МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1992

УДК 531.36

© 1992 г. А. Я. КРАСИНСКИЙ

О СТАБИЛИЗАЦИИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА СТЕРЖНЕ

В переменных Рауса рассмотрена задача стабилизации установившихся движений динамически симметричного твердого тела, подвешенного к неподвижной точке при помощи невесомого стержня. Стабилизирующий момент создается симметричным ротором, ось которого совпадает с осью динамической симметрии. Указано достаточное условие разрешимости задачи и условие, при выполнении которого для формирования управления достаточно измерения угла в цилиндрическом шарнире.

1. Многообразие установившихся движений. Различные формы установившихся движений твердого тела, подвешенного на стержне, исследовались во многих работах (см., например [1—4]). Здесь рассматривается задача стабилизации таких движений, причем стабилизирующее воздействие предлагается создавать при помощи симметричного ротора, ось вращения которого неподвижна в теле. Вследствие выбранного способа реализации управления исследуемая система будет моделироваться симметричным гиростатом. Устойчивость регулярных прецессий гиростата в различных постановках исследована в [2, 4].

Рассмотрим динамически симметричный гиростат с центром масс C на оси симметрии, шарнирно подвешенный к неподвижной точке O_1 на невесомом недеформируемом стержне с точкой подвеса O на оси симметрии [4]. Пусть с телом неизменно связана ось вращения статически и динамически уравновешенного ротора, совпадающая с осью симметрии тела. Стержень в точке O_1 прикреплен при помощи цилиндрического шарнира к вертикальному валу мотора, который равномерно вращается с угловой скоростью Ω, а другой его конец закреплен в теле при помощи сферического шарнира. Обозначим через α угол, образуемый направлением стержня OO_1 с нисходящей вертикалью. Введем две правые прямоугольные системы координат: жестко связанную с телом $Cx_1x_2x_3$, оси которой направлены по главным осям инерции гиростата, и подвижную систему $O_1y_1y_2y_3$, вращающуюся вокруг направленной вертикально вверх оси y_3 с угловой скоростью Ω, причем стержень расположен в плоскости $y_1O_1y_3$. Пусть ось x_3 совпадает с осью симметрии тела и для точки O имеем $x_3 = a > 0$. Введем θ, ψ, φ — углы Эйлера, определяющие ориентацию системы координат $Cx_1x_2x_3$ относительно системы $O_1y_1y_2y_3$, φ_1 — угол поворота ротора относительно тела. Функция Лагранжа системы такова

$$L = \frac{m}{2} \{l^2 (\alpha^{\cdot 2} + \Omega^2 \sin^2 \alpha) + a^2 [\theta^{\cdot 2} + (\Omega + \psi^{\cdot})^2 \sin^2 \theta] +$$

$$+ 2al [\alpha^{\cdot}\theta^{\cdot} (\sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta \sin \psi) + \alpha^{\cdot} (\Omega + \psi^{\cdot}) \cos \alpha \sin \theta \cos \psi -$$

$$- \Omega\theta^{\cdot} \sin \alpha \cos \theta \cos \psi + \Omega (\Omega + \psi^{\cdot}) \sin \alpha \sin \theta \sin \psi] \} +$$

$$+ {}^1\!/_2 J_1 [\theta^{\cdot 2} + (\Omega + \psi^{\cdot})^2 \sin^2 \theta] + {}^1\!/_2 J_3' [\varphi^{\cdot} + (\Omega + \psi^{\cdot}) \cos \theta]^2 +$$

$$+ {}^1\!/_2 J_3'' [\varphi_1^{\cdot} + \varphi^{\cdot} + (\Omega + \psi^{\cdot}) \cos \theta]^2 + mg (l \cos \alpha + a \cos \theta)$$

где m и $J_1 = J_2$, $J_3 = J_3' + J_3''$ — масса и главные центральные моменты инерции гиростата; J_3' и J_3'' — осевые моменты инерции тела и ротора; l — длина стержня; g — ускорение силы тяжести.

Введем циклические импульсы и функцию Рауса

$$p_1 = \partial L/\partial\varphi^{\cdot} = J_3\,[\varphi^{\cdot} + (\Omega + \psi^{\cdot})\cos\theta] + J_3''\varphi_1^{\cdot}$$

$$p_2 = \partial L/\partial\varphi_1^{\cdot} = J_3''\,[\varphi_1^{\cdot} + \varphi^{\cdot} + (\Omega + \psi^{\cdot})\cos\theta]$$

$$R = \frac{1}{2}(ml^2\alpha^{\cdot 2} + A\theta^{\cdot 2} + A\sin^2\theta\psi^{\cdot 2}) + mla\,(\sin\alpha\sin\theta +$$

$$+ \cos\alpha\cos\theta\sin\psi)\,\alpha^{\cdot}\theta^{\cdot} + mla\cos\alpha\sin\theta\cos\psi\alpha^{\cdot}\psi^{\cdot} +$$

$$+ \alpha^{\cdot}\Omega mla\cos\alpha\sin\theta\cos\psi - \Omega\theta^{\cdot}mla\sin\alpha\cos\theta\cos\psi + \psi^{\cdot}p_1\cos\theta +$$

$$+ \Omega\psi^{\cdot}\,(A\sin^2\theta + mla\sin\theta\sin\alpha\sin\psi) + R_0$$

$$R_0 = p_1\Omega\cos\theta - \frac{1}{2J_3'}(p_1 - p_2)^2 - \frac{1}{2J_3''}p_2^2 + \frac{ml^2}{2}\Omega^2\sin^2\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2}\Omega^2 A\sin^2\theta + mla\Omega^2\sin\alpha\sin\theta\sin\psi + mg\,(l\cos\alpha + a\cos\theta)$$

$$A = ma^2 + J_1$$

Многообразие установившихся движений определяется уравнениями

$$\partial R_0/\partial\alpha = ml^2\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha + mla\Omega^2\cos\alpha\sin\theta\sin\psi - mgl\sin\alpha = 0$$

$$\partial R_0/\partial\theta = -p_1\Omega\sin\theta + A\sin\theta\cos\theta\Omega^2 + mla\Omega^2\sin\alpha\cos\theta\sin\psi - mga\sin\theta = 0$$

$$\partial R_0/\partial\psi = mla\Omega^2\sin\alpha\sin\theta\cos\psi = 0 \tag{1.1}$$

При $\Omega \neq 0$, $L \neq 0$, $a \neq 0$, $\sin\alpha^* \neq 0$, $\sin\theta^* \neq 0$ из последнего уравнения (1.1) имеем $\cos\psi^* = 0$, откуда $\psi^* = \pi/2$, т. е. ось симметрии тела находится в одной вертикальной плоскости со стержнем. Из двух оставшихся уравнений при $\psi^* = \pi/2$, $\alpha^* \neq \pi/2$ получим, обозначая $\mu = (g/\Omega^2\cos\alpha^* - l)$:

$$\sin\theta^* = a^{-1}\mu\sin\alpha^*,\ p_1 = \delta_1 = \Omega^{-1}\,[\Omega^2(1 - a^{-2}\mu^2\sin^2\alpha^*)^{1/2}(A + \mu^{-1}mla^2) - mga]$$

2. Достаточное условие стабилизируемости. Рассмотрим задачу стабилизации невозмущенного движения

$$\theta = \theta^*, \alpha = \alpha^*, \psi^* = \pi/2, p_1 = \delta_1, p_2 = \delta_2,$$

$$\delta_1 = J_3''\,(\varphi^{\cdot *} + \varphi_1^{\cdot *}) + J_3'\varphi^{\cdot *}, \delta_2 = \delta_1 - J_3'\varphi^{\cdot *} \tag{2.1}$$

при помощи линейного момента, приложенного вокруг оси вращения ротора. Введем обозначения для возмущений $\alpha = \alpha^* + x_1$, $\alpha^{\cdot} = x_2$, $\theta = \theta^* + x_3$, $\theta^{\cdot} = x_4$, $\psi = \pi/2 + x_5$, $\psi^{\cdot} = x_6$, $p_1 = \delta_1 + y$, $p_2 = \delta_2 + z$. Выделяя в уравнениях возмущенного движения первое приближение, получим [5]:

$$x^{\cdot} = Px + Qu + N(x, u),\ z^{\cdot} = -u \tag{2.2}$$

где $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y)$, N — вектор нелинейных членов, а матрицы коэффициентов при членах первого порядка таковы:

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_3 & h_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_5 & 0 & h_6 & 0 & 0 & h_7 & h_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h_9 & 0 & h_{10} & h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad Q = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$h_1 = -a_1c_1 - a_{12}c_{12}, \; h_4 = -a_{12}\Omega \sin\theta^*, \; h_9 = -a_3 b$$

$$h_2 = -a_1c_{12} - a_{12}c_2, \; h_5 = -a_{12}c_1 - a_2c_{12}, \; h_{10} = -a_3 d$$

$$h_3 = a_1 b + a_{12}d, \; h_6 = -a_{12}c_{12} - a_2c_2, \; h_{11} = -a_3c_3$$

$$a_1 = m^{-1}l^{-2}Aa_2, \; h_7 = a_{12}b + a_2 d, \; h_8 = -a_2\Omega \sin\theta^*$$

$$a_2 = (ma^2 \sin^2(\theta^* - \alpha^*) + J_1)^{-1}, \; a_{12} = -l^{-1}a\cos(\theta^* - \alpha^*)\, a_2$$

$$c_1 = \sin^{-1}\alpha^* mla\Omega^2 \sin\theta^* + ml^2\Omega^2 \sin^2\alpha^*, \; a_3 = -A^{-1}\sin^{-2}\theta^*$$

$$c_2 = A\Omega^2 \sin^2\theta^* + mla\Omega^2 \sin\alpha^* \sin^{-1}\theta^*, \; c_{12} = -mla\Omega^2 \cos\alpha^* \cos\theta^*$$

$$b = 2mla\Omega \cos\alpha^* \sin\theta^*, \; q = -a_3\cos\theta^*, \; c_3 = -mla\Omega^2 \sin^2\alpha^*$$

$$d = -2A\Omega \sin\theta^* \cos\theta^* + \delta_1 \sin\theta^*$$

Выбирая в качестве управляемой подсистемы [5] уравнение

$$\dot{x} = Px + Qu \tag{2.3}$$

получим достаточное условие разрешимости задачи в виде [6]

$$\det W \neq 0, \; W = [QPQ \dots P^6Q] \tag{2.4}$$

Структура матрицы W для рассматриваемой системы позволяет упростить (2.4): условие управляемости выполнено для движения (2.1), если

$$K_1 = r_1r_7r_9 + r_4r_6r_8 + r_2r_5r_{10} - r_2r_7r_8 - r_1r_6r_{10} - r_4r_5r_9 \neq 0 \tag{2.5}$$

$$K_2 = r_2r_5r_7 + r_1r_4r_9 + qr_6r_8 - qr_5r_9 - r_2r_4r_8 - r_1r_6r_7 \neq 0 \tag{2.6}$$

$$r_1 = h_3q + h_4, \; r_5 = h_1r_1 + h_2r_2 + h_3r_4, \; r_8 = h_1r_5 + h_2r_6 + h_3r_7$$

$$r_2 = h_7q + h_8, \; r_6 = h_5r_1 + h_6r_2 + h_7r_4, \; r_9 = h_5r_5 + h_6r_6 + h_7r_7$$

$$r_4 = h_9r_1 + h_{10}r_2 + h_{11}q, \; r_7 = h_9r_5 + h_{10}r_6 + h_{11}r_4, \; r_{10} = h_9r_8 + h_{10}r_9 + h_{11}r_7$$

Согласно [6], при условии (2.4), т. е. при выполнении (2.5), (2.6) по заданному критерию

$$I = \int_0^\infty [\omega(x) + u^2]\, dt \tag{2.7}$$

где ω — определенно-положительная квадратичная форма, можно однозначно определить, например, способом, предложенным в [6], управление $u_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5 + m_6x_6 + m_7y$, стабилизирующее нулевое решение системы (2.3) до асимптотической устойчивости. В нелинейной системе (2.2) при действии u_0 получим особенный случай одного нулевого корня [7], отвечающего переменной z.

Управление u_0 стабилизирует движение (2.1) до асимптотической устойчивости по позиционным координатам и их скоростям и устойчивости по циклическим скоростям. Отметим, что стабилизация до экспоненциальной устойчивости по всем фазовым переменным при помощи управления, создаваемого за счёт вращения ротора, в этой задаче невозможна, т. к. в расширенной матрице W имеются две строки, все элементы которых, кроме элементов первого столбца, суть нули.

3. Анализ наблюдаемости. Рассмотрим вопрос об информации о состоянии системы, которая обеспечит формирование управления u_0. Согласно [8], при условиях

$$K_3 = \sigma_3\sigma_9 - h_{11}\sigma_1\sigma_6 \neq 0 \qquad (3.1)$$

$$K_4 = h_3\sigma_5\sigma_{13} + h_2\sigma_7\sigma_{12} + h_4\sigma_6\sigma_{11} - h_3\sigma_7\sigma_{11} - h_4\sigma_5\sigma_{12} - h_2\sigma_6\sigma_{13} \neq 0 \qquad (3.2)$$

$$\sigma_1 = h_1 + h_3h_9,\ \sigma_4 = h_1\sigma_1 + h_5\sigma_2,\ \sigma_7 = h_4\sigma_1 + h_8\sigma_2$$

$$\sigma_2 = h_2 + h_3h_{10},\ \sigma_5 = h_2\sigma_1 + h_6\sigma_2,\ \sigma_8 = \sigma_4 + h_9\sigma_6$$

$$\sigma_3 = h_3h_{11},\ \sigma_6 = h_3\sigma_1 + h_7\sigma_2 + \sigma_3,\ \sigma_9 = \sigma_4 + h_{10}\sigma_6$$

$$\sigma_{10} = h_1\sigma_8 + h_5\sigma_9,\ \sigma_{12} = h_3\sigma_8 + h_7\sigma_9 + h_{11}\sigma_6$$

$$\sigma_{11} = h_2\sigma_8 + h_6\sigma_9,\ \sigma_{13} = h_4\sigma_8 + h_8\sigma_9$$

для системы (2.2) наблюдаемыми в окрестности движения (2.1) по измерению только возмущения угла α являются все компоненты вектора x. А тогда для управляемой подсистемы (2.3) существует система асимптотической оценки (идентификатор) [9]

$$x^{\vee\bullet} = Px^\vee + L_1(\mu - Sx^\vee) + Qu,\ \mu = Sx \qquad (3.3)$$

$$S = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Матрица L_1 может быть однозначно определена решением дуальной задачи оптимальной стабилизации нулевого решения системы (w — новый вектор управления):

$$v^\bullet = P^Tv + S^Tw$$

при задании критерия, аналогичного критерию (2.7).

Полная замкнутая система всей задачи получается присоединением уравнения

$$z^\bullet = -u_0^\vee \qquad (3.4)$$

к системе

$$x^\bullet = Px + Qu_0^\vee + N(x, u^\vee),\ \mu = Sx$$

$$x^{\vee\bullet} = Px^\vee + L_1(\mu - Sx^\vee) + Qu_0^\vee \qquad (3.5)$$

$$u_0^\vee = m_1x_1^\vee + m_2x_2^\vee + m_3x_3^\vee + m_4x_4^\vee + m_5x_5^\vee + m_6x_6^\vee + m_7y^\vee$$

Нулевое решение системы (3.5) асимптотически устойчиво по первому приближению. Уравнение (3.4) полностью отщеплено от системы (3.5), так как согласно структуре функции Рауса, от z не зависит и вектор нелинейных членов N. Нулевое решение уравнения (3.4), очевидно, устойчиво. Таким образом, при выполнении условий (2.5), (2.6), (3.1), (3.2) стационарное движение (2.1) стабилизируется до асимптотической устойчивости по позиционным координатам и их скоростям и устойчивости по циклическим скоростям линейным управлением, создаваемым за счет вращения ротора. Стабилизирующее управление $u_0^\vee$ реализуется в виде обратной связи по оценке $x^\vee$ вектора x состояния управляемой подсистемы (2.3), полученной с помощью идентификатора (3.3) по измерению возмущения угла α в цилиндрическом шарнире подвеса.

4. Числовой пример. Для завершения исследования следует показать, что точки, в которых выражения (2.5), (2.6), (3.1), (3.2) обращаются в нуль, являются изолированными в пространстве параметров задачи. В общем случае непосредственная проверка этого факта затруднительна ввиду громоздкости вышеуказанных выражений. Тем не менее можно доказать изолированность нулей выражений K_1, K_2, K_3, K_4. Проведем это доказательство.

При $a \neq 0$, $l \neq 0$, $\Omega \neq 0$, $0 < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \pi/2$, $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi/2$, $3\pi/2$ левые части выражений (2.5), (2.6), (3.1), (3.2) являются аналитическими функциями $\alpha^*, \theta^*, a, l, \delta_1$. Нули функции $f(z)$, аналитической в области, все изолированы друг от друга, либо функция тождественно равна нулю ([10], с. 207), т. е. каждый нуль имеет окрестность, внутри которой $f(z) \neq 0$, исключая сам нуль. Таким образом, доказательство будет завершено, если будет доказано отличие от нуля выражений K_1, K_2, K_3, K_4 хотя бы на одном движении некоторого тела, подвешенного на стержне.

Выбирая в качестве такого тела цилиндр, рассмотренный в [11] (при $\delta = 0$, так как здесь, в отличие от [11], цилиндр должен быть подвешен к стержню в точке, лежащей на оси динамической симметрии), будем иметь

$$l = 101{,}98 \text{ см}, \quad a = 20{,}396 \text{ см}, \quad J_1/m = 144{,}64 \text{ см}^2, \quad J_3/m = 22{,}615 \text{ см}^2$$

За невозмущенное движение возьмем движение, определяемое углами $\alpha^* = \pi/3$, $\theta^* = 7\pi/6$, т. е. $0 < \theta^* - \pi < \alpha^* < \pi/2$ и конфигурация системы отвечает фиг. 8, *в* [4]. Из уравнений (1.1) определим значения Ω, μ, δ_1, соответствующие этим значениям α^*, θ^*, l, a: $\Omega = 4{,}664$ с$^{-1}$, $\mu = -11{,}785$ см, $\delta_{Vm} = -6992{,}25$ см^2 с$^{-1}$.

Для выражений (2.5), (2.6), (3.1), (3.2) в таком случае получаем $K_1 = 17169742{,}094$ г$^{-3}\cdot$см$^{-6}\cdot$с$^{-10}$, $K_2 = -1758{,}052$ г$^{-3}\cdot$см$^{-6}\cdot$с$^{-8}$, $K_3 = 109684406{,}34$ с$^{-7}$, $K_4 = -322948{,}89$ г$^{-1}\cdot$см$^{-2}\cdot$с$^{-10}$.

Таким образом, каждая из аналитических функций, определяемых левыми частями выражений (2.5), (2.6), (3.1), (3.2) не является тождественным нулем, поэтому в сколь угодно малой окрестности нуля любого из этих выражений имеются точки, в которых выполнены условия, достаточные для разрешения задачи стабилизации предлагаемым способом.

В заключение автор благодарит В. В. Румянцева и А. В. Карапетяна за полезные советы и обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А. Ю.* Пример бифуркации, не приводящей к появлению неустойчивых форм стационарного движения // ДАН СССР. 1957. Т. 117. № 1. С. 47—49.
2. *Скимель В. Н.* О движении гиростата, подвешенного на струне // Тр. Межвуз. конф. по прикл. теории устойчивости движения и аналит. механике. Казань. 1964. С. 118—122.
3. *Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шишкин П. Г.* Некоторые задачи установившихся движений твердого тела // Механика и научно-технический прогресс. Т. 1. Общая и прикл. механика. М.: Наука, 1987. С. 102—116.

4. *Рубановский В. Н.* Стационарные движения тела, подвешенного на стержне, их ветвление и устойчивость // Механика и научно-технический прогресс. Т. 1. Общая и прикл. механика. М.: Наука, 1987. С. 128—146.

5. *Красинский А. Я., Ронжин В. В.* К стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 542—548.

6. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С. 475—514.

7. *Ляпунов А. М.* Собр. соч. Т. 2. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 473 с.

8. *Красовский А. А.* Условие наблюдаемости нелинейных процессов // ДАН СССР. 1978. Т. 242. № 6. С. 1265—1268.

9. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 398 с.

10. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1974. 831 с.

11. *Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е.* О движении осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 6. С. 3—16.

Ташкент

Поступила в редакцию
29.VI.1990