

© 1992 г. Е. В. ГЛУШКОВ, Н. В. ГЛУШКОВА

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОЛЯ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ КЛИНОВИДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРЕЩИНЫ

Характер концентрации напряжений в окрестности угловых точек упругих тел при плоском напряженно-деформированном состоянии изучен к настоящему времени достаточно хорошо. Для пространственных концентраторов задача определения показателей особенности уже не сводится как в плоском случае к отысканию корней трансцендентных уравнений, а требует использования более сложного математического аппарата. Здесь можно выделить класс смешанных пространственных задач теории упругости, когда концентраторами являются угловые точки линии смены граничных условий (контактные задачи для штампов, задачи о тонких пространственных трещинах и включениях). Данные задачи сводятся к двумерным интегральным уравнениям с разностным ядром.

Зависимость показателя особенности напряжений от раствора угла клиновидного штампа, контактирующего без трения с поверхностью упругого полупространства, была получена в [1, 2], в случае контакта со сцеплением и малых растворах угла в [3], а для всего диапазона изменения раствора угла, а также для штампов, движущихся с трением вдоль поверхности, в [4, 5].

Задача для тонкой клиновидной трещины нормального отрыва сводится к уравнениям с тем же ядром, что и контактная задача для штампа без трения, а относительно касательных компонент поля напряжений возникает система двух интегральных уравнений, вид особенности решения которой в окрестности угловой точки границы ранее не рассматривался.

В настоящей работе методика, развитая в [4, 5], переносится на случай клиновидных в плане пространственных трещин. Приводятся численные результаты, показывающие зависимость от раствора угла показателя особенности касательных компонент поля напряжений и осредненного по малой окрестности вершины коэффициента интенсивности нормальных напряжений.

1. Интегральные соотношения. Рассматривается упругое пространство $-\infty \leq x, y, z \leq \infty$, содержащее в плоскости $z=0$ клиновидный в плане тонкий разрез, занимающий область Ω :

$$2\pi - \theta \leq \varphi \leq \theta, \quad 0 \leq r \leq \infty \quad (x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi)$$

Разрез находится под действием внешнего поля напряжений p , поверхность его берегов свободна от напряжений. Требуется определить характер поля напряжений в окрестности вершины разреза.

Поле напряжений в среде $\tau = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z\}$, обусловленное разрывом поля смещений u на разрезе, выражается через скачок смещений на разрезе $v(x, y) = u|_{z=0^-} - u|_{z=0^+}$, $(x, y) \in \Omega$ в виде интеграла типа свертки

$$\vec{\tau}(x, y, x) = \iint_{\Omega} n(x - \xi, y - \eta, z) v(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1)$$

Подробный вывод представления (1) описан в [5], там же приводится общая схема метода выделения показателя особенности напряжений, основанного на связи между особенностями функций при $r \rightarrow 0$ и полюсами их преобразований Меллина.

Из представления (1) с помощью преобразования Фурье по x, y при $z=0$ несложно получить систему интегральных уравнений относительно неизвестного поля напряжений вне разреза $q(x, y) = \vec{\tau}(x, y, 0)$ при $(x, y) \in \Omega$ ($-\theta \leq \varphi \leq \theta$):

$$Kq \equiv \iint_{R_2 \setminus \Omega} k(x - \xi, y - \eta) q(\xi, \eta) d\xi d\eta = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (2)$$

$$k(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$K(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\mu(1+\beta)\alpha^3} \left\| \begin{array}{ccc} 2(1+\beta)\alpha^2 - \beta\alpha_1^2 & -\beta\alpha_1\alpha_2 & 0 \\ -\beta\alpha_1\alpha_2 & 2(1+\beta)\alpha^2 - \beta\alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (2+\beta)\alpha^2 \end{array} \right\|$$

$$f(x, y) = - \iint_{\Omega} k(x - \xi, y - \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \alpha = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2},$$

$\beta = \lambda/\mu$, где λ, μ — константы Ляме.

Система (2) в силу структуры матрицы K распадается на независимые уравнения относительно нормальных напряжений $q_3 = \sigma_z$ и касательных $q_1 = \tau_{xz}, q_2 = \tau_{yz}$. Свойства ядра (однородность символа и убывание его как α^{-1} при $|\alpha| \rightarrow \infty$) здесь те же, что и в рассмотренных ранее задачах о контакте клиновидных штампов с упругим полупространством [4]. Заметим, что использование интегральных уравнений относительно скачка v , которые получаются из (1) при удовлетворении условий на берегах трещины, приводит к дополнительным трудностям, связанным с ростом символа ядра.

2. Описание метода. В соответствии с развитой для задач о клиновидных штампах схемой к уравнениям (2), записанным в цилиндрических координатах r, φ, z , применяется преобразование Меллина по r :

$$M_r [f] = \int_0^{\infty} f(r) r^{s-1} dr = F(s), \quad M_r^{-1} [F] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) r^{-s} ds = f(r)$$

В результате приходим к уравнениям относительно $Q(s, \varphi) = \{Q_{rz}, Q_{\varphi z}, Q_{zz}\} = M_r [q]$:

$$\int_{-\theta}^{\theta} K(s, \varphi, \psi) Q(s+1, \psi) d\psi = F(s, \varphi), \quad -\theta \leq \varphi \leq \theta \quad (3)$$

Компоненты матрицы $K(s, \varphi, \psi) = N(s, \varphi, \psi)/2\pi\mu(1+\beta)$ имеют вид

$$\begin{aligned} N_{11} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{2(1+\beta) \cos(\varphi - \psi) G_k(-1) + \\ &+ \beta [d_{3k} \sin(\varphi + \psi) + d_{1,k} \cos \varphi \cos \psi + d_{2,k} \sin \varphi \sin \psi] G_k(-3)\} \\ N_{12} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{2(1+\beta) \sin(\varphi - \psi) G_k(-1) + \\ &+ \beta [-d_{1,k} \cos \varphi \sin \psi + d_{3,k} \cos(\varphi + \psi) + d_{2,k} \sin \varphi \cos \psi] G_k(-3)\} \\ N_{21} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{-2(1+\beta) \sin(\varphi - \psi) G_k(-1) + \\ &+ \beta [-d_{1,k} \sin \varphi \cos \psi + d_{3,k} \cos(\varphi + \psi) + d_{2,k} \cos \varphi \sin \psi] G_k(-3)\} \end{aligned}$$

$$N_{22} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{2(1 + \beta) \cos(\varphi - \psi) G_k(-1) + \beta [d_{1,k} \sin \varphi \sin \psi - d_{3,k} \sin(\varphi + \psi) + d_{2,k} \cos \varphi \cos \psi] G_k(-3)\}$$

$$N_{33} = (2 + \beta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\varphi - \psi)} G_k(-1), \quad N_{13} = N_{23} = N_{31} = N_{32} = 0$$

$$G_k(p) = 2^p \Gamma\left(\frac{s+|k|}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+|k|-s+p}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{|k|-s+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{|k|-p+s}{2}\right),$$

$$p = -1, -3$$

$$d_{1,k} = (s+1)s \cos^2 \psi + 2iks \sin \psi \cos \psi + (-k^2 + s + 1) \sin^2 \psi$$

$$d_{2,k} = s(s+1) \sin^2 \psi - 2iks \sin \psi \cos \psi + (-k^2 + s + 1) \cos^2 \psi$$

$$d_{3,k} = (s^2 - 1 + k^2) \sin \psi \cos \psi - iks (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi)$$

Дискретизация уравнений (3) проводится путем разложения неизвестных по полиномам Чебышева с весом, учитывающим корневую особенность напряжений в окрестности краев разреза:

$$Q(s+1, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} t_m T_m(\psi_1) / (1 - \psi_1^2)^{1/2}, \quad \psi_1 = \psi/\theta$$

Невязка раскладывается по полиномам $T_l(\varphi_1)$, $\varphi_1 = \varphi/\theta$, что приводит к линейной алгебраической системе относительно коэффициентов t_m :

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{lm}(s) t_m = f_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$A_{lm} = \frac{1}{\pi^2 \theta^2} \int_{-\theta}^{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} K(s, \varphi, \psi) T_m(\psi_1) T_l(\varphi_1) / (1 - \psi_1^2)^{1/2} (1 - \varphi_1^2)^{1/2} d\varphi d\psi$$

$$f_l = \frac{1}{\pi^2 \theta^2} \int_{-\theta}^{\theta} F(s, \varphi) T_l(\varphi_1) / (1 - \varphi_1^2)^{1/2} d\varphi$$

Интегралы по φ, ψ берутся в явном виде. Достаточно быстрое убывание A_{lm} при $l, m \rightarrow \infty$ обеспечивает устойчивую сходимость метода редукции, применяемого к бесконечной системе (4).

Показатели γ_n разложения напряжений при $r \rightarrow 0$:

$$q(r, \varphi) \sim \sum_n c_n(\varphi) r^{-\gamma_n}$$

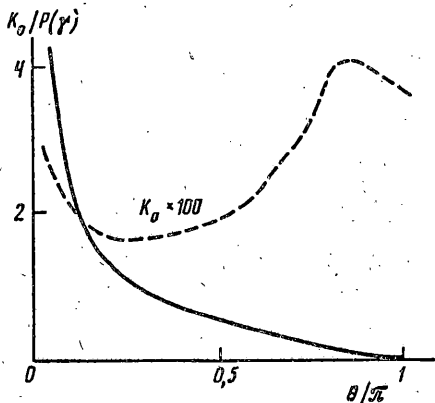
совпадают с $s_n + 1$, где s_n — полюса $t_m(s)$, которые в свою очередь совпадают с нулями определителя матрицы системы $A(s)$. Из условия конечности энергии деформации в окрестности разреза вытекает ограничение $\text{Re } \gamma_n < 1$ или $\text{Re } s_n < 0$.

Коэффициенты интенсивности напряжений c_n выражаются через вычеты $Q(s+1, \varphi)$ в полюсах s_n :

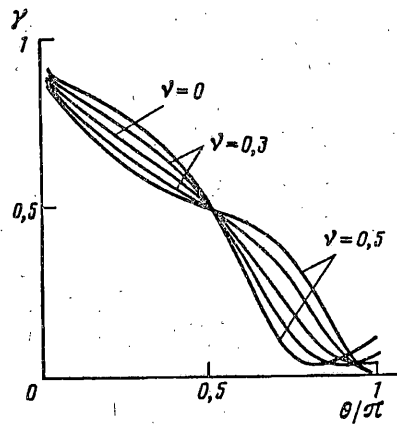
$$c_n(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \text{res } t_m(s) |_{s=s_n} T_m(\varphi_1) / (1 - \varphi_1^2)^{1/2} \quad (5)$$

$$\text{res } t |_{s=s_n} = A_1(s_n) f(s_n) / \Delta'(s_n), \quad \Delta(s) = \det A(s)$$

$A_1(s)$ — присоединенная к A матрица, $t = \{t_1, t_2, \dots\}$, $f = \{f_1, f_2, \dots\}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

В то время как показатель γ_n зависит только от раствора угла θ и коэффициента Пуассона ν , величина коэффициентов c_n зависит также от φ и от внешнего поля p . Чтобы проанализировать влияние на коэффициент интенсивности напряжений величины раствора угла θ , введем понятие коэффициента интенсивности напряжений, осредненного по малой окрестности вершины.

Рассмотрим суммарное напряжение в δ — окрестности вершины разреза для одной из компонент вектора напряжений q

$$P_\delta = \int_0^\delta \int_{-\theta}^\theta q_i(r, \varphi) r dr d\varphi$$

Для определенности рассмотрим только вертикальные напряжения σ_z . Среднее давление $P_0 = P_\delta/S_\delta$ (S_δ — площадь сегмента $-\theta \leq \varphi \leq \theta$, $0 \leq r \leq \delta$) имеет представление

$$P_0 \sim K_0 \delta^{-\gamma}, \delta \rightarrow 0 \tag{6}$$

$$\sigma_z \sim c(\varphi) r^{-\gamma}, r \rightarrow 0 \quad (\gamma = \gamma_1 = s_1 + 1)$$

$$K_0 = c_0/\theta (2 - \beta), \quad c_0 = \int_{-\theta}^\theta c(\varphi) d\varphi = \theta \pi \operatorname{res} t_0 |_{s=s_1}$$

Вклад в c_0 ввиду ортогональности функций Чебышева дает только первое слагаемое суммы (5). Предположим, что внешнее поле p не зависит от φ , в этом случае компоненты вектора f в (5) имеют вид

$$f_i = -\frac{8}{\pi\theta} P(\gamma) \cos \frac{\pi}{2} l \sum_{k=0}^{\infty} G_k(-1) \frac{\sin k\theta}{k} J_l(k\theta), \quad P(\gamma) = M_{s_1+1}[p] \tag{7}$$

3. Численные результаты. Ядро интегрального уравнения относительно нормальной компоненты напряжений σ_z такое же, как и в задаче о гладком контакте жесткого штампа с упругим полупространством, поэтому зависимость показателя γ от θ для σ_z совпадает с определенной ранее зависимостью для клиновидного штампа [4]. Зависимости коэффициента интенсивности K_0 от θ для штампа и разреза уже отличаются (фиг. 1). Сплошная линия —

ν	$\theta/\pi = 0,1$	$\theta/\pi = 0,3$	$\theta/\pi = 0,5$	$\theta/\pi = 0,7$	$\theta/\pi = 0,9$
0,0	0,806	0,667	0,499	0,255	0,037
0,3	0,782	0,628	0,499	0,329	0,053
	0,831	0,705	0,499	0,178	0,034
0,5	0,762	0,589	0,500	0,394	0,082
	0,856	0,737	0,498	0,108	0,049

результат для разреза, подсчитанный по формулам (5) — (7). Штриховой линией для сравнения нанесен график величины K_0 для клиновидного штампа¹.

Система для касательных компонент $\tau_{rz}, \tau_{\varphi z}$, выделяющаяся из (4), в свою очередь также распадается на две независимые подсистемы относительно четных и нечетных t_m . Первый нуль определителя каждой из матриц этих систем дает по одному показателю $\gamma_n, n = 1, 2$ для каждой из компонент $\tau_{rz}, \tau_{\varphi z}$:

$$\tau_{rz} \sim c_1 r^{-\gamma_1} + c_2 r^{-\gamma_2}, \quad \tau_{\varphi z} \sim c_3 r^{-\gamma_1} + c_4 r^{-\gamma_2}, \quad r \rightarrow 0$$

В отличие от случая штампа, сцепленного со средой [4, 5], когда при определенных θ значения $\gamma(\theta)$ становятся комплексными, для трещины показатели γ_n вещественны для всех θ . Кроме того, кривые $\gamma(\theta)$ имеют минимумы при $\theta > \pi/2$ и не стремятся к нулю при $\theta/\pi \rightarrow 1$, как в случае штампа. Зависимость γ_n от θ для коэффициентов Пуассона $\nu = 0; 0,3; 0,5$ изображена на фиг. 2, численные значения γ_n для некоторых углов θ приведены в таблице.

Отметим, что в случае несжимаемого материала (при $\nu = 0$) значения показателей для касательных компонент совпадают между собой, а в диапазоне $0 \leq \theta \leq 0,85\pi$ практически совпадают с показателем для σ_z .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bazant Z. I. Three-dimensional harmonic functions near termination or intersection of gradient singularity lines; a general numerical method//Intern. J. Eng. Sci., 1974. V. 12. N 3. P. 221—244.
2. Рвачев В. Л., Проценко В. С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 235 с.
3. Parihar K. S., Keer L. M. The singularity at the apex of a bounded wedge-shaped stamp//Trans. ASME Appl. Mech. 1979. V. 46. N 3. P. 577—580.
4. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Об особенностях в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах//Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 2. С. 289—294.
5. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.

Краснодар

Поступила в редакцию
9.IV.1990

¹ Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Концентрация напряжений в окрестности угловой точки клиновидного движущегося штампа. Краснодар, 1988. 25 с.— Деп. в ВИНТИ 28.10.88. № 7745-В88.