МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1992

УДК 539.214;539.374

 Д. Д. ИВЛЕВ, А. В. РОМАНОВ

ОБ УСЛОВИЯХ ТЕКУЧЕСТИ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

В работе с общих позиций рассматриваются условия пластичности для кусочно гладких поверхностей текучести. Установлено, что в случае полной пластичности ранг матрицы компонент девиаторов напряжений равен единице. Это единственный случай, когда пространственная задача становится статически определимой. Рассмотрен также общий случай грани условия пластичности.

1. Рассмотрим ребро призмы, интерпретирующей условие текучести в пространстве главных напряжений

$$\sigma_1 - \sigma_3 = a, \sigma_2 - \sigma_3 = b \tag{1.1}$$

Соотношения связи между компонентами напряжений σ_{ij} в декартовой системе координат xyz и главными напряжениями σ_1, σ_2, σ_3 запишем в виде

$$\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2 \qquad (xyz)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \quad (123) \tag{1.2}$$

где l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы, обозначения (xyz), (123) определяют круговую перестановку индексов.

Имеют место соотношения

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad (123)$$

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \quad l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0 \tag{1.3}$$

Согласно (1.1), (1.2), (1.3), получим

$$\sigma_x - \sigma_3 = a l_1^2 + b m_1^2, \quad \tau_{xy} = a l_1 l_2 + b m_1 m_2 \quad (xyz)\ (123) \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует

$$\sigma - \sigma_3 = 1/3\,(a + b), \quad \sigma = 1/3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{1.5}$$

Умножая компоненты $\sigma_x - \sigma_3$, τ_{xy}, τ_{xz},... соответственно на n_1, n_2, n_3 и суммируя, получим

$$n_1(\sigma_x - \sigma_3) + n_2\tau_{xy} + n_3\tau_{xz} = 0$$

$$n_1\tau_{xy} + n_2(\sigma_y - \sigma_3) + n_3\tau_{yz} = 0$$

$$n_1\tau_{xz} + n_2\tau_{yz} + n_3(\sigma_z - \sigma_3) = 0 \tag{1.6}$$

Из (1.6) следует известное соотношение для определения главных напряжений

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_3 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xzy} & \sigma_y - \sigma_3 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует

$$\Sigma_3{}^* = \sigma_x{}^* \sigma_y{}^* \sigma_z{}^* + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x{}^*\tau_{yz}^2 - \sigma_y{}^*\tau_{xz}^2 - \sigma_z{}^*\tau_{xy}^2 = 0 \tag{1.8}$$

где $\sigma_x{}^* = \sigma_x - \sigma_3, \ldots$.

Из (1.4) можно получить

$$\Sigma_2{}^* = -\sigma_x{}^*\sigma_y{}^* - \sigma_y{}^*\sigma_z{}^* - \sigma_z{}^*\sigma_x{}^* + \tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{zx} = -ab \tag{1.9}$$

В случае ребра призмы Треска (условие полной пластичности) либо $a=0$, либо $b=0$ и условия (1.8), (1.9) имеют вид

$$\Sigma_2{}^* = \Sigma_3{}^* = 0 \tag{1.10}$$

При условиях (1.10) ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \sigma_x{}^* & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y{}^* & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z{}^* \end{pmatrix}$$

равен единице и все миноры второго порядка равны нулю [1]:

$$\sigma_x{}^*\sigma_y{}^* - \tau_{xy}^2 = 0, \quad \sigma_y{}^*\sigma_z{}^* - \tau_{yz}^2 = 0, \quad \sigma_z{}^*\sigma_x{}^* - \tau_{xz}^2 = 0 \tag{1.11}$$

$$\sigma_x{}^*\tau_{yz} - \tau_{xy}\tau_{xz} = 0, \quad \sigma_y{}^*\tau_{xz} - \tau_{xy}\tau_{yz} = 0, \quad c_z{}^*\tau_{xy} - \tau_{xz}\tau_{yz} = 0 \tag{1.12}$$

Соотношения (1.11), (1.12) непосредственно следуют из (1.4) при $a=0$ или $b=0$. Среди шести соотношений (1.11), (1.12) независимыми являются три, либо (1.11), либо (1.12).

Рассмотрим компоненты девиатора $\sigma_x{}' = \sigma_x - \sigma$, $\sigma_3{}' = \sigma_3 - \sigma$. Имеет место $\sigma_x{}^* = \sigma_x - \sigma_3 = \sigma_x{}' - \sigma_3{}', \ldots$ Из (1.1) следует $\sigma_3{}' = -1/3\,(a+b)$. Полагая $a=k$, $b=0$, перепишем соотношения (1.11), (1.12) в виде [2]:

$$(\sigma_x{}' + 1/3\,k)(\sigma_y{}' + 1/3 k) - \tau_{xy}^2 = 0; \quad (\sigma_x + 1/3 k)\,\tau_{yz} - \tau_{xy}\tau_{xz} = 0 \quad (xyz) \tag{1.13}$$

Выражения (1.9), (1.8) можно переписать в виде

$$\Sigma_2{}' = 1/3\,(a^2 + b^2 - ab) \tag{1.14}$$

$$\Sigma_3{}' = 2/27\,(a+b)(a^2 + b^2 - 5/2 ab) \tag{1.15}$$

В случае ребра призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = k$, $\sigma_2 = \sigma_3$, $\sigma = \sigma_3 + k/3$, $a = k$, $b = 0$. Соотношения (1.14), (1.15) принимают вид [3] $\Sigma_2{}' = 1/3 k^2$, $\Sigma_3{}' = 2/27 k^3$. Однако, в этом случае следует использовать соотношения (1.13).

В случае ребра условия пластичности максимального приведенного напряжения $\sigma_1 - \sigma = k$, $\sigma_2 - \sigma = -k$, $\sigma = \sigma_3$, $a = k$, $b = -k$ соотношения (1.14), (1.15) принимают вид

$$\Sigma_2{}' = 1/3 k^2, \quad \Sigma_3{}' = 0$$

Предположим, что ребро поверхности текучести образовано пересечением плоскостей

$$a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 = c_1, \quad a_i, b_i, c_i = \mathrm{const}$$

$$b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3 = c_2 \tag{1.16}$$

Из (1.16) следует

$$\sigma_1 = A\sigma_3 + C_1, \sigma_2 = B\sigma_3 + C_2 \tag{1.17}$$

$$A = -\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}}, \quad B = -\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}}; \quad C_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_{12}}, \quad C_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_{12}}$$

$$\Delta_{ij} = a_i b_j - a_j b_i, \ \Delta_i = c_1 a_i - c_2 b_i$$

Из (1.17) получим

$$\sigma_3 = [3\sigma - (C_1 + C_2)]/[A + B + 1] \tag{1.18}$$

Из (1.1), (1.17), (1.18) найдем

$$a = \frac{(A-1)(3\sigma - C_1 - C_2)}{A + B + 1}, \quad b = \frac{(B-1)(3\sigma - C_1 - C_2)}{A + B + 1} \tag{1.19}$$

Подставляя выражения (1.19) в (1.14), (1.15), получим искомые условия пластичности.

Для определения ассоциированного закона течения соотношения (1.14), (1.15) должны быть рассмотрены в качестве обобщенного пластического потенциала.

2. Рассмотрим грань поверхности текучести

$$a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 = c \tag{2.1}$$

Из (1.1), (2.1) можно получить

$$a_1 a + a_2 b + (a_1 + a_2 + a_3)[\sigma - 1/3(a + b)] = c \tag{2.2}$$

где a, b следует рассматривать как параметры. Из (2.2) найдем

$$b = \frac{(1/3 a - \sigma)(a_1 + a_2 + a_3) - a_1 a + c}{a_2 - 1/3 (a_1 + a_2 + a_3)} \tag{2.3}$$

Подставляя выражения (2.3) в (1.14), (1.15), получим зависимость инвариантов Σ_2', Σ_3' от параметра a. Исключая параметр a, получим искомую зависимость $f(\Sigma_2', \Sigma_3') = 0$. В случае грани призмы Треска

$$\sigma_1 - \sigma_3 = k, \ a_1 = -a_3 = 1, \ a_2 = 0, \ a = c = k$$

Величина $b = \sigma_2 - \sigma_3$ является неопределенным параметром, подлежащим исключению из выражений (1.14), (1.15). В результате имеет место условие пластичности, предложенное М. Леви, приведенное в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Гостехтеоретиздат, 1952. 335 с.
2. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
3. *Ишлинский А. Ю.* Прикладные задачи механики. Книга первая, механика вязкопластических тел. М.: Наука, 1986. 252 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
5.VI.1992