

© 1992 г. И. АЛЬТЕНБАХ, Х. АЛЬТЕНБАХ, К. МЮНХ

ПОВЕДЕНИЕ ТВЕРДЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ ПРИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Задачи связанной термомеханики имеют большое прикладное значение во многих областях техники. В работе сформулирована теория, которая согласуется с механикой сплошной среды и опирается при рассмотрении определяющих уравнений на стандартную формулировку Бергандера. Для численной реализации использован пакет прикладных программ COSAR, основанный на методе конечных элементов. Приведенный иллюстративный пример показывает хорошее согласование полученных результатов с физическими представлениями, а также с результатами других авторов.

1. Задача применения методов механики сплошной среды к решению прикладных проблем является весьма актуальной. Основные концепции механики сплошной среды достаточно хорошо изложены в научной литературе [1—5]. Особое внимание при этом уделяется вопросу моделирования и решения задач о поведении твердых деформируемых тел с учетом физических и/или геометрических нелинейностей [6], а также внутренних процессов (например, превращения фаз, повреждение [7]), меняющих свойства материалов, и немеханических воздействий (термических и электромагнитных полей [6, 8]). Успехи в этой области тесно связаны с прогрессом в области компьютерной техники [7, 9].

В данной работе проводится анализ термомеханических процессов. При этом обсуждаются вопросы, связанные с формулировкой основных уравнений, с разными вариантами моделирования, а также с решением связанных задач (здесь термомеханики) на основе метода конечных элементов. При анализе термомеханических процессов возникают два вопроса [10]: вывод и верификация определяющих уравнений для конкретных материалов; определение нестационарных полей температур, деформаций и напряжений при заданных краевых и начальных условиях механического и термического вида.

Вывод основных уравнений термомеханики производится на основе принципов классической механики сплошной среды [1—3]. При феноменологическом описании процессов предполагается, что тело является классической сплошной средой, кинематику которой можно полностью задать в виде трансляционного движения всех точек тела в зависимости от координат пространства и времени; тело и его части являются термодинамическими системами, состояние которых можно определить с помощью конечного числа характеристик состояния даже в тех случаях, когда тело как целое не находится в термодинамическом равновесном состоянии.

Первую группу уравнений можно получить из глобальных уравнений баланса [1] для следующих величин: количество движения, момент количества движения, энергия. К этим уравнениям надо еще добавить два модифицированных уравнения баланса [5] — для массы и энтропии. Локальный баланс получается с помощью теоремы Гаусса — Остроградского и при предположении, что все поля достаточно гладкие. При задании этих общих уравнений удобно различать два состояния: естественное состояние (исходное, отсчетное) — обычно без деформаций и напряжений — и актуальное состояние. Тогда получаются уравнения баланса для актуальной конфигурации в виде [11]:

$$\rho^{\circ} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \mathbf{v}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \quad \rho \varepsilon^{\circ} = \boldsymbol{\sigma} \cdots (\nabla \mathbf{v})^s + \rho^+ - \nabla \cdot \mathbf{h}$$

$$\rho \theta s^{\circ} \geq \rho^+ - \nabla \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \nabla \ln \theta \quad (1.1)$$

ρ — плотность, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, ∇ — оператор Набла относительно актуальной конфигурации, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши, $\mathbf{f}$ — вектор удельных объемных сил, ε — удельная внутренняя энергия, s — удельная энтропия, θ — абсолютная температура, $()^T$ — транспонирование, $()^s$ — симметричная часть тензора, $()^{\circ}$ — материальная производная по времени.

Актуальное состояние задано вектором $\mathbf{x}$. Вектор $\mathbf{x}$ является функцией исходного состояния (координатный вектор $\mathbf{x}_0$), а также времени t . Тогда уравнения баланса могут быть представлены в отсчетной конфигурации

$$\rho_0 / \rho = dv / dv_0, \quad J = |\partial x_i / \partial x_{0i}| \neq 0$$

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{T} + \rho_0 \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{T} = J \nabla \mathbf{x}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathbf{T}^T \cdot \nabla_0 \mathbf{x} = \nabla_0 \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{T}$$

$$\rho \varepsilon^{\circ} = \mathbf{T} \cdots (\nabla_0 \mathbf{v})^T + \rho_0^+ - \nabla_0 \cdot \mathbf{h}_0, \quad \mathbf{h}_0 = J \nabla \mathbf{x}_0^T \cdot \mathbf{h} \quad (1.2)$$

$$\rho_0 \theta s^{\circ} \geq \rho_0^+ - \nabla_0 \cdot \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_0 \cdot \nabla_0 \ln \theta$$

Здесь $\mathbf{T}$ — несимметричный тензор напряжений Пиола, индексом нуль обозначается исходная конфигурация. Переход от (1.1) к (1.2) возможен, если все силы являются консервативными. Для исследования диссипативных систем часто используется диссипативная мощность D (f — удельная свободная энергия):

$$\rho D = \boldsymbol{\sigma} \cdots (\nabla \mathbf{v})^s - \rho (f^{\circ} + s \theta^{\circ}) = \rho s \theta^{\circ} - \rho^+ + \nabla \cdot \mathbf{h}$$

или

$$\rho_0 D = \mathbf{T} \cdots (\nabla_0 \mathbf{v})^T - \rho_0 (f^{\circ} + s \theta^{\circ}) = \rho_0 s \theta^{\circ} - \rho_0^+ + \nabla_0 \cdot \mathbf{h} \quad (1.3)$$

Таким образом, получаем

$$\rho D - \mathbf{h} \cdot \nabla \ln \theta \geq 0 \quad \text{или} \quad \rho_0 D - \mathbf{h}_0 \cdot \nabla_0 \ln \theta \geq 0$$

Для необратимых процессов $D > 0$, для обратимых — $D = 0$.

2. Определяющие уравнения выражают специфические свойства материалов. Их вывод является предметом широких дискуссий в научной литературе, причем мнения авторов расходятся как в методике вывода и конкретных представлениях, так и в их верификациях [5]. Учитывая конкретные условия нагружения (усилия, температура, ...), их временные зависимости, можно сформулировать специальные модели с фундаментальными свойствами (упругость, пластичность, вязкость). Реальные материалы всегда имеют комплексные свойства. Часто оказывается, что условия конкретных задач позволяют аппроксимацию реальных свойств в виде модели с одним фундаментальным свойством или модели, которая является комбинацией двух фундаментальных свойств (вязкоупругость, упругопластичность, вязкопластичность). Пусть термодинамическое состояние определено с помощью определяющих параметров абсолютной температуры и тензора деформаций Коши — Грина $\mathbf{d} = 1/2 [\nabla_0 \mathbf{x} \cdot \nabla_0 \mathbf{x}^T - \mathbf{1}]$, $\mathbf{1}$ — единичный тензор второго ранга.

Допустим, что материал характеризуется в крайнем случае комбинацией двух фундаментальных свойств. Тогда полные деформации можно представить в виде следующей суммы:

$$d = d^e + d^d \quad (2.1)$$

причем d^e , d^d — упругая и диссипативная часть деформаций соответственно. Такое представление справедливо для ряда практических задач. С другой стороны, это существенное ограничение общих реологических схем [6, 12]. Из (2.1) путем дифференцирования получим соответствующее соотношение для скоростей деформаций.

При исключении стареющего материала можно сделать такое предположение для свободной энергии

$$f = f^e(d^e, \theta) + f^d(d^d, \theta) \quad (2.2)$$

Сопряженный к d тензор напряжений — тензор Пиола — Кирхгофа [11]:

$$T^* = T \cdot \nabla x = J(\nabla x_0)^T \cdot \sigma \cdot \nabla x_0 \quad (2.3)$$

Механическую мощность, связанную с неупругой деформацией, можно разделить на обратимую и необратимую часть. Это предположение можно объяснить микроструктурными явлениями (например, движение дислокаций и ошибки в кристаллических решетках [13]), а также экспериментальными наблюдениями. При этом только часть неупругой мощности переходит в тепло. Из-за того, что в литературе не существует ссылки на возможность однозначного теоретического задания мощности диссипации, часто используется приближенная зависимость следующего типа [14]:

$$\rho_0 D = \zeta T^* \cdot (d^d)^{\cdot}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (2.4)$$

Для эмпирического фактора ζ часто принимают $\zeta = 0,9$ или $\zeta = 1$ (полный переход неупругой мощности в тепло). В [13] предложено для упругопластических материалов $\zeta \approx 1$, в [14] для вязко пластических также $\zeta \approx 1$.

Из (1.3), (2.2) и (2.3) следует

$$\frac{\partial f^e}{\partial d^e} \cdot (d^e)^{\cdot} + \frac{\partial f^d}{\partial d^d} \cdot (d^d)^{\cdot} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \theta^{\cdot} = \frac{1}{\rho_0} T^* \cdot d^{\cdot} - D - s \theta^{\cdot}$$

С учетом (2.1) и (2.4) сравнение коэффициентов дает

$$\frac{\partial f^e}{\partial d^e} = \frac{1}{\rho_0} T^*, \quad \frac{\partial f^d}{\partial d^d} = \frac{1}{\rho_0} (1 - \zeta) T^*, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -s \quad (2.5)$$

3. Дальнейший анализ проводится на основе инфинитезимального закона для материала в виде стандартной формулировки Бергандера [15]. Инверсная форма этого закона имеет следующий вид:

$$\tau^{\cdot} = {}^4C \cdot \cdot \varepsilon^{\cdot} + m + {}^6m \theta^{\cdot} \quad (3.1)$$

$$g = {}^3B \cdot \cdot \varepsilon^{\cdot} + e + {}^6e \theta^{\cdot}$$

где τ — тензор напряжений (технические напряжения), ε — тензор деформаций (малые деформации), g — вектор внутренних переменных.

Тензоры 4C , 3B , m , 6m , а также векторы e , 6e характеризуют конкретные свойства материала. В общем случае они зависят от деформаций, напряжений, внутренних переменных и температуры. 4C и 3B относятся к склерономным свойствам, m , e к реономным (значит, их не будет в случае упругого и упругопластического материала). 6m , 6e появляются в случае нестационарных температурных полей. Возможно расширение соотношения (3.1). В случае конечных деформаций удобно различать два случая [9]: а) большие перемещения и повороты, но малые деформации и б) большие перемещения, повороты, а также деформации.

Особенно сложной является формулировка соответствующих уравнений во втором случае, так как здесь надо выбрать сначала одну из объективных скоростей (по Ольдรอยду, по Трусделлу или по Яуманну — Поллу — Царемба) [11, 16]. После выбора можно однозначно переписать первое из уравнений (3.1). Каким образом можно поступить относительно второго уравнения — пока неясно. Например, в [17] дана объективная формулировка уравнения, соответствующего второму уравнению (3.1), а в [18] содержится указание, что такой формулировки можно избежать. Из-за этого здесь ограничимся рассмотрением случая а). Тогда достаточно заменить в (3.1) τ и ϵ на T^* и d соответственно.

4. К определяющим уравнениям надо в случае термодинамических процессов добавить обобщенное уравнение теплопроводности. В соответствии с уравнениями (2.5), (1.1), (1.2) и (2.2) изменение плотности энтропии имеет следующий вид:

$$s^* = - \frac{\partial^2 f^*}{\partial d^* \partial \theta} \cdot (d^*)^* + \frac{\partial^2 f^*}{\partial d^* \partial \theta} \cdot (d^*)^* + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \theta^*$$

С учетом (2.5) можно получить

$$s^* = - \left[\frac{1}{\rho_0} \theta m^* \cdot (d^*)^* + (1 - \rho) \frac{1}{\rho_0} \theta m^* \cdot (d^*)^* + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \theta^* \right]$$

θm^* характеризует тепловые растяжения, а также зависимость параметров материала от температуры. Последнее слагаемое можно преобразовать с помощью соотношения

$$\partial^2 f / \partial \theta^2 = c(\theta) / \theta \quad (4.1)$$

где c — удельное тепло. Представление (4.1) возможно, когда можно исключить фазовые переходы. В противном случае надо применить специальные представления для континуальных или скачкообразных переходов. Систему уравнений термомеханики замыкает определяющее уравнение для вектора теплового потока

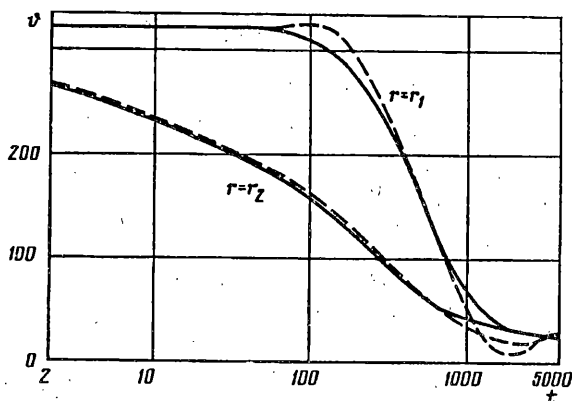
$$h = -k \cdot \nabla \theta \quad (4.2)$$

где k — тензор коэффициентов теплопроводности. Уравнение (4.2) является представлением закона Фурье в актуальной конфигурации для анизотропных тел.

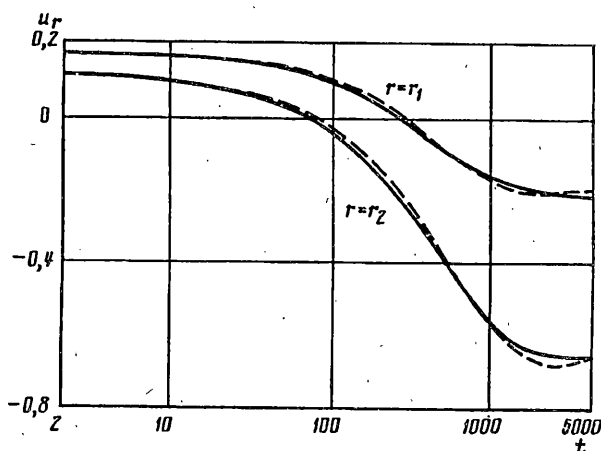
5. Для решения представленной системы уравнений (вместе с начальными и граничными условиями) был использован пакет прикладных программ COSAR [19]. Помимо проблемы корректной формулировки задачи надо учитывать, что численное решение связанных задач до сих пор сложно и трудоемко. Поэтому очень важно исследовать возможные упрощения (пренебрежение инерционными слагаемыми и слагаемыми, которые учитывают взаимодействие термических и механических полей). Тогда можно ввести так называемое термическое время и механическое время [20] и тем самым оценить влияние различных эффектов, связанных с инерционными членами. Оценка влияния термомеханических связей осуществляется с помощью критериев, которые могут быть исследованы численно. Но, как правило, такие процедуры требуют больших затрат.

Численное решение связанной задачи термомеханики было организовано с учетом специфики пакета программ COSAR с помощью метода сукцессивной итерации, т. е. последовательного решения соответствующих частных задач. Геометрическая дискретизация была осуществлена на основе метода конечных элементов, причем вывод соотношений для дискретизированной задачи был реализован методом Галеркина. При этом неизвестными переменными являлись перемещение и температура. Реализация конечно-элементного подхода подробно описана в [21].

При дискретизации была получена система дифференциальных уравнений по



Фиг. 1

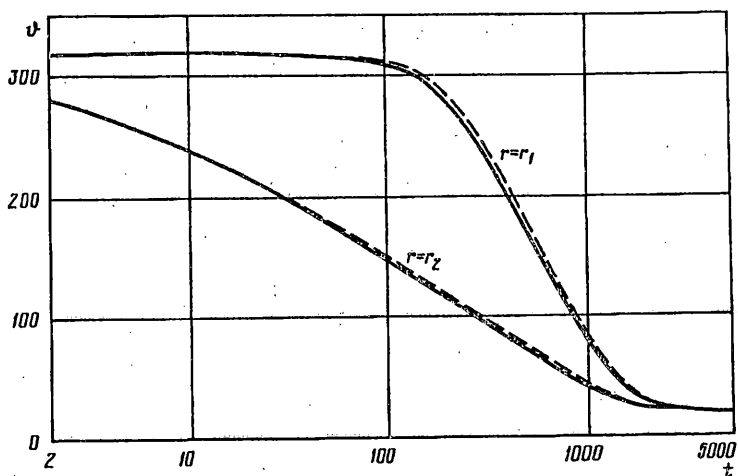


Фиг. 2

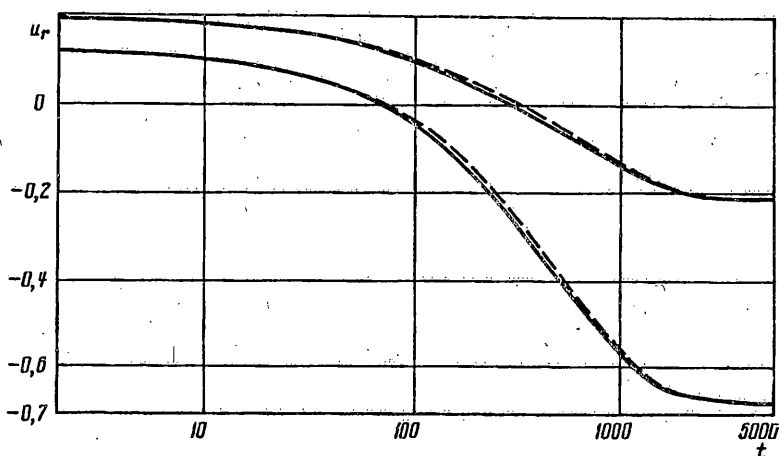
времени. Был использован метод прямого интегрирования по времени, так как этот метод пригоден как в случае линейных, так и в случае нелинейных задач. Метод интегрирования по времени, а также другие элементы численного решения задач термомеханики с помощью пакета программ COSAR, даны в [21].

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу охлаждения полого цилиндра. Цилиндр нагружен внутренним давлением. Производится его охлаждение от 320°C до 20°C , причем для этого применяется воздух (внутренняя поверхность) и вода (внешняя поверхность). Поверхности могут свободно перемещаться. В [14] приведены связанное и несвязанное решения (также с помощью метода конечных элементов). Поэтому на фиг. 1 и 2 сопоставлены только связанные решения для температуры и радиального перемещения. Штриховыми линиями показаны результаты Аргириса [14], а сплошными — по пакету COSAR. Внутренний и внешний радиусы обозначены r_1 и r_2 . На фиг. 3 и 4 сопоставлены связанное решение (пунктир) и несвязанное (сплошная линия) по пакету COSAR. Отклонения решения [14] связаны с осцилляциями численного решения. Результаты, показанные на рисунках, согласуются с физическими представлениями о поведении решений.

Задачи, в которых помимо напряженно-деформационного состояния исследуется температурное распределение, имеют большое практическое значение. С другой стороны, кроме теоретических проблем при формулировке возникают



Фиг. 3



Фиг. 4

и численные трудности при решении. Данная работа рассматривает как теоретические, так и численные аспекты вопроса. Представлен первый вариант конечноэлементного решения связанных задач термомеханики, причем результаты, полученные с помощью пакета COSAR хорошо согласуются с решениями других авторов, а также с физическими представлениями. Следующие разработки необходимо проводить в двух направлениях: расширение численных возможностей (динамические процессы, нелинейности и т. д.) и новые теоретические разработки (например, учет больших деформаций), которые должны привести к новым определяющим уравнениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Труделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
2. Lemaitre J., Chaboche J.-L. Mécanique des matériaux solides. Paris: Dunod, 1985. 534 p.
3. Chang T. J. Continuum Mechanics. Englewood Cliffs: Prentice-Hall. 1988. 367 p.
4. Bertram A. Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik. Mannheim; Zürich: B. I. Wissenschaftsverlag, 1989. 287 s.

5. *Altenbach H.* Zu einigen Aspekten der klassischen Kontinuumsmechanik und ihrer Erweiterungen//*Techni. Mechanik.* 1990. Bd. II. H. 2, S. 95—108.
6. *Krawietz A.* Materialtheorie — Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhaltens. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1986. 476 s.
7. *Kitagawa H.* Micro- and Macroaspects in Computational Mechanics//*JSME Intern. Journal* 1987. V. 30. № 267. P. 1361—1368.
8. Термодинамическое обоснование теорий макроскопических моделей веществ и полей/Под ред. Л. И. Седова. М.: Мир, 1983. 263 с.
9. *Bathe K.-J.* Finite-Elemente-Methoden. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1986. 820 s.
10. *Argyris J. H., Doltsinis J. S., Wüstenberg H., Kneese F.* Numerik thermodynamischer Vorgänge. (VDI-Forschungsheft 635. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1986. S. 1286.
11. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
12. *Palmow W. A.* Rheologische Modelle für Materialien bei endlichen Deformationen//*Techni. Mechanik.* 1984. Bd. 5. H. 4. S. 20—31.
13. *Luther M.* Eine thermomechanische Konzeption der Deformationsgesetze in Standardform und deren Anwendung auf das Feldproblem.— TU Karl-Marx-Stadt, Diss. A, 1986.
14. *Argyris J. H., Vaz L. E., William K. J.* Integrated finite element analysis of coupled thermoviscoplastic problems. Stuttgart: ISD-Report. No. 1980. P. 283.
15. *Bergander H.* Plastische Deformationsgesetze in differentieller Standardformulierung//*ZAMM* 1980. Bd. 60. H. 10. S. 509—519.
16. *Haupt P., Tsakmakis Ch.* On the application of dual variables in continuum mechanics//*Continuum Mechanics and Thermodynamics.* 1989. V. 1. P. 165—196.
17. *Lee E. H., Agah-Tehrani A.* On elastic finite deformation with strain-induced anisotropy//*Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications*/Ed. C. S. Desai et al. New York-Amsterdam-London: Elsevier, 1987. V. 1. P. 161—172.
18. *Bergander H.* Deformationsgesetze der Standardform in konvektiver Metrik//*Techni. Mechanik.* 1987. Bd. 8. H. 2. S. 31—40.
19. *Altenbach J., Gabbert U.* Das universelle Finite-Elemente-Programmsystem COSAR — gegenwärtiger Stand und Entwicklungstendenzen//*Techni. Mechanik.* 1988. Bd. 9. H. 1. S. 7—21.
20. *Thermal Stresses I.* Ed.: R. B Hetnarski. Amsterdam; New York-Oxford; Tokyo: North-Holland, 1986. 548 p.
21. *Munch C.* Die Analyse thermomechanischer Vorgänge mit der Finite-Elemente Methode. TU Magdeburg, Diss. A, 1989.

ФРГ

Поступила в редакцию
28.IX.1990