МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1992

УДК 534.1

© 1992 г. Е. А. ПРИВАЛОВ

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ МЕТОДА НЕГЛАДКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, ПРИМЕНЯЕМОГО ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ

Предлагается новая форма метода негладких преобразований [1, 2], применяемого для исследования виброударных систем. Существо этого метода состоит в переходе к переменным, не испытывающим разрывов в моменты ударов. Это позволяет корректно исследовать дифференциальные уравнения относительно этих переменных различными методами, в частности, методом осреднения. Применение предлагаемой формы метода негладких преобразований проиллюстрировано на характерном примере виброударной системы, имеющей одну степень свободы, с односторонним ограничителем движения.

Рассматривается движение осциллятора, сопровождающееся ударами о неподвижный односторонний ограничитель. Воздействие на осциллятор со стороны ограничителя описывается моделью удара Ньютона — Гюйгенса. Коэффициент восстановления при ударе r. Ограничитель смещен от положения статического равновесия осциллятора на расстояние d. Будем считать, что координата осциллятора $x \geq d$.

Уравнения движения осциллятора запишем в виде

$$x^{\cdot} = y, y^{\cdot} + x = F + \varepsilon f \tag{1}$$

Здесь F — сила, прикладываемая к осциллятору со стороны ограничителя в момент удара; f — некоторая сила, ε — малый параметр, точка означает дифференцирование по времени t.

Когда происходит удар, действие силы F обуславливает выполнение следующих соотношений

$$x(t^*) = d, \ y(t^* + 0) = -ry(t^* - 0) \tag{2}$$

Здесь t^* — момент удара; $t^* + 0$ — момент времени, непосредственно следующий за моментом удара; $t^* - 0$ — предшествующий удару момент времени.

Положим в (1) $\varepsilon = 0$. Получившейся порождающей системе уравнений при $r = 1$ удовлетворяет периодическое по t решение, имеющее на периоде $[-\arccos(d/A - \chi), \arccos(d/A - \chi)]$ вид $x = A\cos(t + \chi)$, $y = -A\sin(t + \chi)$. При этом считается, что амплитуда колебаний осциллятора $A \geq |d|$.

Рассматривая случай $r < 1$, введем периодические функции, которые на периоде

$$\left[-\arccos\frac{d - \kappa(A + d)}{A - \kappa(A + d)} - \chi, \ \arccos\frac{d + \kappa(A + d)}{A + \kappa(A + d)} - \chi\right]$$

задаются в виде

$$C = \cos(t + \chi) + \kappa(1 + d/A)[\cos(t + \chi) - 1]M \tag{3}$$

$$S = \sin(t + \chi) + \kappa(1 + d/A)\sin(t + \chi)M$$

Здесь $\kappa = (1 - r^2) / 2(1 + r^2)$, M — кусочно-постоянная периодическая функция с тем же периодом, что и функции C и S:

$$M = \begin{cases} -1 \text{ при } -\arccos\dfrac{d-\kappa(A+d)}{A-\kappa(A+d)} - \chi < t < -\chi \\ 1 \text{ при } -\chi < t < \arccos\dfrac{d+\kappa(A+d)}{A+\kappa(A+d)} - \chi \end{cases} \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что функции

$$x = AC(t+\chi), \quad y = -AS(t+\chi) \tag{5}$$

удовлетворяют системе уравнений

$$x^{\cdot} = y, y^{\cdot} + x = F - A\kappa M(1 + d/A)$$

Сила, введенная в правую часть второго уравнения, обеспечивает «разгон» осциллятора на участках непрерывности движения. Этим компенсируются потери энергии в моменты ударов, в результате чего реализуется режим стационарных колебаний.

Заменим в формуле (3) $t+\chi$ на ψ и, считая A и ψ функциями времени, будем рассматривать соотношения (5) как формулы замены в системе (1) переменных x, y на переменные A, ψ. Отметим, что вид функций (3.4) таков, что условия (2) выполняются при непрерывных $A(t)$, $\psi(t)$.

Для производных $x^{\cdot}$ и $y^{\cdot}$ будем иметь

$$x^{\cdot} = A^{\cdot}C + A(\partial C/\partial\psi \cdot \psi^{\cdot} + \partial C/\partial A \cdot A^{\cdot}) \tag{6}$$

$$y^{\cdot} = -A^{\cdot}S - A(\partial S/\partial\psi \cdot \psi^{\cdot} + \partial S/\partial A \cdot A^{\cdot})$$

Во второе соотношение системы (6) входят функции $\partial S/\partial\psi$, $\partial S/\partial A$, которые содержат непрерывные составляющие $\partial s/\partial\psi$, $\partial s/\partial A$ и составляющие, имеющие разрывы второго рода в моменты ударов. В соответствии с (3), выражения для непрерывных составляющих $\partial s/\partial\psi$, $\partial s/\partial A$, а также для функций $\partial C/\partial\psi$, $\partial C/\partial A$ имеют вид

$$\partial C/\partial\psi = -\sin\psi - \kappa M(1 + d/A)\sin\psi = -S$$

$$\partial C/\partial A = -\kappa M(\cos\psi - 1)\, d/A^2 \tag{7}$$

$$\partial s/\partial\psi = \cos\psi + \kappa M(1 + d/A)\cos\psi = C + \kappa M(1 + d/A)$$

$$\partial s/\partial A = -\kappa M\sin\psi \cdot d/A^2$$

Разрывные составляющие в ходе замены переменных при подстановке соотношений (3—7) в систему уравнений (1) сокращаются с F. Результатом замены переменных являются уравнения

$$A^{\cdot}[C - \kappa M(\cos\psi - 1)\, d/A] - AS(\psi^{\cdot} - 1) = 0 \tag{8}$$

$$A^{\cdot}(S - \kappa M\sin\psi \cdot d/A) + A[C + \kappa M(1 + d/A)](\psi^{\cdot} - 1) =$$
$$= -\varepsilon f - A\kappa M(1 + d/A)$$

Будем считать, что величина параметра κ имеет порядок ε. Отметив, что $C^2 + S^2 = 1 + \kappa$ (.........), разрешим уравнения (8) относительно производных, удерживая члены порядка не выше, чем ε. Получим систему уравнений

$$A^{\cdot} = -[\varepsilon f + A\kappa(1 + d/A)M]S \tag{9}$$

$$\psi^{\cdot} = 1 - A^{-1}\,[\varepsilon f + A\kappa\,(1 + d/A)M]\,C$$

В силу сделанных предположений о порядке малости удерживаемых членов в (9) функции C и S запишем на периоде в виде $C = \cos\psi$, $S = \sin\psi$.

Будем считать теперь, что действующая на осциллятор сила представляет собой сумму изменяющейся по гармоническому закону силы и силы вязкого трения

$$\varepsilon f = p\sin\nu t - hy = p\sin\nu t + hAS \qquad (10)$$

Естественно, p и h имеют порядок ε. Дополнив систему уравнений, получившуюся из системы (9) после подстановки в нее выражения (10), уравнением $dt/dt = 1$, получим систему уравнений с одной медленной и двумя быстрыми переменными [3].

Исследуем резонансные случаи движения осциллятора. Резонансное соотношение имеет вид $n\Omega - \nu = 0$:

$$\Omega = 2\pi \Big/ \left[\arccos\frac{d - \kappa\,(A + d)}{A - \kappa\,(A + d)} + \arccos\frac{d + \kappa\,(A + d)}{A + \kappa\,(A + d)}\right]$$

где Ω — частота колебаний осциллятора, n — целое число. В соответствии с этим введем расстройку частоты по формуле $\Delta = n\,\Omega - \nu$. Величину Δ считаем порядка ε. Обозначив $\varphi = \nu t$ и введя медленную фазу $\theta = n\Omega\psi - \varphi$, представим уравнения в виде

$$\begin{aligned} A^{\cdot} &= -\,[p\sin(n\Omega\psi - \theta) + hAS + \kappa\,(A + d)M]S \\ \psi^{\cdot} &= 1 - A^{-1}\,[p\sin n\Omega\psi - \theta) + hAS + \kappa\,(A + d)M]C \\ \theta^{\cdot} &= \Delta - n\Omega A^{-1}\,[p\sin(n\Omega\psi - \theta) + hAS + \kappa\,(A + d)\,M]C \end{aligned} \qquad (11)$$

Осредним правые части уравнений (11) по ψ. При этом, по-прежнему пренебрегая членами более высокого порядка чем ε, среднее определяем на отрезке $[-\arccos d/A,\ \arccos d/A]$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} A^{\cdot} &= (-1)^{n+1} n\pi p \left[1 - \left(\frac{d}{A}\right)^2\right]^{1/2}\left[\left(\arccos\frac{d}{A}\right)^2 - n^2\pi^2\right]^{-1}\cos\theta - \\ &- \frac{hA}{2}\left\{1 - \frac{d}{A}\left[1 - \left(\frac{d}{A}\right)^2\right]^{1/2}\left(\arccos\frac{d}{A}\right)^{-1}\right\} + \kappa A\left[1 - \left(\frac{d}{A}\right)^2\right]\left(\arccos\frac{d}{A}\right)^{-1} \\ \theta^{\cdot} &= \Delta + (-1)^n n\pi p A^{-1}\left[1 - \left(\frac{d}{A}\right)^2\right]^{1/2}\left[\left(\arccos\frac{d}{A}\right)^2 - n^2\pi^2\right]^{-1}\sin\theta \end{aligned} \qquad (12)$$

Уравнения (12) довольно громоздки. Их качественный анализ затруднен. Но в случае, когда d/A имеет порядок ε, они упрощаются и записываются в виде

$$\begin{aligned} A^{\cdot} &= (-1)^n\frac{4np}{\pi\,(4n^2 - 1)}\cos\theta - \left(\frac{h}{2} + \frac{2\kappa}{\pi}\right)A \\ \theta^{\cdot} &= \Delta - (-1)^n\frac{4np}{A\pi\,(4n^2 - 1)}\sin\theta \end{aligned} \qquad (13)$$

Положив в (13) $A^{\cdot} = \theta^{\cdot} = 0$, придем к уравнениям, определяющим стационарное значение переменных A, θ. Разрешим первое из получившихся уравнений относительно $\cos\theta$, а второе — относительно $\sin\theta$, возведем их в квадрат и сложим, исключив, тем самым, переменную θ. Задача сведется к решению алгебраического уравнения второй степени относительно A, из которого найдем выражение для амплитуды

$$A_0 = 4np/\pi\,(4n^2 - 1)\left[\left(\frac{h}{2} + \frac{2\kappa}{\pi}\right)^2 + \Delta^2\right]^{1/2} \qquad (14)$$

При этом учитывается условие $A \geq 0$. В результате деления первого уравнения системы, определяющей стационарное решение, на второе уравнение для фазы θ получим

$$\theta_0 = \operatorname{arcctg}\,[(h/2 + 2\kappa/\pi)/\Delta] \qquad (15)$$

Формулы (14, 15) совпадают с выражениями для амплитуды и фазы вынужденных колебаний линейного осциллятора, движение которого описывается уравнением

$$x^{\cdot\cdot} + 2\,(h/2 + 2\kappa/\pi)\,x^{\cdot} + (\nu + \Delta)^2 x = 8n\nu p\pi^{-1}\,(4n^2 - 1)^{-1}\sin\nu t$$

хотя изучаемая система существенно нелинейна.

Исследуем устойчивость полученного решения. Корни характеристического уравнения системы уравнений в вариациях имеют вид $\lambda_{1,2} = -(h/2 + 2\kappa/\pi) \pm \Delta\sqrt{-1}$. При $h = \kappa = 0$ решение устойчиво. Если имеется вязкое трение или диссипация энергии при ударе, то решение устойчиво асимптотически.

Полученное решение удовлетворяет системе уравнений (1) с точностью до величин порядка ε.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В. Ф.* Метод анализа виброударных систем при помощи специальных функций//Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 2. С. 30—34.
2. *Журавлев В. Ф.* Исследование некоторых виброударных систем методом негладких преобразований//Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 6. С. 24—28.
3. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М. Изд-во МГУ. 1971. 507 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.III.1991