МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1992

УДК 539.3

© 1992 г. Ю. Г. МАРКОВ, И. В. СКОРОБОГАТЫХ

К ДИНАМИКЕ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО УПРУГОГО ТЕЛА

В статье изучается динамика собственных форм симметричного упругого тела, закрученного вокруг произвольной неподвижной в пространстве оси. Ранее в [1—5] исследовались инерционные свойства упругих волн. В работе изучены особенности динамики свободных колебаний, отражающие как явление прецессии волнового поля, так и закон колебаний по каждой собственной форме. Изучено влияние перекрёстных связей между собственными формами с одинаковым числом узлов по параллели и различным числом узлов по меридианам.

1. Постановка задачи. Динамические свойства упругого осесимметричного тела. Рассмотрим упругое динамически симметричное твёрдое тело со свободной границей. Упругая среда считается однородной и изотропной с постоянной плотностью γ, для которой используется модель линейной теории упругости. Для описания упругих деформаций тела введём систему координат $Cx_1x_2x_3$, с началом в центре масс, так чтобы выполнялись условия

$$\int_\Omega \gamma \mathbf{r}\, dx = 0, \quad \int_\Omega \mathbf{r} \times \mathbf{u}\gamma\, dx = 0 \quad (dx = dx_1\, dx_2\, dx_3) \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — упругое смещение точки в недеформированном состоянии занимавшей положение $\mathbf{r}$ ($\mathbf{r} \in \Omega$, где Ω — область, занимаемая телом в недеформированном состоянии). Условия (1) характеризуют координатный трёхгранник, относительно которого тело в среднем (по всем частицам) не перемещается и не поворачивается.

Пусть в первоначально неподвижном упругом теле возбуждены упругие колебания. После этого тело приведено во вращение относительно инерциального пространства $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с некоторой абсолютной угловой скоростью $\vec{\omega}$.

Ставится следующая задача: изучить влияние вращения системы как целого вокруг произвольной в пространстве оси на картину упругих колебаний.

Пусть абсолютная угловая скорость трёхгранника $Cx_1x_2x_3$ в проекциях на его же оси будет $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Вариационный принцип Даламбера — Лагранжа для рассматриваемого тела представится в виде

$$\int_\Omega \gamma \left[\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\vec{\omega}} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})] + 2\vec{\omega} \times \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{\gamma}\nabla E\,[\mathbf{u}]\right] \delta\mathbf{u}\, dx = 0 \tag{2}$$

Здесь $\nabla E[\mathbf{u}]$ — градиент квадратичного функционала упругих деформаций.

Решение уравнения (2) может быть найдено в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k,\, m=0}^{\infty} [q_{km}(t)\mathbf{V}_{km}(\mathbf{r}) + p_{km}(t)\mathbf{W}_{km}(\mathbf{r})] \tag{3}$$

где $q_{km}(t)$, $p_{km}(t)$ — нормальные координаты, подлежащие определению, а $\mathbf{V}_{km}$ и $\mathbf{W}_{km}$ — ортонормированные собственные формы свободных колебаний упругого тела, соответствующие собственной частоте ν_{km} и удовлетворяющие условиям

$$\gamma^{-1}\nabla E\,[\mathbf{U}_{km}] = \nu^2\mathbf{U}_{km},\quad (\mathbf{U}_{km},\mathbf{U}_{ln}) = \int_\Omega \mathbf{U}_{km}\mathbf{U}_{ln}\,dx = \delta_{(km)(ln)}$$

где $\delta_{(km)(ln)}$ — символ Кронекера с индексами (km) и (ln). Заметим, что спектр частот колебаний при условии (1) дискретен и неограничен: дискретность спектра означает возрастающую неограниченную последовательность частот. Подставляя разложение (3) в уравнение (2) и выражая $\delta\mathbf{u}$ через вариации нормальных координат, получим

$$\ddot{q}_{km} + \nu^2_{km}q_{km} + (\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\mathbf{r}],\mathbf{V}_{km}) + (\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\mathbf{u}],\mathbf{V}_{km}) + 2\,([\vec{\omega}\times\dot{\mathbf{u}}],\mathbf{V}_{km}) = 0$$

$$\begin{gathered}\ddot{p}_{km} + \nu^2_{km}p_{km} + (\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\mathbf{r}],\mathbf{W}_{km}) + (\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\mathbf{u}],\mathbf{W}_{km}) + \\ + 2\,([\vec{\omega}\times\dot{\mathbf{u}}],\mathbf{W}_{km}) = 0\end{gathered} \tag{4}$$

Для упрощения выкладок в (4) положено $\dot{\vec{\omega}} = 0$ $(k,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Коэффициенты разложения вращательных инерционных сил в уравнениях (4) по ортонормированным собственным формам представляются следующим образом:

$$(\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\mathbf{r}],\mathbf{V}_{km}) = \sum_{i,j=1}^{3} n_{ij}b_{kmij},\quad (\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\mathbf{r}],\mathbf{W}_{km}) = \sum_{i,j=1}^{3} n_{ij}c_{kmij} \tag{5}$$

$$n_{11} = -(\omega_2^2 + \omega_3^2),\quad n_{12} = n_{21} = \omega_1\omega_2,\quad n_{13} = n_{31} = \omega_1\omega_3$$

$$n_{22} = -(\omega_1^2 + \omega_3^2),\quad n_{23} = n_{32} = \omega_2\omega_3,\quad n_{33} = -(\omega_1^2 + \omega_2^3)$$

$$b_{kmij} = \int_\Omega V_{kmi}x_j\,dx,\quad c_{kmij} = \int_\Omega W_{kmi}x_j\,dx\quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Здесь V_{kml}, W_{kml} – соответетственно проекции векторов $\mathbf{V}_{km}$ и $\mathbf{W}_{km}$ на ось x_l, т. е. $V_{kml} = \mathbf{V}_{km}\cdot\mathbf{e}_l$ ($\mathbf{e}_l$ – орт оси x_l). Остальные векторные произведения в скалярной форме запишутся так, учитывая что $n_{ij} = n_{ji}$ $(i = 1, 2;\ j = 2, 3;\ j \neq i)$:

$$(\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\mathbf{u}],\mathbf{V}_{km}) \sum_{l,n=0}^{\infty}\ \sum_{i,j=1}^{3} n_{ij}\,(q_{ln}A_{lnkmij} + p_{ln}B_{lnkmij})$$

$$(\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\mathbf{u}],\mathbf{W}_{km}) \sum_{l,n=0}^{\infty}\ \sum_{i,j=1}^{3} n_{ij}\,(q_{ln}C_{lnkmij} + p_{ln}D_{lnkmij})$$

$$\begin{gathered}(\vec{\omega}\times\dot{\mathbf{u}},\mathbf{V}_{km}) = \sum_{l,n=0}^{\infty}\{\omega_1\,[\dot{q}_{ln}\,(A_{lnkm23} - A_{lnkm32}) + \dot{p}_{ln}\,(B_{lnkm23} - B_{lnkm32})\,] + \\ + \omega_2\,[\dot{q}_{ln}\,(A_{lnkm31} - A_{lnkm13}) + \dot{p}_{ln}\,(B_{lnkm31} - B_{lnkm13})\,] + \\ + \omega_3\,[\dot{q}_{ln}(A_{lnkm12} - A_{lnkm21}) + \dot{p}_{ln}\,(B_{lnkm12} - B_{lnkm21})\,]\}\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}(\vec{\omega}\times\dot{\mathbf{u}},\mathbf{W}_{km}) \sum_{l,n=0}^{\infty}\{\omega_1\,[\dot{q}_{ln}\,(C_{lnkm23} - C_{lnkm32}) + \dot{p}_{ln}(D_{lnkm23} - D_{lnkm32})\,] + \\ + \omega_2\,[\dot{q}_{ln}\,(C_{lnkm31} - C_{lnkm13}) + \dot{p}_{ln}\,(D_{lnkm31} - D_{lnkm13})\,] + \\ + \omega_3\,[\dot{q}_{ln}\,(C_{lnkm12} - C_{lnkm21}) + \dot{p}_{ln}\,(D_{lnkm12} - D_{lnkm21})\,]\}\end{gathered}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_{lnkmij} = \int_\Omega V_{lni}V_{kmj}\,dx,\quad B_{lnkmij} = \int_\Omega W_{lni}W_{kmj}\,dx \tag{7}$$

$$C_{lnkmlj} = \int_\Omega V_{lnl} W_{kmj}\, dx, \quad D_{lnkmlj} = \int_\Omega V_{lnl} W_{kmj}\, dx$$

Собственные формы V_{km} и W_{km} в проекциях на оси цилиндрической системы координат (ρ, φ, z) будут

$$\mathrm{V}_{km} = \begin{cases} U_{km} \sin k\varphi \cos\varphi - W_{km} \cos k\varphi \sin\varphi \\ U_{km} \sin k\varphi \sin\varphi + V_{km} \cos k\varphi \cos\varphi \\ W_{km} \sin k\varphi \end{cases} \tag{8}$$

$$\mathrm{W}_{km} = \begin{cases} U_{km} \cos k\varphi \cos\varphi + V_{km} \sin k\varphi \sin\varphi \\ U_{km} \cos k\varphi \sin\varphi - V_{km} \sin k\varphi \cos\varphi \\ W_{km} \cos k\varphi \end{cases}$$

$$U_{km} = U_{km}(\rho, z), \quad V_{km} = V_{km}(\rho, z), \quad W_{km} = W_{km}(\rho, z)$$

В дальнейшем будем считать, что каждому k соответствует одно фиксированное значение m. Это означает, что в данной постановке задачи перекрёстными связями между собственными формами с одинаковым числом узлов по параллели пренебрегается. Однако при учёте форм с фиксированным k и различным m не следует ожидать качественного изменения результатов, полученных в статье в том смысле, что прецессия волны сохраняется. В то же время влияние перекрёстных связей с другими формами несколько изменяет коэффициент пропорциональности. Используя формулы (8) с учётом, что $x_1 = \rho \cos\varphi$, $x_2 = \rho \sin\varphi$, $x_3 = z$, $dx = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$, вычисляем коэффициенты в (5)—(7). Заметим, что свойство осесимметричности упругого тела позволяет провести независимое интегрирование от 0 до 2π по цилиндрической координате φ.

Вычисления показывают, что при $k > 2$ $b_{klj} = c_{klj} = 0$. Отличны от нуля также следующие коэффициенты:

$$b_{212} = b_{221} = c_{211} = -c_{222} = \frac{\pi}{2} \int_{\Omega^*} \rho^2 (U_2 + V_2)\, d\rho\, dz \tag{9}$$

$$b_{123} = c_{113} = \pi \int_{\Omega^*} \rho z\, (U_1 + V_1)\, d\rho\, dz, \quad b_{012} = -b_{021} = -\pi \int_{\Omega^*} \rho^2 V_0\, d\rho\, dz$$

$$b_{132} = c_{131} = \varphi \int_{\Omega^*} \rho^2 W_1\, d\rho\, dz, \quad c_{011} = c_{022} = \pi \int_{\Omega^*} \rho^2 U_0\, d\rho\, dz, \quad c_{033} = 2\pi \int_{\Omega^*} \rho z W_0\, d\rho\, dz$$

Здесь область Ω^* получена пересечением Ω полуплоскостью, проходящей через ось симметрии Cx_3. Коэффициенты b_{klj}, c_{klj} описывают влияние гироскопических сил инерции на колебания упругого тела. По своей природе эти силы пропорциональны квадратичным членам $\omega_l \omega_j$. Коэффициенты A_{lklj}, B_{lklj}, C_{lklj}, D_{lklj} описывают кориолисовы силы инерции. При $l \neq k$ эти коэффициенты учитывают влияние форм друг на друга с различным числом узлов по параллели. При $k = 0$ собственные формы осесимметричны и описывают крутильные и продольно-поперечные колебания упругого тела. Проинтегрировав выражение (7) по φ, найдём, что отличны от нуля при $l = k$ будут следующие коэффициенты:

$$A_{0011} = A_{0022} = \pi \int_{\Omega^*} V_0^2\, dx_* = \frac{1}{2} \quad (dx_* = \rho\, d\rho\, dz)$$

(здесь учтено свойство ортонормированности V_{km} и W_{km})

$$B_{0012} = -B_{0021} = C_{0021} = -C_{0012} = \pi \int_{\Omega*} U_0 V_0\, dx_* \tag{10}$$

$$D_{0011} = D_{0022} = \pi \int_{\Omega*} U_0^2\, dx_*, \quad D_{0033} = 2\pi \int_{\Omega*} W_0^2\, dx_* = 1 = 2d_{0011}$$

$$\mathrm{V}_0 = (-V_0 \sin\varphi, V_0 \cos\varphi, 0), \quad \mathrm{W}_0 = (U_0 \cos\varphi, U_0 \sin\varphi, W_0)$$

в проекциях на оси $Cx_1x_2x_3$. Далее, при $l = k = 1$, имеем:

$$A_{1111} = C_{1112} = B_{1121} = D_{1122} = \frac{\pi}{4} \int_{\Omega*} (U_1 - V_1)^2\, dx_*$$

$$A_{1122} = D_{1111} = \frac{\pi}{4} \int_{\Omega*} (3U_1^2 + 2U_1V_1 + 3V_q^2)\, dx_* \tag{11}$$

$$A_{1133} = D_{1133} = \pi \int_{\Omega*} W_1^2\, dx_* = 1 - A_{1111} - A_{1122}$$

$$C_{1121} = B_{1112} = \frac{\pi}{4} \int_{\Omega*} (U_1^2 + V_1^2 + 6U_1V_1)\, dx_*$$

Заметим, что остальные коэффициенты A_{11ij} равны нулю после интегрирования по φ. При $l = k > 1$ коэффициенты можно объединять общей формулой

$$A_{kk11} = A_{kk22} = D_{kk11} = D_{kk22} = \frac{\pi}{2} \int_{\Omega*} (U_k^2 + V_k^2)\, dx_* \tag{12}$$

$$A_{kk33} = D_{kk33} = 1 - 2A_{kk11} = \pi \int_{\Omega*} W_k^2\, dx_*$$

так как $(V_k, V_k) = A_{kk11} + A_{kk22} + A_{kk33} = 1$

$$B_{kk12} = C_{kk21} = -B_{kk21} = -C_{kk12} = \pi \int_{\Omega*} U_k V_k\, dx_*$$

Далее при $k = 0,1, \ldots$ имеют место равенства

$$A_{kkij} = A_{kkji}, \quad D_{kkij} = D_{kkji}, \quad C_{kkij} = B_{kkji}$$

Коэффициенты, обусловленные влиянием формы с номером l на форму с номером k $(l \neq k)$, можно объединить в общую формулу, начиная с $k \geq 1$.

Пусть $k = 1, 2, \ldots,$ а $l > k$. Тогда для $l = k + 1$ отличными от нуля будут выражения

$$A_{lk13} = D_{lk13} = C_{lk23} = -B_{lk23} = \frac{\pi}{2} \int_{\Omega*} W_k(U_l + V_l)\, dx_* \tag{13}$$

$$A_{lk31} = D_{lk31} = C_{lk32} = -B_{lk32} = \frac{\pi}{2} \int_{\Omega*} W_l\, (U_k - V_k)\, dx_*$$

Для $l = k + 2$ отличными от нуля будут

$$A_{lk22} = -A_{lk11} = B_{lk12} = B_{lk21} = \frac{\pi}{4} \int_{\Omega*} (U_l + V_l)\, (V_k - U_k)\, dx_* \tag{14}$$

$$D_{lk11} = -D_{lk22} = C_{lk12} = C_{lk21} = \frac{\pi}{4}\int\limits_{\Omega*} (U_l + V_l)(U_k - V_k)\,dx_* = -A_{lk22}$$

Далее $A_{lkij} = B_{lkij} = D_{lkij} = C_{lkij} = 0$.

Заметим, что случай $k = 0$ не описывается общей формулой и поэтому приведём значения коэффициентов отдельно

при $l = 1$:

$$-A_{1031} = A_{1032} = \pi\int\limits_{\Omega*} V_0 W_1\,dx_*$$

$$C_{1023} = D_{1013} = \pi\int\limits_{\Omega*} W_0 (U_1 + V_1)\,dx_*,\quad C_{1032} = D_{1031} = \pi\int\limits_{\Omega*} U_0 W_1\,dx_*$$

при $l = 2$:

$$A_{2022} = -A_{2011} = B_{2012} = B_{2021} = \frac{\pi}{2}\int\limits_{\Omega*} V_0 (U_2 + V_2)\,dx_*$$

$$C_{2012} = C_{2021} = D_{2011} = -D_{2022} = \frac{\pi}{2}\int\limits_{\Omega*} U_0 (U_2 + V_2)\,dx_*$$

Выписанных формул (10)—(14) достаточно для учёта влияния всех форм с различными k и l друг на друга, так как должны иметь место следующие соотношения: $A_{lkij} = A_{klji}$, $D_{lkij} = D_{klji}$, $B_{lkij} = C_{klji}$, $C_{lkij} = B_{klji}$. Используя выражения (10)—(14) с подстановкой в (6) выпишем бесконечную систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику собственных форм колебаний упругого тела (без учёта квадратичных членов по $\omega_l\omega_j$):

$$\begin{aligned}
&\ddot q_0 + \nu_0^2 q_0 + 4\omega_3 \dot p_0 B_{0012} - 2(\omega_2 \dot q_1 + \omega_1 \dot p_1) B_{1032} = 0\\
&\ddot p_0 + \nu_0^2 p_0 - 4\omega_3 \dot q_0 B_{0012} + 2(\omega_2 \dot p_1 - \omega_1 \dot q_1)(C_{1032} - C_{1023}) = 0\\
&\ddot q_1 + \nu_1^2 q_1 + 2\omega_1 \dot p_0 (C_{1032} - C_{1023}) + 2\omega_2 \dot q_0 B_{1032} + 2\omega_3 \dot p_1 (B_{1112} - B_{1121}) +\\
&\qquad + 2(\omega_1 \dot p_2 + \omega_2 \dot q_2)(A_{2131} - A_{2113}) = 0\\
&\ddot p_1 + \nu_1^2 p_1 - 2\omega_2 \dot p_0 (C_{1032} - C_{1023}) + 2\omega_1 \dot q_0 B_{1032} - 2\omega_3 \dot q_1 (B_{1112} - B_{1121}) +\\
&\qquad + 2(\omega_2 \dot p_2 - \omega_1 \dot q_2)(A_{2131} - A_{2113}) = 0\\
&\ddot q_2 + \nu_2^2 q + 2(\omega_1 \dot p_1 - \omega_2 \dot q_1)(A_{2131} - A_{2113}) + 4\omega_2 \dot p_2 B_{2212} +\\
&\qquad + 2(\omega_1 \dot p_3 + \omega_2 \dot q_3)(A_{3231} - A_{3213}) = 0\\
&\ddot p_2 + \nu_2^2 p_2 - 2(\omega_1 \dot q_1 + \omega_2 \dot p_1)(A_{2131} - A_{2113}) - 4\omega_3 \dot q_2 B_{2212} +\\
&\qquad + 2(\omega_2 \dot p_3 - \omega_1 \dot q_3)(A_{3231} - A_{3213}) = 0\\
&\ddot q_k + \nu_k^2 q_k + 2(\omega_1 \dot p_{k-1} - \omega_2 \dot q_{k-1})(A_{k,k-1,31} - A_{k,k-1,13}) + 4\omega_3 \dot p_k B_{kk12} +\\
&\qquad + 2(\omega_1 \dot p_{k+1} + \omega_2 \dot q_{k+1})(A_{k+1,k,31} - A_{k+1,k,13}) = 0\\
&\ddot p_k + \nu_k^2 p_k - 2(\omega_1 \dot q_{k-1} + \omega_2 \dot p_{k-1})(A_{k,k-1,31} - A_{k,k-1,13}) - 4\omega_3 \dot q_k B_{kk12} +\\
&\qquad + 2(\omega_2 \dot p_{k+1} - \omega_1 \dot q_{k+1})(A_{k+1,k,31} - A_{k+1,k,31}) = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

2. О влиянии перекрёстных связей. Пусть $k \geq 2$ (колебаниями на формах с $k = 0,1$ пренебрегаем) и для краткости записи обозначим $A_k = A_{k,k-1,31} - A_{k,k-1,31}$, $B_k = 2B_{kk12}$, тогда

$$\ddot{q}_k + \nu_k^2 q_k + 2\omega_3 \dot{p}_k B_k + 2(\omega_1 \dot{p}_{k-1} - \omega_2 \dot{q}_{k-1}) + 2(\omega_1 \dot{p}_{k+1} + \omega_2 \dot{q}_{k+1}) A_{k+1} = 0 \qquad (16)$$

$$\ddot{p}_k + \nu_k^2 p_k - 2\omega_3 \dot{q}_k B_k - 2(\omega_1 \dot{q}_{k-1} + \omega_2 \dot{p}_{k-1}) A_k + 2(\omega_3 \dot{p}_{k+1} - \omega_1 \dot{q}_{k+1}) A_{k+1} = 0,$$

$$(k = 2, 3 \ldots)$$

Введём комплексные переменные $z_k = q_k + ip_k$ и перепишем систему в виде

$$\ddot{z}_k + \nu_k^2 z_k - 2i\omega_3 B_k \dot{z}_k - 2i\omega_1 A_k \dot{z}_{k-1} - 2i\omega_1 A_{k+1} \dot{z}_{k+1} + 2\omega_2 A_k \dot{z}_{k-1} +$$

$$+ 2\omega_2 A_{k+1} \dot{z}_{k+1} = 0, \quad z_1 \equiv 0 \quad (k = 2, 3, \ldots) \qquad (17)$$

Если ввести обозначения

$$Z = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \quad N = \mathrm{diag}\,(\nu_1^2, \nu_2^2, \ldots)$$

$$B = \mathrm{diag}\,(B_1, B_2, \ldots), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & A_2 & \\ A_2 & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

то уравнение (17) можно представить в векторной форме

$$\ddot{Z} + NZ - 2i\omega_3 B\dot{Z} - 2i\omega_1 A\dot{Z} = 0 \qquad (18)$$

Здесь поворотом системы координат $Cx_1x_2x_3$ обращена в нуль компонента ω_2 угловой скорости. Заметим, что в случае $\omega_1 = 0$ с помощью замены $Z = e^{i\omega_3 Bt}W$ с точностью до ω_3^2 придём к уравнению гармонических колебаний $\ddot{W} + NW = 0$. Т. е. имеем прецессирующую волну гармонических колебаний.

Пусть $\omega_1 \neq 0$. Рассмотрим задачу о возмущении собственных векторов и собственных значений уравнения колебаний.

При постоянной угловой скорости силы инерции потенциальны, а уравнение движения (18) допускает интеграл энергии. Для вывода интеграла сначала возьмём уравнение, комплексно сопряжённое к (18) и умножим его слева на $\dot{Z}^T$, затем сложим его с уравнением (18), умноженным на $\dot{\bar{Z}}^T$. В результате получим

$$\dot{\bar{Z}}^T \ddot{Z} + \dot{Z}^T \ddot{\bar{Z}} + (\dot{\bar{Z}}^T NZ + \dot{Z}N\bar{Z}) + 2i\omega_3 (\dot{Z}^T B\dot{\bar{Z}}^T - \dot{\bar{Z}}^T B\dot{Z}^T) +$$

$$+ 2i\omega_3 (\dot{Z}^T A\dot{\bar{Z}}^T - \dot{\bar{Z}}^T A\dot{Z}) = 0$$

Отсюда, учитывая диагональность матрицы B и симметричность матрицы A, выводим интеграл энергии

$$Z\dot{\bar{Z}}^T + \bar{Z}^T NZ = h = \mathrm{const}$$

Это означает, что все собственные числа комплексно-сопряжённые и чисто мнимые, т. е. система (18) имеет в качестве частных решений гармонические колебания по всем координатам с частотами близкими к ν_k.

Полагая в (18) $\omega_1 = \omega_3 = 0$ находим, что собственный вектор, соответствующий частоте ν_k будет иметь отличной от нуля только k-ю компоненту. Однако из-за наличия ненулевых компонент ω_1 и ω_3 угловой скорости появятся другие ненулевые компоненты собственного вектора, а также поправки к частоте.

Поскольку ω_1 и ω_3 малы по сравнению с частотой, то поправки также будут малы. Искать их будем в виде степенных рядов по ω_1 и ω_3. Подставим в уравнение колебаний $\nu = \nu(\overline{\omega})$, $e_k + a_k(\omega)$. (Здесь $a_k(\omega)$ поправка к собственному вектору.) Имеем

$$[-\nu^2(\vec{\omega})E + N + 2\nu(\vec{\omega})(\omega_3 B + \omega_1 A)](e_k + a_k(\vec{\omega})) = 0 \quad (k = 2, 3, 4, \ldots) \quad (19)$$

Дифференцируя (19) по ω_3 и далее умножая скалярно на орт e_k находим

$$-2\nu_k \partial\nu(0)/\partial\omega_3 + 2\nu_k B_k = 0$$

Здесь учтено, что $\nu_k(0) = \nu_k$, $e_k \partial a_k(0)/\partial\omega_3 = 0$. Окончательно получаем поправку к частоте $\partial\nu(0)/\partial\omega_3 = B_k$, где B_k — коэффициент, отвечающий за прецессию k-й собственной формы. Аналогично

$$\partial a_k(0)/\partial\omega_3 = 0, \quad \partial\nu(0)/\partial\omega_1 = 0$$

Таким образом, из-за присутствия компоненты ω_1 угловой скорости тела возникает поправка к собственному вектору:

$$\frac{\partial a_k(0)}{\partial\omega_1} e_m = \frac{2\nu_k}{\nu_k^2 - \nu_m^2}(A_k\delta_{k-1,m} + A_{k+1}\delta_{k+1,m}), \quad k \neq m$$

$$\partial a_k(0)/\partial\omega_1 e_k = 0$$

Результаты расчётов показывают, что с принятой точностью произвольность направления вектора угловой скорости упругого тела вносит поправки только к собственным векторам; коэффициент, характеризующий прецессию волны при этом не меняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлёв В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
2. *Вильке В. Г.* Об относительном движении осесимметричного упругого тела//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1988. № 3. С. 25—30.
3. *Егармин Н. Е.* О прецессии стоячих волн колебаний вращающейся осесимметричной оболочки//Изв. АН СССР. МТТ. 1986, № 1. С. 142—148.
4. *Егармин Н. Е.* Свободные и вынужденные колебания вращающегося вязкоупругого кольца//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 150—154.
5. *Вильке В. Г.* Нелинейные колебания упругого растяжимого вращающегося кольца//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1988. № 5. С. 31—35.

Москва

Поступила в редакцию
17.IX.1990