^{+}, $u_j^{\pm}$ $(j = x, z)$ являются полиномами степени n от продольной координаты x.

3. Пусть полные относительные продольная и поперечная деформации наследственно ползучего материала во времени меняются по законам [4]:

$$\delta(t, \tau) = 1/E_2(\tau) + \varphi(\tau)\,(1 - \exp[-\gamma(t - \tau)]) \tag{3.1}$$

$$\delta_1(t, \tau) = \nu_2 \delta(t, \tau), \quad \nu_2 = \mathrm{const}$$

Интегральное уравнение Вольтерра второго рода (1.12) можно привести к дифференциальному уравнению второго порядка (точки наверху букв означают производные соответствующего порядка по времени):

$$\ddot{\Phi}(t) + P(t)\,\dot{\Phi}(t) = E_2(t)\,(\partial \ddot{u}^{(2)}/\partial\xi) + \gamma\,\partial \dot{u}^{(2)}/\partial\xi) \tag{3.2}$$

$$P(t) = \gamma E_2(t)\,\varphi(t) + \gamma - \dot{E}_2(t)/E_2(t), \quad \Phi(t) = \sigma_{xx}^{(2)}(t) - \nu_2 \sigma_{zz}^{(2)}(t)$$

с начальными условиями

$$\Phi(\tau_1) = E_2(\tau_1)\,\frac{\partial u^{(2)}(\tau_1)}{\partial\xi}, \quad \dot{\Phi}(\tau_1) = E_2(\tau_1)\left(\frac{d\dot{u}^{(2)}(\tau_1)}{\partial\xi} - \gamma E_2(\tau_1)\,\varphi(\tau_1)\,\frac{\partial u^{(2)}(\tau_1)}{\partial\xi}\right) \tag{3.3}$$

решением которого является

$$\sigma_{xx}^{(2)}(t) = \nu_2 \sigma_{zz}^{(2)}(t) + E_2(\tau_1)\,\frac{\partial u^{(2)}(\tau_1)}{\partial\xi} + \Phi(\tau_1)\int_{\tau_1}^{t} \exp\left(-\int_{\tau_1}^{\tau} P\,d\alpha\right) d\tau +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t}\left[\int_{\tau_1}^{\tau} E_2(\alpha)\left(\frac{\partial \ddot{u}^{(2)}(\alpha)}{d\xi} + \gamma\,\frac{\partial \dot{u}^{(2)}(\alpha)}{\partial\xi}\right) \exp\left(\int_{\tau}^{\alpha} P\,d\alpha\right)\right] d\tau \tag{3.4}$$

Тогда (1.18)—(1.20), (2.2) принимают вид

$$\sigma_{xx}^{(2,s)}(t) = \nu_2 \sigma_{zz0}^{(s)}(t) + \sigma_{xx*}^{(2,s)}(t)$$

$$u^{(2,s)}(t) = 2\zeta\,\frac{1 + \nu_2}{E_2(t)}\,\sigma_{xz0}^{(s)}(t) + u_0^{(s)}(t) + u_*^{(2,s)}(\zeta) -$$

$$- 2\zeta\,(1 + \nu_2)\int_{\tau_1}^{t} \sigma_{xz0}^{(s)}(\tau)\,\frac{\partial}{\partial\tau}\,\delta(t, \tau)\,d\tau$$

$$w^{(2,s)}(t) = \zeta\,\frac{1 - \nu_2^2}{E_2(t)}\,\sigma_{zz0}^{(s)}(t) + w_0^{(s)}(t) + w_*^{(2,s)}(\zeta) - \xi\,(1 - \nu_2^2)\int_{\tau_1}^{t} \sigma_{zz0}^{(s)}(\tau)\,\frac{\partial}{\partial\tau}\,\delta(t, \tau)\,d\tau \tag{3.5}$$

$$\sigma_{xx*}^{(2,s)}(t) = \nu_2 \sigma_{zz*}^{(2,s)}(t) + E_2(\tau_1)\,\frac{\partial u^{(2,s-1)}(\tau_1)}{\partial\xi} +$$

$$+ E_2(\tau_1)\left(\frac{d\dot{u}^{(2,s-1)}(\tau_1)}{\partial\xi} - \gamma E_2(\tau_1)\,\varphi(\tau_1)\,\frac{\partial u^{(2,s-1)}(\tau_1)}{\partial\xi}\right)\int_{\tau_1}^{t} \exp\left(-\int_{\tau_1}^{\tau} P\,d\beta\right) d\tau +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t}\left[\int_{\tau_1}^{\tau} E_2(\alpha)\left(\frac{\partial \ddot{u}^{(2,s-1)}(\alpha)}{\partial\xi} + \gamma\,\frac{\partial \dot{u}^{(2,s-1)}(\alpha)}{\partial\xi}\right) \exp\left(\int_{\tau}^{\alpha} P\,d\beta\right) d\alpha\right] d\tau$$

$$u_*^{(2,s)} = 2(1+\nu_2)\int_0^{\zeta}\left[\frac{\sigma_{xz*}^{(2,s)}(t)}{E_2(t)} - \int_{\tau_1}^{t}\sigma_{xz*}^{(2,s)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau\right]d\zeta - \int_0^{\zeta}\frac{\partial w^{(2,s-1)}(t)}{\partial\xi}\,d\zeta$$

$$w_*^{(2,s)} = \int_0^{\zeta}\left[\frac{\sigma_{zz*}^{(2,s)}(t) - \nu_2\sigma_{xx*}^{(2,s)}(t)}{E_2(t)} - \int_{\tau_1}^{t}(\sigma_{zz*}^{(2,s)}(\tau) - \nu_2\sigma_{xx*}^{(2,s)}(\tau))\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau\right]d\zeta$$

$$u_0^{(s)} = 2(1+\nu_2)\left[\frac{\sigma_{xz0}^{(s)}(t)}{E_2(t)} - \int_{\tau_1}^{t}\sigma_{xz0}^{(s)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau\right] + u_x^{-(s)} - u_*^{(2,s)}(-\zeta_2) \quad (3.6)$$

$$w_0^{(s)} = \frac{1-\nu_2^2}{E_2(t)}\sigma_{zz0}^{(s)}(t) + u_z^{-(s)} - w_*^{(2,s)}(-\zeta_2) - (1-\nu_2^2)\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{zz0}^{(s)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau$$

В качестве иллюстрации возможностей полученных расчетных формул, рассмотрим двухслойную полосу, состоящую из упругого и упругоползучего слоев со свойствами материала (3.1). Известно, что такими свойствами обладают, в частности, бетон, различные пластмассы [4, 9]. Пусть граница упругоползучей части $z=-h_2$ жестко закреплена, а на упругий продольный край $z=h_1$ действуют нормальные и тангенциальные нагрузки. Тогда

$$u_j(z=-h_2) = u_j^- = 0, \quad \sigma_{jz}(z=h_1) = \sigma_{jz}^+, \; j=x,z \quad (3.7)$$

После трех шагов итерации, достаточных для инженерных расчетов, для вычисления напряженно-деформированного состояния полосы с точностью $O(\varepsilon^3)$ получаем формулы

$$\sigma_{xz}^{(i)} = \beta_0^{(i)}\sigma_{xz}^+ + \beta_1^{(i)}d\sigma_{zz}^+/dx + \beta_2^{(i)}d^2\sigma_{xz}^+/dx^2 \quad (3.8)$$

$$\sigma_{zz}^{(i)} = \gamma_0^{(i)}\sigma_{zz}^+ + \gamma_1^{(i)}d\sigma_{xz}^+/dx + \gamma_2^{(i)}d^2\sigma_{zz}^+/dx^2$$

$$\sigma_{xx}^{(i)} = \alpha_0^{(i)}\sigma_{zz}^+ + \alpha_1^{(i)}d\sigma_{xz}^+/dx + \alpha_2^{(i)}d^2\sigma_{zz}^+/dx^2$$

$$u_x^{(i)} = a_0^{(i)}\sigma_{xz}^+ + a_1^{(i)}d\sigma_{zz}^+/dx + a_2^{(i)}d^2\sigma_{xz}^+/dx^2$$

$$u_z^{(i)} = c_0^{(i)}\sigma_{zz}^+ + c_1^{(i)}d\sigma_{xz}^+/dx + c_2^{(i)}d^2\sigma_{zz}^+/dx^2$$

где для упругого слоя $i=1$, $0 \le z \le h_1$:

$$\beta_0^{(1)} = \gamma_0^{(1)} = 1, \quad \alpha_0^{(1)} = \nu_1$$

$$a_0^{(1)} = 2z\frac{1+\nu_1}{E_1} + 2h_2(1+\nu_2)\delta(t,\tau_1)$$

$$c_0^{(1)} = z\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + h_2(1-\nu_2^2)\delta(t,\tau_1)$$

$$\beta_1^{(1)} = (h_1 - z)\nu_1, \quad \gamma_1^{(1)} = h_1 - z$$

$$\alpha_1^{(1)} = h_1\nu_1 + z(2+\nu_1) + 2h_2E_1(1+\nu_2)\delta(t,\tau_1)$$

$$a_1^{(1)} = 2zh_1\nu_1(1+\nu_1)/E_1 - 1/2\,z^2(1+\nu_1)^2/E_1 +$$
$$+ h_2(1+\nu_2)\delta(t,\tau_1)[2h_1 + 1/2\,h_2(3\nu_2 - 1) - z(1-\nu_2)]$$

$$c_1^{(1)} = \frac{1+\nu_1}{E_1}[zh_1(1-\nu_1) - 1/2\,z^2(1+\nu_1)] +$$
$$+ (1+\nu_2)h_2[h_1(1-\nu_2) + 1/2\,h_2(1-3\nu_2) - 2z\nu_1]\delta(t,\tau_1) \quad (3.9)$$

$$\beta_2^{(1)} = [1/2(h_1^2 - z^2)(2+\nu_1) + h_1(h_1 - z)\nu_1 + 2(h_1 - z)h_2E_1(1+\nu_2)\delta(t,\tau_1)]$$

$$\gamma_2^{(1)} = 1/2\,\nu_1\,(h_1 - z)(h_1 + z)$$

$$\alpha_2^{(1)} = 1/2\,h_1^2\nu_1 - 1/2 z^2\,(1 + 2\nu_1) + zh_1\nu_1\,(2 + \nu_1) +$$
$$+ h_2\,(1 + \nu_2)[2h_1\nu_1 + 1/2\,h_2\,(3\nu_2 - 1) - z\,(1 - \nu_2)]\,E_1\delta\,(t, \tau_1)$$

$$a_2^{(1)} = \frac{1 + \nu_1}{E_1}\,[zh_1^2\,(2 + 3\nu_1) - 1/6\,z^3\,(3 + \nu_1) - 1/2\,z^2h_1\,(1 + \nu_1)] -$$
$$-h_2\,(1 + \nu_2)[z^2\,(2 + \nu_1) - zh_1\,(3 + 4\nu_1 + \nu_2) + 1/2\,zh_2\,(1 - 3\nu_2) -$$
$$- h_1^2\,(2 + 3\nu_1) - 1/3\,h_2^2\,(3 - 7\nu_2) + 1/2\,h_1h_2\,(1 - 3\nu_2) -$$
$$- 4h_1h_2E_1\,\frac{1 + \nu_2}{E_2\,(t)}\,]\,\delta\,(t, \tau_1) - 4h_1h_2^2E_1\,(1 + \nu_2)^2 J\,(t)$$

$$c_2^{(1)} = \frac{\nu_1\,(1 + \nu_1)}{E_1}\,[1/2\,zh_1^2\,(1 - \nu_1) + 1/3\,z^3 - 1/2\,z^2h_1\,(1 + \nu_1)] +$$
$$+ h_2\,(1 + \nu_2)[1/2\,h_1^2\nu_1\,(1 - \nu_2) + 1/2\,h_1h_2\nu_1\,(1 - 3\nu_2) + 1/3\,h_2^2\nu_2\,(1 - 3\nu_2) +$$
$$+ 1/2\,z^2\nu_1\,(1 - \nu_2) - 2zh_1\nu_1^2 + 1/2\,zh_2\nu_1\,(1 - 3\nu_2)]\,\delta\,(t, \tau_1)$$

$$J\,(t) = \int_{\tau_1}^{t} \delta\,(\tau, \tau_1)\,\frac{\partial}{\partial\tau}\,\delta\,(t, \tau)\,d\tau$$

а для упругоползучего слоя $i = 2$, $-h_2 \le z \le 0$ имеем

$$\beta_0^{(2)} = \gamma_0^{(2)} = 1, \quad \alpha_0^{(2)} = \nu_2$$

$$a_0^{(2)} = 2\,(z + h_2)(1 + \nu_2)\,\delta\,(t, \tau_1)$$

$$c_0^{(2)} = (z + h_2)(1 - \nu_2^2)\,\delta\,(t, \tau_1)$$

$$\beta_1^{(2)} = h_1\nu_1 - z\nu_2, \quad \gamma_1^{(2)} = h_1 - z$$

$$\alpha_1^{(2)} = h_1\nu_2 + z\,(2 + \nu_2) + 2h_2\,(1 + \nu_2)$$

$$a_1^{(2)} = (1 + \nu_2)[2zh_1\nu_1 + 2h_1h_2\nu_1 - 1/2\,(z^2 - h_2^2)(1 + \nu_2) - (z + h_2)\,h_2\,(1 - \nu_2)]\,\delta\,(t, \tau_1)$$

$$c_1^{(2)} = (1 + \nu_2)[(z + h_2)\,h_1\,(1 - \nu_2) - 1/2\,(z^2 - h_2^2)(1 + \nu_2) - 2\,(z + h_2)\,h_2\nu_2]\,\delta\,(t, \tau_1)$$

$$\beta_2^{(2)} = 1/2 h_1^2\,(2 + 3\nu_1) + 2h_1h_2E_1\,(1 + \nu_2)\,\delta\,(t, \tau_1) - 1/2\,z^2\,(2 + \nu_2) - zh_1\nu_2 - 2zh_2\,(1 + \nu_2)$$

$$\gamma_2^{(2)} = 1/2\,h_1^2\nu_1 - zh_1\nu_1 + 1/2\,z^2\nu_2$$

$$\alpha_2^{(2)} = 1/2\,z^2\nu_2^2 + 1/2\,h_1^2\nu_1\nu_2 + zh_1\nu_1\,(2 + \nu_2) + 2h_1h_2\nu_1\,(1 + \nu_2) -$$
$$- 1/2\,(z^2 - h_2^2)(1 + \nu_2)^2 - h_2\,(z + h_2)(1 - \nu_2^2) \tag{3.10}$$

$$a_2^{(2)} = (1 + \nu_2)\Big[\,h_1^2\,(z + h_2)(2 + 3\nu_1) - 1/6\,(z^3 + h_2^3)(3 + \nu_2) - 1/2\,h_1\,(z^2 - h_2^2)(1 + \nu_2) -$$
$$- h_2\,(z^2 - h_2^2)(2 + \nu_2) - h_1h_2\,(z + h_2)(1 - \nu_2) - 1/2\,h_2^2\,(z + h_2)(1 - 3\nu_2) +$$
$$+ 4h_1h_2\,(z + h_2)\,E_1\,\frac{1 + \nu_2}{E_2\,(t)}\Big]\,\delta\,(t, \tau_1) - 4h_1h_2\,(z + h_2)\,E_1\,(1 + \nu_2)^2 J\,(t)$$

$$c_2^{(2)} = (1 + \nu_2)[1/2 h_1^2\,(z + h_2)\,\nu_1\,(1 - \nu_2) + 1/3\,(z^3 + h_2^3)\,\nu_2 - 1/2 h_1\nu_1\,(z^2 - h_2^2)(1 + \nu_2) +$$
$$+ 1/2 h_2\,(z^2 - h_2^2)\,\nu_2\,(1 - \nu_2) - 2h_1h_2\,(z + h_2)\,\nu_1\nu_2 - 1/2 h_2^2\,(z + h_2)\,\nu_2\,(3\nu_2 - 1)]\,\delta\,(t, \tau_1)$$

Решение (3.8)—(3.10) превратится в точное решение внутренней задачи, если граничные функции σ_{xz}^+, σ_{zz}^+ являются многочленами второй степени относительно x.

Из этого решения следует, что, если граничная функция постоянна, то напряженное состояние в слоях не меняется во времени. Меняются только перемещения, при этом упругий слой перемещается поступательно (жестко). Компонентами вектора поступательного по времени перемещения будут

$$u^{(1)}_{x,\,\mathrm{const}} = 2h_2\,(1 + \nu_2)\,\delta\,(t, \tau_1)\,\sigma^+_{xz}, \quad u^{(1)}_{z,\,\mathrm{const}} = h_2\,(1 - \nu_2^2)\,\delta\,(t, \tau_1)\,\sigma^+_{zz} \tag{3.11}$$

Если же граничные функции линейные, в упругом слое по времени меняется только $\sigma^{(1)}_{xx}$, а $\sigma^{(1)}_{xz}$, $\sigma^{(1)}_{zz}$ не меняются. Лишь начиная с квадратичной нагрузки для σ^+_{xz} и кубической для σ^+_{zz}, в упругом слое все напряжения будут меняться во времени. Что же касается напряжений $\sigma^{(2)}_{zz}$, $\sigma^{(2)}_{xx}$ реономного слоя, то они по времени меняются с кубической граничной нагрузки, т. е. их изменение следует учитывать при точности $O\,(\varepsilon^4)$ и более. Эти выводы могут оказаться полезными в расчетах оснований и фундаментов по модели сжимаемого слоя [2], клеевых соединений с учетом реологических свойств клеев.

В заключение заметим, что в поставленной выше задаче, поскольку граничные условия не меняются с течением времени, согласно принципу Вольтерра для получения решения задачи линейной теории наследственности можно в решении задачи линейной теории упругости заменить упругие постоянные соответствующими им линейными операторами [9]. Однако это привело бы к большим затруднениям вычислительного характера, поскольку в соответствующие подинтегральные выражения вошли бы не только переменные коэффициенты упругости, но и их квадраты, кубы и т. д. Приведенное выше решение лишено этого, выведенные расчетные формулы сравнительно просты и удобны для приложений, например, по ним легко вычислить осадку основания сооружения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости//ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668—686.
2. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
3. *Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И.* Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. 679 с.
4. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.: ГИТТЛ, 1952, 323 с.
5. *Агаловян Л. А.* О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела. Механика. Ереван: Из-во Ереван. ун-та, 1982. Вып. 2. С. 7—12.
6. *Агаловян Л. А., Геворкян Р. С.* Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок//ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 271—278.
7. *Агаловян Л. А.* Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач. Механика. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1984. Вып. 3. С. 51—58.
8. *Геворкян Р. С.* Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин//Изв. АН Арм.ССР, Механика. 1984. Т. 37. № 6. С. 3—15.
9. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 387 с.

Ереван

Поступила в редакцию
15.IV.1991