МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1992

УДК 539.3.01

© 1992 г. Л. Г. ФЕЛ

К КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассмотрена осесимметричная контактная задача теории упругости для нормальной деформации полубесконечного упругого континуума абсолютно твердым штампом круговой формы в плане, если неограниченная поверхность основания штампа описывается целой функцией $\Phi(\rho)$, в частности, полиномом. С помощью теории Штаермана плотных контактов высших порядков для функции $\Phi(\rho)$ из указанного выше класса построена функция $J(\rho)$, имеющая своим нулем радиус контакта a.

1. Задача о деформации упругого континуума, к свободной границе которого приложена внешняя сила F (т. н. контактная задача теории упругости), сводится к нахождению функции Грина краевой задачи эллиптического типа для некоторой области, на которой заданы граничные условия смешанного типа. Для решения такого рода задач используются, как правило [1, 2], методы теории потенциала. В классической задаче о деформации полубесконечного упругого континуума обычно считается заданной форма поверхности $\Phi(x_i)$ вдавливаемого в упругий континуум абсолютно твердого штампа и внешняя сила F, нормально действующая на континуум неточечным способом. Нахождению подлежит давление $P(x_i)$ в области фиктивного контакта Δ на части плоскости и вид самой области Δ этого контакта.

Для осесимметричной деформации континуума проблема сводится к решению линейного интегрального уравнения фредгольмова типа 1-го рода

$$\frac{\theta}{\pi}\iint\limits_S \frac{P(\rho')}{|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|}\,dS' = \Phi(\rho) \tag{1.1}$$

для гладкой в круге $S\,\{\rho;\rho\leq a\}$ функции $P(\rho)$ с краевым условием на границе круга $P(a)=0$ и нормированной следующим образом:

$$\iint\limits_S P(\rho)\,dS = F$$

где $\theta=(1-\nu^2)/E$, ν и E — коэффициенты Пуассона и Юнга соответственно. Уравнение для радиуса контакта a имеет вид [1]:

$$F=-\frac{2}{\theta}\int\limits_0^a \Delta_\rho\Phi(\rho)\,\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho,\quad \Delta_\rho=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) \tag{1.2}$$

Аналитическое решение уравнения (1.2) для a при произвольном виде $\Phi(\rho)$ невозможно, однако в случае полиномиального вида $\Phi(\rho)$ степенное уравнение (1.2) может быть разрешено в виде $a=a(F)$ [3]. В некоторых случаях удобнее искать радиус контакта a как функцию перемещения штампа $\Phi(0)$ с помощью уравнения [1]:

$$\Phi(0)=\int\limits_0^a \Delta_\rho\Phi(\rho)\,\rho\,\mathrm{Arth}\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}\,d\rho \tag{1.3}$$

В работах Лурье [4] и Штаермана [5] такая задача была рассмотрена для

$\Phi(\rho) = h - \alpha\rho^m$. Обобщению этих результатов для случая целой или полиномиальной функции $\Phi(\rho)$ посвящена настоящая работа. В частности, будет построена функция $J(\rho)$, имеющая своим нулем радиус контакта a.

2. Рассмотрим без ограничения общности деформацию полубесконечного упругого континуума, описываемую функцией $\Phi(\rho)$, представимой в окрестности $\rho = 0$ в виде степенного ряда по четным степеням ρ:

$$\Phi(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_0^{(2n)}}{(2n)!} \rho^{2n} \tag{2.1}$$

Этот случай интересен тем, что к нему приложимы результаты Штаермана [5] по теории плотных контактных задач. Приведем вкратце эти результаты.

Пусть деформированная поверхность упругого континуума в области контакта со штампом описывается функцией вида $h_n - \alpha_n\rho^{2n}$ (т. н. плотный контакт порядка «n»). Тогда решение интегрального уравнения

$$\frac{\theta}{\pi} \iint_{S_n} \frac{P_n(\rho')}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} dS' = h_n - \alpha_n\rho^{2n} \tag{2.2}$$

для функции $P_n(\rho)$, заданной в круге $S_n\ \{\rho; \rho \le a_n\}$ с краевым условием

$$P_n(a_n) = 0$$

и нормировкой

$$\iint_{S_n} P_n(\rho)\, dS = F_n$$

имеет вид

$$P_n(\rho) = \bar{P}_n\, [1 - (\rho/a_n)^2]^{1/2} St_n\left(\frac{\rho^2}{a_n^2}\right) \tag{2.3}$$

где $St_n(x)$ — полином Штаермана [5], удовлетворяющий рекуррентному соотношению

$$\frac{2n+1}{2n+3} St_{n+1}(x) = \frac{2n}{2n+1} x St_n(x) + \frac{1}{2}, \quad St_1(x) = \frac{3}{2} \tag{2.4}$$

Среднее давление $\bar{P}_n$, радиус контакта a_n и глубина деформации h_n границы континуума на оси симметрии определяются следующими соотношениями

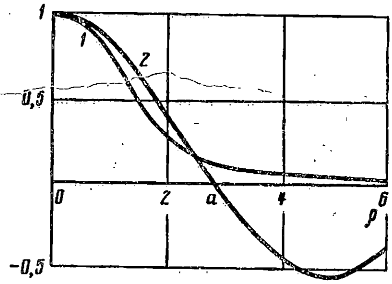
$$\bar{P}_n = \frac{F_n}{\pi a_n^2}, \quad a_n = \left[\frac{1}{4n} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \frac{F_n\theta}{\alpha_n}\right]^{\frac{1}{2n+1}}, \quad h_n = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \alpha_n a_n^{2n} \tag{2.5}$$

Положим в решении Штаермана $a_n = a$ для всех n и просуммируем уравнения (2.2) по n:

$$\frac{\theta}{\pi} \iint_S \frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\rho')\, dS' = \sum_{n=1}^{\infty} h_n - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\rho^{2n} \tag{2.6}$$

Сравнивая уравнения (2.6) и (1.1) с учетом степенного разложения (2.1), получим соотношения

$$P(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\rho), \quad \Phi(0) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n, \quad \alpha_n = -\frac{\Phi_0^{(2n)}}{(2n)!} \tag{2.7}$$



Подставляя выражения для α_n из (2.7) в выражение для h_n из (2.5), а затем последнее — в выражение для Ф(0) из (2.7), найдем функцию

$$J(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \binom{2n}{n}^{-1} \frac{\Phi_0^{(2n)}}{(2n)!} \rho^{2n} \tag{2.8}$$

которая имеет своим нулем a: $J(a) = 0$. В последнем выражении $\binom{2n}{n}$ — биномиальный коэффициент. Ряд в (2.8) для $J(\rho)$ имеет худшую сходимость, чем ряд для $\Phi(\rho)$ в (2.1). В этом легко убедиться с помощью оценки [6]:

$$\binom{2n}{n} \to 4^n \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{при } n \to \infty$$

что, в свою очередь, приводит к асимптотической оценке

$$J(\rho) \simeq \sum_{n} \sqrt{\pi n} \frac{\Phi_0^{(2n)}}{(2n)!} \rho^{2n} \tag{2.9}$$

Нетрудно доказать следующие утверждения о поведении функций Ф и J:

1) если ряд для $\Phi(\rho)$ имеет бесконечный радиус сходимости R_Φ, то ряд для $J(\rho)$ также сходится везде; например (фигура) [1]:

$$\Phi(\rho) = \exp(-\rho^2), \quad R_\Phi = \infty \tag{2.10}$$

$$J(a) = 0, \quad a = 2{,}93, \quad R_J = \infty$$

Кривая 1 на фигуре соответствует функции $\Phi(\rho)$, а кривая 2 — $J(\rho)$.

2) если ряд для $\Phi(\rho)$ имеет конечный радиус сходимости R_Φ, то ряд для $J(\rho)$ может

а) иметь конечный радиус сходимости R_J, например

$$\Phi(\rho) = \text{const} - \ln|1 + \rho^2|, \quad R_\Phi = R_J = 1 \tag{2.11}$$

б) расходиться всюду, например

$$\Phi(\rho) = (1 + \rho^2)^{-1}, \quad R_\Phi = 1, \quad R_J = 0 \tag{2.12}$$

3) пусть $\Phi(\rho)$ — полином степени $2N$, $J(\rho)$ — соответствующий полином степени $2N$, построенный согласно (2.8); тогда если для всех $n \geq 1$ выполняется неравенство $\Phi_0^{(2n)} \leq 0$, то нули a_Φ и a_J соответствующих полиномов Ф и J связаны неравенством $a_J < a_\Phi$.

Найдем физический смысл функции $J(\rho)$ из (2.8). Обращая выражение для a_n в (2.5), получим

[1] Автор выражает благодарность Г. Ласене за помощь в проведении численных расчетов нуля функции $J(\rho)$.

$$\frac{\theta}{2} F_n = \left(\frac{1}{2n+1} - 1 \right) 4^n \binom{2n}{n}^{-1} \frac{\Phi_0^{(2n)}}{(2n)!} a^{2n+1}$$

После суммирования по n и несложных преобразований получим

$$F = \frac{2}{\theta} \int_0^a J(\rho)\, d\rho \tag{2.13}$$

Таким образом, $2J(\rho)/(\theta\rho)$ — эффективное давление в зоне контакта. Нормировка (2.13) указывает на возможность существования для интегрируемых функций $J(\rho)$ бесконечно протяженных контактов ($a = \infty$) при конечном значении силы F.

Полученные выше результаты могут быть распространены на целые функции $\Phi(\rho)$ вида

$$\Phi(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Phi_0^{(m)}}{m!} \rho^m, \quad \Phi_0^{(1)} = 0 \tag{2.14}$$

Используя решения контактной задачи для осесимметричного штампа в виде произвольного параболоида $h_m - \alpha_m \rho^m$ [4, 5], можно найти вид функции $J(\rho)$, обобщающий (2.8) в соответствии с (2.14):

$$J(\rho) = \pi \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \Gamma^{-2} \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2} \right) \Phi_0^{(m)} \rho^m \tag{2.15}$$

где $\Gamma(m)$ — гамма-функция Эйлера. При $m = 2n$ выражение (2.15) естественно переходит в (2.8). Отметим интересный факт: рассматривая (2.15) как результат действия некоторого оператора U^{ν} на функцию $\Phi(\rho)$: $J = U^{\nu}\Phi$, по аналогии с (2.9) можно найти его асимптотическое поведение

$$U^{\nu 2} \simeq \frac{\pi}{2} \rho \frac{d}{d\rho} \tag{2.16}$$

т. е. U^{ν} не принадлежит к классу обыкновенных дифференциальных операторов. Для деформации с функцией $\Phi(\rho)$ из (2.14) также выполняется соотношение (2.13).

В заключение заметим, что выражения (2.3), (2.7) для распределения давления $P(\rho)$ в области контакта неограниченного штампа с упругим континуумом удовлетворяют теореме Галина [1] о «квазиполиномиальной» форме давления под «полиномиальным» основанием штампа без краевой линии [3]:

$$P(\rho) = \sqrt{a^2 - \rho^2}\, Q(\rho)$$

где степень полинома $Q(\rho)$ на 2 меньше степени полинома $\Phi(\rho)$, описывающего поверхность штампа, а сам полином $Q(\rho)$ является линейной комбинацией полиномов Штаермана $St_n(\rho^2)$, определенных в (2.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953.
2. Развитие теории контактных задач в СССР/Под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
3. *Довнорович В. И.* Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск: Изд-во Белорусского университета им. В. И. Ленина, 1959. 108 с.
4. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
5. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
6. *Фел Л. Г.* Краевая задача теории упругости для полупространства с возмущенной границей//Литовский матем. сборник. 1987. Т. 27. № 1. С. 172—180.

Вильнюс

Поступила в редакцию 19.11.1991