МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1992

УДК 539.375

© 1992 г. Д. Н. КЛИМОВА, К. И ОГУРЦОВ

О НАПРЯЖЕНИЯХ И ПЕРВИЧНЫХ РАЗРУШЕНИЯХ В ГОРНОЙ ПОРОДЕ ПРИ НОРМАЛЬНОМ УДАРЕ

Исследуются простейшие формулы для определения напряжений, которые могут приводить к образованию первичных трещин, а также вероятных направлений, по которым эти трещины могут распространяться вглубь массива с плоской границей.

1. При медленном нарастании нагрузки во время удара динамическое поле напряжений в ближней зоне можно рассматривать в квазистатическом режиме.

Зададим на границе полуплоскости $z \geq 0$ напряжения (с точностью до размерного множителя) $\sigma_z |_{z=0} = -\varepsilon/(\varepsilon^2 + x^2)$, $\tau_{xz} |_{z=0} = 0$, где $\varepsilon > 0$ — произвольный параметр. При этом напряжения определяются равенствами

$$\sigma_x = -\frac{x^2(\varepsilon + 2z) + \varepsilon(\varepsilon + z)^2}{[x^2 + (\varepsilon + z)^2]^2}, \quad \sigma_z = -\frac{(\varepsilon + z)^2(\varepsilon + 2z) + \varepsilon x^2}{[x^2 + (\varepsilon + z)^2]^2},$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2xz(\varepsilon + z)}{[x^2 + (\varepsilon + z)^2]^2} \qquad (1.1)$$

По известным формулам

$$\sigma_{1,2} = (\sigma_x + \sigma_z)/2 \pm (((\sigma_x - \sigma_z)/2)^2 + \tau_{xz})^{1/2} \qquad (1.2)$$

получаем главные напряжения

$$\sigma_1 = -\varepsilon/[x^2 + (\varepsilon + z)^2], \quad \sigma_2 = -(2z + \varepsilon)/[x^2 + (\varepsilon + z)^2] \qquad (1.3)$$

Максимальные касательные напряжения

$$\tau_m = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 = z/[x^2 + (\varepsilon + z)^2] \qquad (1.4)$$

сохраняют, как можно проверить, постоянные значения на семействе эксцентрических окружностей внутри полуплоскости.

Приравнивая производную по z от (1.4) нулю, найдем для каждого значения x глубины $z = (x^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$, на которых τ_m будут наибольшие

$$\tau_m |_{z=(x^2+\varepsilon^2)^{1/2}} = 1/2(\varepsilon + (x^2 + \varepsilon^2)^{1/2}) \qquad (1.5)$$

Из этих наибольших напряжений наибольшему $\tau_m = 1/4\varepsilon$, оказавшемуся на оси симметрии в точке $x = 0$, $z = \varepsilon$, соответствует окружность нулевого радиуса. Здесь главные оси главных напряжений $\sigma_1 = -1/4\varepsilon$, $\sigma_2 = -3/4\varepsilon$ совпадают с осями координат и, следовательно, τ_m действует под углом 45° к ним; под таким же углом естественно ожидать и появление первичной трещины, если учесть, что давление σ_2 только в три раза больше τ_m.

Кривая $z = (x^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$, являясь геометрическим местом точек касания вертикальных линий $x = \mathrm{const}$ упомянутого семейства окружностей, направлена при $x >> \varepsilon$ почти по прямой вглубь полуплоскости под углом 45° к границе, но переходит в параллельную границе линию в точке $x = 0$, $z = \varepsilon$. На каком-то участке эта линия может определять вероятное направление развития первичной трещины, поскольку, как показывают формулы (1.1), (1.3), во всем полупространстве нигде не фигурируют растягивающие нормальные напряжения.

Заметим, что на границе $z=0$ в центре воздействия при плоском напряженном состоянии $\sigma_1 = \sigma_2 = -1/\varepsilon$, $\tau_m = 0$. При плоской деформации $\sigma_y = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$, где ν — коэффициент Пуассона, и на границе возникают напряжения $\tau_m = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 = (1-2\nu)/2\varepsilon$ действующие под углом 45° к оси y.

Если перейти к пределу $\varepsilon \to 0$, то формулы (1.1)—(1.4) будут характеризовать задачу Фламана о действии сосредоточенной силы. При этом упомянутые выше окружности касаются границы и друг друга в точке $x = 0$, $z = 0$, а кривая $z = (x^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$ переходит в прямую, пересекающую границу полупространства под углом 45°.

Если усилие равномерно распределено по границе на некотором отрезке — l, l, то линии постоянных значений τ_m, как известно, являются окружностями, в которых упомянутый отрезок является хордой. Наибольшее значение τ_m оказывается на окружности с диаметром, равным этому отрезку. Разрушение может начинаться по этой окружности, и первичная трещина может быть перпендикулярна границе.

Другие виды распределения нагрузки не приводят к полям напряжений, в которых линии постоянных значений τ_m являлись бы окружностями. При воздействии Герца $\sigma_z |_{z=0} = -2(l^2 - x^2)^{1/2}/\pi l^2$, $\tau_{xz} |_{z=0} = 0$ эти линии в полупространстве являются замкнутыми, как и в первом случае, но более сложными кривыми [1], а при воздействии жесткого штампа $\sigma_z |_{z=0} = 1/\pi(l^2 - x^2)^{1/2}$, $\tau_{xz} |_{z=0} = 0$ возле углов его, где напряжения неограниченно возрастают, эти линии представляют собой петлеобразные кривые. Но эти различия играют существенную роль лишь в области, непосредственно примыкающей к участку приложения нагрузки. В силу принципа Сен-Венана по мере удаления от этого участка во всех случаях линии постоянных значений τ_m будут близки к окружностям, соответствующим задаче Фламана. Перераспределение нагрузки на упомянутом участке за время удара может и не играть большой роли. Это подтверждают полученные оптическим методом картины полос изохром [1, 2]. Следовательно, если критерий прочности характеризуется максимальными касательными напряжениями, то в плоском случае вдали от области приложения нагрузки разрушение может происходить одинаково, в то время как в самой области характер разрушения может быть различным в зависимости от закона распределения нагрузки. Трудность анализа разрушения в этой области заключается в оценке предельного состояния высокого всестороннего давления наряду с оценками τ_m.

2. В случае пространственной осесимметричной задачи соответствующие простейшие формулы получаются, если, применяя цилиндрические координаты r, χ, z, задать на границе полупространства $z=0$ следующее «колоколообразное» распределение напряжений [3].

Напряжения, действующие в плоскостях, проходящих через ось симметрии, выражаются равенствами

$$\sigma_r = -2\left[\frac{r^2 z}{R^5} + \frac{\varepsilon}{3R^3} - \frac{n}{R(R+z+\varepsilon)}\right], \quad \sigma_z = -2\left[\frac{z(z+\varepsilon)^2}{R^5} + \frac{\varepsilon}{3R^3}\right],$$

$$\tau_{rz} = -2\frac{rz(z+\varepsilon)}{R^5} \tag{2.1}$$

$$R = (z^2 + (z+\varepsilon)^2)^{1/2}, \quad n = (1-2\nu)/3 \tag{2.2}$$

Допустим сначала, что ν приближается к 0,5 и параметром можно пренебречь. (При отличном от нуля модуле сдвига это характеризует несжимаемость.)

Переходя к главным нормальным и максимальным касательным напряжениям, так же как и в предыдущем параграфе, получаем

$$\sigma_1 = -\tfrac{2}{3}\varepsilon/R^3, \quad \sigma_2 = (\tfrac{2}{3}\varepsilon - 2z)/R^3, \quad \tau_m = z/R^3 \tag{2.3}$$

Заметим, что теперь семейство замкнутых линий, на которых $\tau_m = \mathrm{const}$, не представляет семейство окружностей.

Приравнивая нулю производную по z от τ_m, для каждого фиксированного r находим глубину, на которой τ_m принимает максимальное значение. Она определяется равенством

$$z = \left((8r^2 + 9\varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon\right)/4 \tag{2.4}$$

Касательная к кривой (2.4) в точке $r = 0$, $z = \varepsilon/2$ параллельна границе $z = 0$, а при $r >> \varepsilon$ асимптотически приближается к прямой $z = r/\sqrt{2}$, наклоненной к границе под углом $\operatorname{arctg}(z/r) = 1/\sqrt{2} \approx 35°$.

В пределе $\varepsilon \to 0$ кривая (2.4) переходит в эту прямую. Ось главного напряжения σ_1 составляет с осью z угол

$$\operatorname{arctg}\left[(\sigma_1 - \sigma_z)/\tau_{rz}\right] = -\operatorname{arctg}\left[(z + \varepsilon)/r\right] \tag{2.5}$$

В случае сжимаемых сред соответствующие формулы усложняются. Но, учитывая принцип Сен-Венана, для определения наиболее вероятного положения поверхностей предельных напряжений, приводящих к разрушению вне непосредственной области приложения ударного воздействия, достаточно подробно исследовать решение задачи Буссинеска, соответствующее нагрузке типа нормальной сосредоточенной силы.

Это решение получается простым предельным переходом $\varepsilon \to 0$ в формулах (2.1):

$$\sigma_r = 2\left[\frac{n}{R(R+z)} - \frac{z^2 z}{R^5}\right], \quad \sigma_z = -2z^3/R^5, \quad \tau_{rz} = -2rz^2/R^5 \tag{2.6}$$

в которых теперь $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$ — расстояние от точки приложения силы.

В формулах (2.6) удобно исключить R и z, введя угол между границей и лучом, выходящим из начала координат $\theta = \operatorname{arctg}(z/r)$:

$$\sigma_r = 2\cos^2\theta/r^2 \left(n/(1+\sin\theta) - \sin\theta\cos^2\theta\right) \quad \sigma_\theta = -2\cos^2\theta\sin^3\theta/r^2,$$

$$\tau_{rz} = -2\cos^3\theta\sin^2\theta/r^2 \tag{2.7}$$

По аналогии с (1.2), (1.4) находим главные нормальные и максимальные касательные напряжения

$$\sigma_1 = r^{-2}\cos^2\theta\left[n/(1+\sin\theta) - \sin\theta\right] + \tau_m \tag{2.8}$$

$$\sigma_2 = r^{-2}\cos^2\theta\left[n/(1+\sin\theta) - \sin\theta\right] - \tau_m \tag{2.9}$$

$$\tau_m = r^{-2}\cos^2\theta\left(\frac{n}{(1+\sin\theta)^2} + \frac{2n\sin\theta}{1+\sin\theta}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + \sin^2\theta\right)^{1/2} \tag{2.10}$$

В случае несжимаемой среды ($n = 0$) получаем

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -2r^{-2}\cos^2\theta\sin\theta, \quad \tau_m = r^{-2}\cos^2\theta\sin\theta \tag{2.11}$$

Эти формулы соответствуют равенствам (2.3) при $\varepsilon = 0$.

Если среда сжимаемая и, следовательно, $n \neq 0$, то для определения σ_1, σ_2, τ_m следует табулировать формулы (2.8)—(2.10) при всевозможных значениях

Таблица 1

ν	0,5			0,47			0,36			0,25			0,2		
θ^0	τ_m	σ_1	σ_2	τ_m	σ_1	σ_2	τ_m	σ_1	σ_2	τ_m	σ_1	σ_2	τ_m	σ_1	σ_2
	0	0	0	0,02	0,04	0	0,043	0,086	0	0,166	0,333	0	0,2	0,4	0
20	0,307	0	–0,604	0,292	0,003	–0,581	0,268	0,017	–0,498	0,229	0,037	–0,421	0,218	0,048	–0,388
25	0,317	0	–0,694	0,34	0,004	–0,675	0,313	0,022	–0,608	0,295	0,044	–0,545	0,287	0,053	–0,518
30	0,375	0	–0,75	0,37	0,005	–0,735	0,354	0,026	–0,682	0,341	0,049	–0,633	0,336	0,061	–0,611
35	0,383	0	–0,78	0,382	0,006	–0,758	0,373	0,028	–0,718	0,367	0,053	–0,68	0,365	0,065	–0,664
40	0,377	0	–0,755	0,376	0,006	–0,746	0,373	0,029	–0,717	0,372	0,054	–0,689	0,372	0,066	–0,677
45							0,353	0,028	–0,681	0,357	0,052	–0,662	0,358	0,063	–0,654
50							0,321	0,026	–0,616	0,326	0,048	–0,603	0,328	0,058	–0,598
55							0,276	0,023	–0,529	0,282	0,042	–0,521	0,284	0,051	–0,518
60							0,223	0,019	–0,428	0,229	0,034	–0,428	0,231	0,041	–0,421

Таблица 2

θ^0 \ ν	0,5	0,47	0,36	0,3	0,25	0,2
20	0	–0,016	–0,075	–0,108	–0,134	–0,161
25	0	–0,011	–0,052	–0,075	–0,094	–0,112
30	0	–0,007	–0,031	–0,045	–0,056	–0,067
35	0	–0,002	–0,012	–0,017	–0,021	–0,025
40	0	+0,001	0,016	0,009	0,011	0,013
45	0	0,005	0,023	0,032	0,04	0,048
50	0	0,008	0,037	0,053	0,066	0,08
55	0	0,011	0,05	0,072	0,09	0,108
60	0	0,013	0,062	0,088	0,110	0,132
90	0	0,04	0,187	0,267	0,333	0,400

θ и n. В табл. 1 представлены результаты расчетов при различных значениях коэффициента Пуассона.

В [4] приведены результаты довольно сложных расчетов главных растягивающих напряжений и направление, по которому располагаются их наибольшие значения для равномерно распределенной по кругу нагрузки. Результаты наших расчетов, приведенные в табл. 1, немного отличаются от них даже в точках, довольно близко расположенных от края источника.

3. Рассмотрим теперь третье главное напряжение, которое может быть причиной образования радиальных трещин (в отличие от кольцевой — конической, возникающей под воздействием напряжений σ_1 или τ_m, или того и другого одновременно). Это напряжение выражается формулой

$$\sigma_\chi = \frac{2n\,[(z+\varepsilon)R - r^2]}{R^3\,(R+z+\varepsilon)} - \frac{2\varepsilon}{3R^3}, \quad R = (r^2 + (z+\varepsilon)^2)^{1/2} \tag{3.1}$$

При $r=0$ оно, так же как и σ_r, оказывается равным $[(1-2\nu)z - (1+2\nu)\varepsilon]/3(z+\varepsilon)^3$ и, следовательно, положительным лишь при $z > (1+2\nu)\varepsilon/(1-2\nu)$, в то время как σ_z оказывается всюду отрицательным, равным $-2(3z+\varepsilon)/3(z+\varepsilon)$.

Если среда может считаться приближенно несжимаемой ($n=0$), то σ_χ можно считать всюду равным нулю, в то время как σ_r будет равно нулю лишь на оси симметрии, а в остальной области будет сжимающим, так же как и σ_z.

Используя переменные $R = (r^2+z^2)^{1/2}$ и $\theta = \arccos(r/R)$ и переходя к сосредоточенному воздействию $\varepsilon \to 0$, перепишем формулу (3.1) в виде

$$\sigma_\chi = 2n\,(\sin\theta - \cos^2\theta)/R^2(1+\cos\theta) \tag{3.2}$$

Эти напряжения растягивающие в окрестности оси симметрии и наибольшие при $r=0$. Они обращаются в нуль и меняют знак на обратный при выполнении равенства $\sin\theta - \cos^2\theta = 0$, что соответствует значению $\theta = \arcsin[(\sqrt{5}-1)/2] \approx 38°$.

В табл. 2 представлены результаты расчетов напряжений по формуле (3.2) для различных значений Пуассона.

Сравнение наших оценок с расчетами, представленными в [4], подтверждает, что первично трещина должна возникать под действием растягивающих напряжений нормально к границе и переходить затем в коническую трещину. Ожидаемое направление распространения конической трещины немного отличается от изостаты главного нормального напряжения. Угол, под которым эта трещина должна была бы уходить в глубину под воздействием максимальных растягивающих напряжений σ_1, согласно расчетам (табл. 1), оказался 40°, такой же, какой обнаружен на разрезе блока кварцита в [4]. Но это является по-видимому случайностью. Для стекла вопреки предсказаниям теории, экспериментально измеряемый угол оказался порядка 25° [5]. Основываясь на результатах, представленных в табл. 1, есть основание предполагать, что по мере развития трещины от границы вглубь среды главную роль играют уже не растягивающие напряжения, как считалось в работе [4], а интенсивные сдвигающие напряжения $\tau_m = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$. Это и приводит к отклонению направления развивающейся трещины по изостате, под меньшим углом наклоненную к границе. Для детального изучения этого вопроса следует привлекать более точную теорию предельного состояния при высоких давлениях (например, теорию предельных кругов Мора) с привлечением экспериментальных данных.

Радиальные трещины, уходящие в глубь среды [5], убедительно обосновываются согласно табл. 2 большими главными растягивающими напряжениями σ_χ, концентрирующимися в области оси симметрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
2. *Климова Д. Н.* Задачи динамики горных пород/Под ред. А. Г. Протосени. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. 127 с.
3. *Снеддон И. Н., Берри Д. С.* Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961. 220 с.
4. *Эдельштейн Е. И., Эйгелес Р. М.* О разрушении горных пород давлением//Исследования по упругости и пластичности. Л.: 1963. Вып. 2. С. 132—152.
5. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 17.IV.1990